MATEMATIKA II
zapiski predavanj

Šolsko leto	2007 / 2008
Izvajalec	Gregor Dolinar
Avtor dokumenta	Blaž Potočnik

UREJANJE DOKUMENTA

VERZIJA	01	**REVIZIJA**	01
DATUM	21. 2. 2009		
ZADNJI POPRAVLJAL	Blaž Potočnik		
PREGLEDAL	Blaž Potočnik		

OPOMBE

Končna verzija

POPRAVKI

21. feb. 09: Naslovnice, strani; bp

Matematika II

12. 2. 08

Linearna algebra

- determinanta - def: determinanta je predpis, ki kvadratni shemi $n \cdot n$ realnih števil priredi realno število (torej je preslikava iz $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$). Označimo jo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R} \quad \text{ali} \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- definirana je rekurzivno.

1) $n=1$ $\quad \det[a_{11}] = a_{11}$

2) $n=2$

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}\,|a_{22}| + (-a_{12})\,|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3) $n=3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Pri računanju 3x3 determinante si lahko pomagamo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Poljuben n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Izberemo si katerokoli vrstico. Naprimer prvo.

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \cdot D_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} D_{12} + \dots a_{1n}(-1)^{1+n} D_{1n}$$

pri čemer je D_{ij} poddeterminanta velikosti $(n-1)\times(n-1)$, ki jo dobimo tako, da v prvotni determinanti izbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

Produkt $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$ imenujemo (i,j)ti kofaktor

Determinanta je definirana samo za kvadratne sheme.

Primer: • $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 0 - 7\cdot 12 = 84$

• $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 7 \end{matrix} = 0 + 0 + 14 - 0 - 7 - 0 = \underline{\underline{7}}$

• $= \cancel{0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} - 7\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{vmatrix} + \cancel{0\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix}} =$

$= -7(1-2) = \underline{\underline{7}}$

• $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -11 & 2 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 7 & -11 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 0 =$

izberemo vrstico z največ ničlami

$= -4\left(1\cdot 1\cdot 2 + 7\cdot 7(-5) + 2\cdot 3\cdot(-11) - 2\cdot 1\cdot 7 - 7\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot(-5)\cdot(-11)\right) = -4(2 - 245 - 66 - 14 - 42 - 55) =$

$= -4\cdot(-420) = \underline{1680}$

Opomba: determinante lahko definiramo tudi za sheme $n \times n$ kompleksnih števil, v tem primeru je rezultat v splošnem kompleksno število.

Opomba: računanje determinant je časovno zelo potratno

19.2.08 Primer

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0{,}7 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0{,}7 & -5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0{,}7 & -5 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-6 + 24{,}5 + 105 + 1{,}4) + (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0{,}7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}_{(-3-2{,}1)} = -89{,}2$$

Lastnosti determinante

1. Vrednost determinante se ne spremeni, če zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev

Primer:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ko zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev, se števila prezrcalijo čez diagonalo (levo zgoraj, desno spodaj).

2. Če zamenjamo dve vrstici (stolpca), potem se spremeni predznak determinante.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ ← Primer (sledi iz razvoja po vrstici)

3. Faktor, ki je skupen vsem elementom neke vrstice, lahko izpostavimo. Enako velja za stolpce.

Primer: $$\begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 9 & 6 & 12 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$ sledi iz razvoja po tej vrstici.

4. Determinanta je enaka 0, če sta v njej dve vrstici proporcionalni (npr. enaki) - enako velja s stolpci

Primer $$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$ Dokaz: če ima d. dve vrstici enaki, potem lahko ti dve vrstici zamenjamo in se po eni strani ne zgodi nič (ker sta enaki). Po drugi strani pa se spremeni predznak, ker smo zamenjali vrstici. Dobimo, da je determinanta enaka številu D z lastnostjo $D=-D$. To je mogoče le, če je $D=0$. (lastnost 2)

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{D}{\shortparallel} \qquad = -D \quad \rightarrow D = -D \rightarrow 2D = 0$$

5. Vrednost determinante se ne spremeni, če katerikoli vrstici prištejemo večkratnik katerekoli druge vrstice (enako za stolpce)

Primer:
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -V_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-2\cdot 3) = -6$$

Primer:
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ -V_1 \\ -2V_1 \\ +V_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{5}}$$

Uporaba determinante

- linearna odvisnost vektorjev
- Cramarjevo pravilo za reševanje sistema n linearnih enačb z n neznankami;

Oglejmo si primer za 3 enačbe in 3 neznanke

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= -7 \\ x - y + 4z &= 1 \\ 2x + 2y + 10z &= 0 \end{aligned}$$

Sistem rešimo s C. pravilom tako, da izračunamo štiri determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -3V_3 \\ -V_3 \\ \end{array} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -13 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -13 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1-26) = \underline{\underline{-54}}$$

Če je determinanta $D \neq 0$, je zadeva rešljiva, ima natanko eno rešitev. D_1 - namesto I stolpca napišemo desno stran. S tem pravilom lahko rešimo, če je le ena rešite

$$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -7 & 4 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 2 \cdot (35 + 2 + 28 - 20) = \underline{90}$$

D_2 - namesto 2. stolpca desna stran.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -7 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 2 \cdot (15 - 28 - 2 + 35) = \underline{+40}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 2 \, (4 - 7 - 7 - 3) = \underline{-26}$$

Rešitev: $x = D_1/D \quad y = D_2/D \quad z = D_3/D$

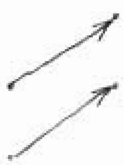
$$\underline{\underline{x = -5/3 \quad y = -20/27 \quad z = 13/27}}$$

Sistem n linearnih enačb za n neznank rešimo s C. pravilom tako, da izračunamo determinanto koeficientov, ki so pred neznankami (ista neznanka - isti stolpec) in n determinant, pri katerih en stolpec zamenjamo z desno stranjo sistema. Rešitev je potem $x_i = D_i / D$.

Opomba: Cramarjevo pravilo je časovno potratno (in ga običajno ne uporabljamo).

Vektorji

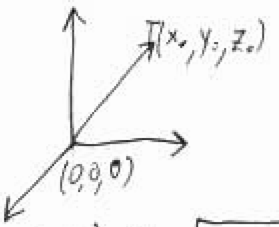
Def: geometrijski objekt, ki ima poleg velikosti tudi smer, imenujemo usmerjena daljica in vse usmerjene daljice, ki jih lahko vzporedno preslikamo eno na drugo, predstavljajo isti vektor.



Torej ima vektor določeno velikost in smer. Vektor se ne spremeni, če ga vzporedno premaknemo.

Če imamo v prostoru $\mathbb{R}^3$ podan kartezični koordinatni sistem, lahko vektorje zapišemo kot trojico števil na naslednji način:

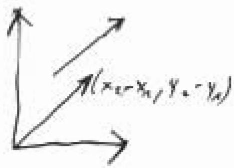
- vektor premaknemo vzporedno tako, da ima začetek v koordinatnem izhodišču. Konec vektorja opisuje točka, ki ima 3 koordinate. Vektor z začetkom v koor. izhodišču imenujemo krajevni vektor. Določen pa je s končno točko. Pišemo $\vec{r}_t(x_0, y_0, z_0)$

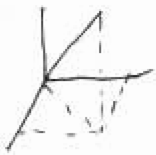


Dolžina vektorja: izračunamo po pitagorovem izreku:

$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

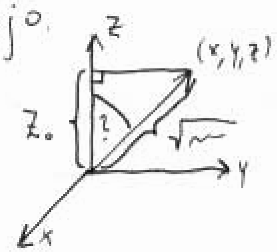
$|\overrightarrow{T_2T_1}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

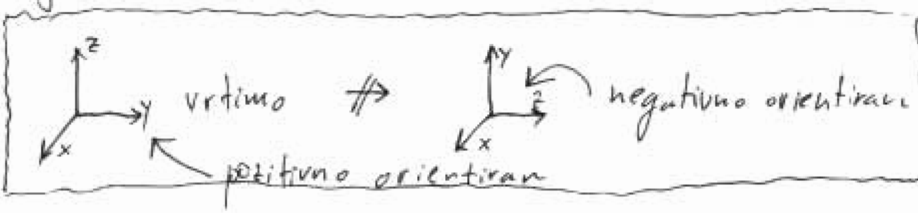




Pri danem k.s. označimo $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Ti vektorji so enotski - njihova dolžina je enaka 1. Med sabo so ortogonalni - to pomeni pravokotni.

Oglejmo si kot, ki ga dani vektor oklepa z koordinatno osjo.





$\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} = \cos\gamma$. Podobno $\cos\alpha$, $\cos\beta$ $\left(\frac{x_0}{l}, \frac{y_0}{l}\right)$. To so smerni kosinusi.

Računanje z vektorji

Naj bosta dana vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Seštejemo tako, da seštejemo istoležne koordinate $\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

Geometrijsko to pomeni, da enega izmed vektorjev prestavimo z začetkom v konec drugega.

Velja $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ komutativnost

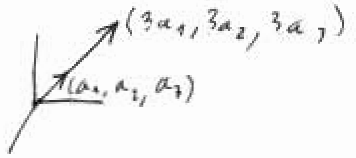
$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ asociativnost

(I) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ $\vec{0}=(0,0,0)$ je enota za seštevanje

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ $-\vec{a}=(-a_1,-a_2,-a_3)$ je nasprotni element

Definirajmo množenje vektorja s skalarjem (številom)

$\alpha\cdot\vec{a}=\alpha(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3)$. Geometrijsko pomeni, da vektor raztegnemo ali skrčimo za faktor α. Če je α negativen, obrnemo še smer.



Velja:

(II)
$$\left.\begin{array}{l}\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}\\(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}\end{array}\right\}\text{distributivnost}$$
$$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$$
$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$$

Vektorski prostor

- linearna odvisnost

Def.: neprazno množico V imenujemo realen vektorski prostor, če je za elemente te množice definirano seštevanje, ki zadošča lastnosti (I) in množenje elementa te množice z realnim številom, ki zadošča lastnostim (II)

Primeri vektorskih prostorov:

1. Vektorji v ravnini ali prostoru
2. n-terice v $\mathbb{R}^n$, torej $V_n=\{(a_1,a_2,a_3,a_4,\dots a_n), a_1\dots a_n\in\mathbb{R}\}$

③ Funkcije (realne funkcije), torej $V = \{ f : f \text{ je realna fja} \}$
npr: $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$
④ Prostor matrik

Naj bodo $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots \vec{a_n}$ elementi vektorskega prostora in $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ realna števila. Potem je vektor $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + \dots + \alpha_n \vec{a_n}$ linearna kombinacija $\vec{a_1}, \dots \vec{a_n}$.

Def.: množica vektorjev V_1 je linearno odvisna, če lahko vsaj en element te množice zapišemo kot linearno kombinacijo preostalih elementov te množice.

Množica vektorjev V_1 je linearno neodvisna, če ni linearno odvisna. To je def.

Baza: Def.: Baza vektorskega prostora V je linearno neodvisna množica elementov, s katerimi lahko izrazimo vsak element vektorskega prostora.
Primer: $V = \mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) . \ x, y, z \in \mathbb{R} \}$
$B_1 = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \} = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$
B_1 je baza prostora. Res.
Naj bo $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ poljuben. Potem je $(x_0, y_0, z_0) =$
$= x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \vec{k}$

Naprimer: $(-11,7,23) = -11\vec{i} + 7\vec{j} + 23\vec{k} = -11(1,0,0) + 7(0,1,0) + 23(0,0,1)$

Def: Dimenzija vektorskega prostora je enaka številu elementov baze, če je baza končna. Če je v bazi neskončno elementov, pravimo, da je vektorski prostor neskončno dimenzionalen.

Primer: ① $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ② prostor {f. f je realna funkcija} je neskončno dimenzionalen

③ $\dim\{(a_1, \ldots a_n),\ a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}\} = n$

Opomba: Baz istega vektorskega prostora je lahko več.

Primer: prostor $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3),\ a_1, \ldots a_3 \in \mathbb{R}\}$ ima

$B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ ali baza

$B_2 = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ ali

$B_3 = \{(2,1,0), (0,1,3), (7,0,7)\}$

B_1 lahko zapišemo z B_2:

$(1,1,1) - (1,1,0) = (0,0,1)$	$(a_1, a_2, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2((1,1,0) -$
$-(1,1,0) - (1,0,0) = (0,1,0)$	$-(1,0,0)) + a_3((1,1,1) - (1,1,0))$

Produkti vektorjev

1. Skalarni produkt

Naj bosta $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorja v $\mathbb{R}^3$. Potem je skalarni produkt definiran s predpisom

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Skalarni produkt vektorjev je skalar!

Veljajo naslednje lastnosti:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ komutativnost
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{c})$ distributivnost
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ to je vedno ≥ 0. Če je $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{0}$, sledi $\vec{a}=(0,0,0)$
- Ne velja asociativnost

$$\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})}_{\text{število}}\cdot\underset{\text{vektor}}{\vec{c}}\neq\underset{\text{vektor}}{\vec{a}}\,\underbrace{(\vec{b}\cdot\vec{c})}_{\text{število}}$$

Iz definicije skalarnega produkta lahko hitro izpeljemo

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, α je vmesni kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Trditev: Schwarzeva neenačba (Cauchy-Schwarzeva).

Velja $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Dokaz: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|}_{\text{pozitivno gre ven}}\cos\alpha|=$

$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\alpha|$

to pa je ≤ 1. Torej velj

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$

Trikotniška neenačba - trditev

$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ //Dokaz:

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\vec{a}+\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{a}+\vec{b}\vec{b}=|\vec{a}|^2+(2\vec{a}\vec{b})+|\vec{b}|^2$

Po prejšnjem izreku pa je $\leq|\vec{a}|^2+(2|\vec{a}||\vec{b}|)+|\vec{b}|^2$.

In to je $=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$.

Geometrijska interpretacija

trikotnik ena str vedno krajša od ostalih dveh.

Dolžina vsote je manjša od vsote dolžin.

$\boxed{26.2.\overline{08}}$ 10.4.$\overline{08}$ I. kolokvij

30.5.$\overline{08}$ II. kolokvij

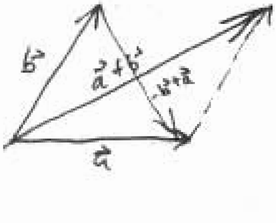
daljša, ne gre.

Enakost velja: vektorja sta kolinearna. Torej linearno odvisna, torej imata isto smer.

Trditev (paralelogramska enakost). Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorja. Potem velja
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2).$$

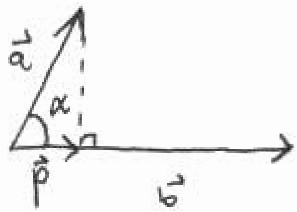
Dokaz:
$$\left.\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\vec{a}+\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{a}+\vec{b}\vec{b}=\\&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2\\|\vec{a}-\vec{b}|^2&=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\end{aligned}\right)+$$

seštejemo: $=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$. Geometrijska interpretacija



(Prva diagonala)^2 + (2. diagonala)^2 =
= vsota stranic (dolžin)

Projekcija vektorja na nek drugi vektor



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{p}| = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha =$$

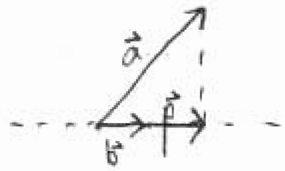
kot med vektorjema: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Torej: $|\vec{p}| = \cancel{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\cancel{|\vec{a}|}|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Smer $\vec{p}$ je enaka smeri $\vec{b}$. Torej je $\vec{p} = |\vec{p}|\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ enotski vektor

Ostane: $\vec{p} = |\vec{p}|\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \boxed{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}$

Primer: $\vec{a} = (2,-2,1)$ $\vec{b} = (1,-1,5)$. Določimo $\vec{p}$ vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.



$$\vec{p} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{2\cdot1 - 2\cdot(-1) + 1\cdot5}{\sqrt{1+1+25}}\cdot\frac{(1,-1,5)}{\sqrt{1+1+25}} =$$

$$= \frac{9}{27}\cdot(1,-1,5) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

VEKTORSKI PRODUKT

Naj bosta $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorja v R^3. Potem je njun vektorski produkt vektor v R^3, dan s predpisom

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underset{\substack{\| \\ (1,0,0)}}{\vec{i}}(a_2b_3 - a_3b_2) - \underset{\substack{\| \\ (0,1,0)}}{\vec{j}}(a_1b_3 - a_3b_1) + \underset{\substack{\| \\ (0,0,1)}}{\vec{k}}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

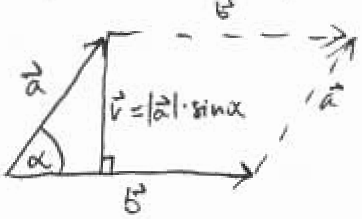
Primer: $\vec{a} = (7,-1,2)$ $\vec{b} = (0,11,-2)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -2 \end{vmatrix} = (-20, 14, 77)$$

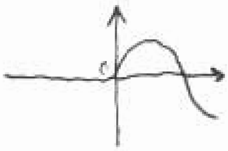
da ni dolžina negativna.

Hitro lahko izpeljemo, da je dolžina vektorja $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\alpha|$, pri čemer je α vmesni kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$; smer vektorja $\vec{a}\times\vec{b}$ pa je pravokotna na oba vektorja, torej pravokotna na $\vec{a}$ in na $\vec{b}$.

Opomba: S pomočjo vektorskega produkta lahko izračunam ploščino paralelograma (trikotnika)



$pl = O \cdot \vec{v} = |\vec{b}|\cdot\vec{v} = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin\alpha = |\vec{a}\times\vec{b}|$



$pl_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

$\frac{v}{|\vec{a}|} = \sin\alpha$

Velja: 1) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$ distributivnost

2) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ ne velja komutativnost

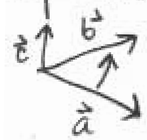
3) $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ne velja asociativnost

Primer:

$(\vec{i}\times\vec{i})\times\vec{j} = 0 \qquad \vec{i}\times(\underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{=\vec{k}}) = -\vec{j}$

4) $(k\vec{a})\times\vec{b} = k(\vec{a}\times\vec{b})$, $k\in\mathbb{R}$

Opomba: $\vec{a}\times\vec{b}$ je pravokoten na $\vec{a}$ in na $\vec{b}$ in gleda v smeri, ki jo določimo po pravilu desnega vijaka (pozitivna smer)



Opomba: $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

MEŠANI PRODUKT: Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ vektorji v $\mathbb{R}^3$, potem je mešani produkt definiran s predpisom $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Mešani produkt je skalar! Velja:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} = (a_1\cdot\vec{i} + a_2\cdot\vec{j} + a_3\cdot\vec{k})\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

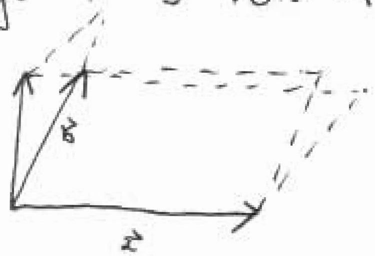
Torej je mešani produkt enak determinanti sestavljeni iz vrstic vektorjev produkta.

Iz lastnosti determinante sledi:

1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ – iz lastnosti determinante, zamenjata se dve vrstici

2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ – dvojna zamenjava
$= (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

Trditev: Absolutna vrednost mešanega produkta vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ je enaka prostornini paralelepipeda, ki ga ti 3 vektorji določajo.



Res. Prostornina je enaka ploščina osnovne ploskve krat višina. Osnovna ploskev je paralelogram, njena ploščina $|\vec{a} \times \vec{b}|$, višina je projekcija tretjega vektorja na premico pravokotno na osnovno ploskev, torej skalarni produkt $\vec{c} \cdot \dfrac{(\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$. Posledica: vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko je determinanta različna od 0.

Res. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$ Če trije vektorji ležijo v isti ravnini, je prostornina paralepipeda, ki ga določajo enaka 0, torej je mešani produkt enak 0, torej je determinanta enaka 0.

Primer: Preverimo, ali ležijo vektorji $(-1,7,-2)$, $(2,1,3)$, $(0,15,-1)$ v isti ravnini.

$$\left|\begin{matrix} -1 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 15 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \\ 0 & 15 \end{matrix} = +1+0-60+45+14+0=0$$

Vektorji ležijo v isti ravnini, so linearno odvisni.

Trditev (Lagrangeova identiteta):

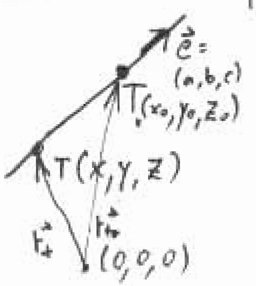
$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d})-(\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\vec{d})$ Dokaz opustimo.

29.2.08

Točka, premica, ravnina v $\mathbb{R}^3$

1. Točka je ničdimenzionalni objekt. Pri danem koordinatnem sistemu ima koordinate $T(x_0, y_0, z_0)$. Točko lahko identificiramo s krajevnim vektorjem do te točke.

2. Premica je natanko določena z vektorjem, ki leži na tej premici. (Imenujemo ga smerni vektor), in točko na tej premici.



$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{r_T} = \vec{r_{T_0}} + \lambda \vec{e} \\ \text{vektorska oblika} \\ \text{enačbe premice}\end{array}}$$

Primer: $\vec{e} = (-1, 2, 3)$

$T_0(0,1,0)$

$\vec{r_T} = (0,1,0) + \lambda(-1,2,3)$

npr.: $\lambda = -1 \rightarrow \vec{r_T} = (1,-1,-3)$

Dalje: $(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a,b,c)$. Sledi:

$$x = x_0 + \lambda a \;,\; y = y_0 + \lambda b \;,\; z = z_0 + \lambda c$$

Če $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, dobimo

$\downarrow$

$\lambda \cdot a = x - x_0 \rightarrow \lambda = \frac{x - x_0}{a}$

$\lambda b = y - y_0 \rightarrow \lambda = \frac{y - y_0}{b}$

$\lambda c = z - z_0 \rightarrow \lambda = \frac{z - z_0}{c}$

Sledi: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

Kanonična oblika enačbe premice.

Primer: Določi smerni vektor in točko na premici

$$\frac{x}{3} = \frac{1-y}{2} = 2z-1 \rightarrow \text{predelamo}$$

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \longrightarrow \text{Sledi: } \vec{e} = (3, -2, \tfrac{1}{2})$$

Točka na premici $T_0(0, 1, \frac{1}{2})$

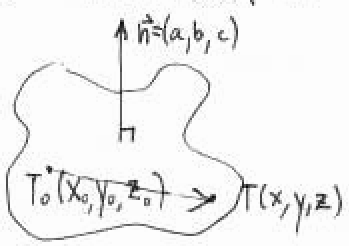
Če je naprimer $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. Potem je kanonična oblika:

$$x = x_0 \qquad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Primer: Zapiši enačbo premice s smernim vektorjem $\vec{e} = (2, 0, -1)$, $T_0(-1, 1, 0)$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{z-0}{-1} \qquad y = 1$$

3. Ravnina je natanko določena z vektorjem, ki je pravokoten na ravnino (ta vektor je normala) in točko na ravnini



Točka T leži na ravnini natanko tedaj, ko je vektor $\vec{T_0T}$ pravokoten na normalo, torej ko je $\vec{T_0T} \cdot \vec{n} = 0$ oz. $(\vec{r_T} - \vec{r_{T_0}}) \cdot \vec{n} = 0$ — vektorska enačba ravnine.

Sledi $((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)) \cdot (a,b,c) = 0$

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot (a,b,c) = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \qquad \text{kanonična oblika ravnine}$$

$$ax+by+cz = \underbrace{ax_0+by_0+cz_0}_{d} \rightarrow ax+by+cz = d$$

Primer: Zapiši enačbo ravnine z normalo $\vec{n}=(-1,0,2)$ in točko na ravnini $T_0(5,0,-1)$. Zapiši tudi dve dodatni točki na ravnini.

$$\vec{n}=(\overset{a}{-1},\overset{b}{0},\overset{c}{2}) \qquad -1\cdot x+0\cdot y+2\cdot z=d$$

$$-x+2z=d$$

$$-5+2\cdot(-1)=d \rightarrow \boxed{-7=d}$$ → (enačbe vseh ravnin z $\vec{n}$, d fiksira)

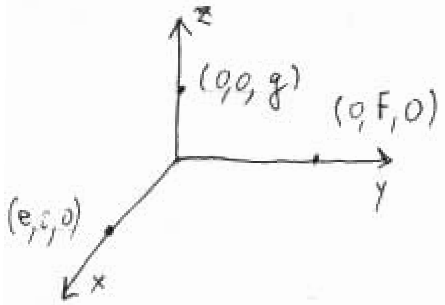
Enačba ravnine: $-x+2z=-7$

Dodatni točki:

$(0,2008,-\frac{7}{2})$ $\quad$ $(7,1,0)$ $\quad$ itd.

Enačbo ravnine lahko zapišemo tudi v obliki

$$\frac{x}{e}+\frac{y}{f}+\frac{z}{g}=1$$ ← segmentna oblika



Pove, v katerih točkah seka ravnina koordinatne osi.

Za enačbo ravnine $ax+by+cz=d$ velja:

* $d=0$: potem gre ravnina skozi koordinatno izhodišče. Točka $(0,0,0)$ leži na ravnini.
* $c=0$: potem je normala $\vec{n}=(a,b,0)$, normala leži na ravnini (x,y), ravnina pa je vzporedna z osjo z.

* $b=c=0$: potem $\vec{n}=(a,0,0)$ in ravnina je vzporedna s koordinatno ravnino (y,z)

Opomba: enačbo ravnine lahko zapišemo v obliki

↓

določene s točkami $T_1(x_1,y_1,z_1)$, T_2 in T_3

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

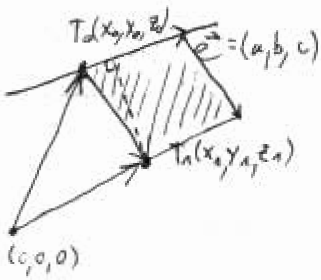
Medsebojna lega točk, premic, ravnin

1. Razdalja med točkama

$T_1(x_1,y_1,z_1)$ in $T_2(x_2,y_2,z_2)$

$$d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

2. Razdalja točke od premice $T_1(x_1,y_1,z_1)$ in premico določeno s točko $T_0(x_0,y_0,z_0)$ in smernim vektorjem $\vec{e}=(a,b,c)$. Do razdalje med točko in premico pridemo tako, da zapišemo ploščino ▱, določenega z vektorjema $\vec{T_1T_0}$ in $\vec{e}$ na dva načina.



$$pl=|\vec{T_1T_0}\times\vec{e}|$$

$$pl=|\vec{e}|\cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{razdalja}}}{\text{višina}}$$

$$d=\frac{|\vec{e}\times(\vec{r_{T_0}}-\vec{r_{T_1}})|}{|\vec{e}|}$$

3. Razdalja točke od ravnine

$T_1(x_1, y_1, z_1)$ in $ax + by + cz = d$

Enačbo ravnine preoblikujemo $\cancel{\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z = 1}$

Razdalja je potem $\frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{d}$

Primer: $T_1(4, 4, -5)$

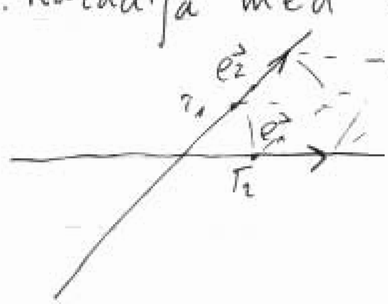
$3x - 4y + 12z - 1 = 0$

Normirana oblika enačbe ravnine:

$\frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, razdalja je $\left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

razdalja $= \left|\frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 12 \cdot (-5) - 1}{\sqrt{9+16+144}}\right| = \left|\frac{-65}{13}\right| = 5$

4. Razdalja med dvema premicama



paralepiped. Razdaljo izračunamo tako, da na dva načina zapišemo prostornino paralepipeda, določenega z vektorji $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ in $\overrightarrow{T_1T_2}$

$vol = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{r_{T_2}} - \vec{r_{T_1}}) = \text{višina} \cdot |\vec{e_1} \times \vec{e_2}|$

razdalja $= \frac{|(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{r_{T_2}} - \vec{r_{T_1}})|}{|\vec{e_1} \times \vec{e_2}|}$

5. Razdalja premice in ravnine

4.3.08

Če premica in ravnina nista vzporedni, se sekata in je njuna razdalja enaka 0.
Če sta vzporedni, potem so vse točke na premici enako oddaljene od ravnine, izberemo si poljubno točko na premici in izračunamo njeno razdaljo od ravnine.

6. Prebod premice z ravnino.

Zanima nas presečišče premice in ravnine:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\lambda \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=x_0+a\lambda \\ y=y_0+b\lambda \\ z=z_0+c\lambda \end{array}\right\} *$$

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

$$a_1(x_0+a\lambda)+b_1(y_0+b\lambda+c_1(z_0+c\lambda)=d_1$$

Izrazimo λ in λ vstavimo v $(*)$.

Primer: ravnina $2x-3y-z=-2$

premica $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$

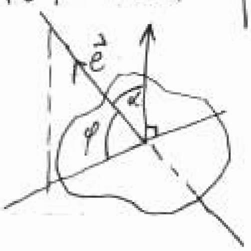
Iščemo presečišče.

$$\begin{array}{l|l} x=-2\lambda+3 & 2(-2\lambda+3)-3(2\lambda+3)-(3\lambda-1)=-2 \\ y=2\lambda+3 & -4\lambda-6-6\lambda-9-3\lambda+1=-2 \\ z=3\lambda-1 & -13\lambda=0 \end{array}$$

$$\lambda=0$$

Iskana točka je $T(3,3,-1)$

7. Kot med premico in ravnino



$\vec{n}$ normala ravnine

$\vec{e}$ smerni vektor premice

Zanima nas kot φ med premico in ravnino. Najprej izračunamo kot med premico in normalo (α).

$\cos\alpha = \frac{\vec{e}\cdot\vec{n}}{|\vec{e}|\cdot|\vec{n}|}$. Kot φ je potem $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Ker je $\sin\varphi = \cos\alpha$ je $\sin\varphi = \frac{\vec{e}\cdot\vec{n}}{|\vec{e}|\cdot|\vec{n}|}$.

MATRIKE

Def: Matrika velikosti $m \times n$ je pravokotna shema števil z m vrsticami in n stolpci.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m ni nujno enak n, kot je to pri determinanti.

Števila a_{ij} imenujemo elementi matrike, prvi indeks označuje vrstico, drugi stolpec. Množico vseh matrik velikosti $m \times n$ označimo z $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Elementi matrike so realna števila.

Če je $m=n$, je matrika kvadratna. Če je $n=1$, je matrika stolpčna. Če je $m=1$, je matrika vrstična
Če so vsi elementi matrike enaki nič, je to ničelna matrika $0 \in M_{m,n}$.
Če je matrika kvadratna in je $a_{ii}=1$ in $a_{ij}=0$ za $i \neq j$, matriko imenujemo identična matrika ali identiteta.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Po diagonali so enke, drugod ničle.

Kvadratna matrika, ki ima povsod ničle, razen na diagonali (torej $a_{ij}=0$ za $i \neq j$), se imenuje diagonalna matrika.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$ Naj bo matrika A kvadratna, potem je zgornje trikotna, če so vsi elementi pod diagonalo enaki 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ Podobno definiramo spodnje trikotno matriko.

Primer: Matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Je diagonalna, je zgornje trikotna (?)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ Ni diagonalna, ni zgornje trikotna, je spodnje trikotna.

Seštevanje matrik in množenje s skalarjem

Seštevamo lahko samo matrike istih dimenzij. Če sta $A, B \in M_{m,n}$, potem ju seštejemo tako, da seštejemo istoležne elemente

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} \dots\dots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} \dots\dots a_{2n}+b_{2n} \\ a_{m1}+b_{m1} \dots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Primer:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrike množimo s skalarjem $\alpha \in \mathbb{R}$, da z α pomnožimo vsak element matrike.

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} \dots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} \dots \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{m1} \dots \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Veljaza $A, B, C \in M_{m,n}$

$A+B = B+A$	komutativnost
$A+(B+C) = (A+B)+C$	asociativnost
$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$	distributivnost
$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$	–"–
$A+0 = A$	0 je ničelna matrika
$1 \cdot A = A$	

Opomba: Vse matrike velikosti $m \times n$, torej množica $M_{m,n}$, sestavljajo vektorski prostor. Baza tega prostora je npr. množica matrik E_{ij}, to je tistih matrik, ki imajo na (i,j)-tem mestu 1, drugod ničle.

npr $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Dimenzija tega prostora je $m \cdot n$.

Transponirana matrika, posebne vrste matrik.

Naj bo $A \in M_{m,n}$. Potem je A^T, torej transponirana matrika matrike A element $M_{n,m}$. Dobimo jo tako, da zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ potem je } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Velja: $(A+B)^T = A^T + B^T$

Def: Matrika, za katero velja $A = A^T$, se imenuje simetrična matrika. Je avtomatično kvadratna.

Def: Poševno simetrična matrika je tista, za katero velja $A^T = -A$

Trditev: Vsako matriko lahko zapišemo kot vsoto simetrične in poševno simetrične matrike (antisimetrične). To velja za vsako kvadratno m.

Dokaz: Definiramo $S = (A + A^T) \cdot \frac{1}{2}$, $P = \frac{1}{2}(A - A^T)$

Velja $S + P = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A^T + \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} A^T = A$

Prepričajmo se, da je S simetrična in P poševno simetrična matrika

$$S^T = \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}\left(A^T + A^{(T)^T}\right) = \frac{1}{2}(A^T + A) = S$$

Torej je simetrična

$P^T = \frac{1}{2}(A-A^T)^T = \frac{1}{2}(-A+A^T) = -\frac{1}{2}(A-A^T) = -P$. Torej poševno simetrično.

Primer: Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$S = \frac{1}{2}(A+A^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 4 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = 1/2(A-A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 4 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Def: Če so elementi matrike A kompleksna števila, potem definiramo matriki A adjungirano matriko $A^* = \overline{A}^T$

Primer: $\begin{bmatrix} i & 2-i & 7+3i \\ 0 & -1 & 2+3i \end{bmatrix}$

$A^* = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 2+i & -1 \\ 7-3i & 2-3i \end{bmatrix}$ Če je $A = A^*$, pravimo, da je A hermitska matrika.

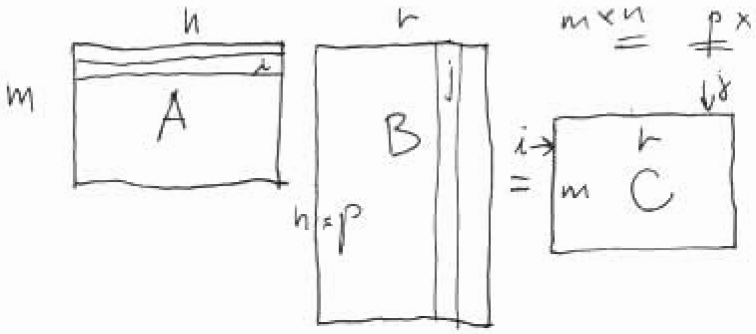
Velja: Vsako kvadratno matriko lahko zapišemo kot vsoto hermitske in poševno hermitske ($A^* = -A$)

Def: Če za kvadratno matriko A velja $AA^* = A^*A = I$, potem je A unitarna. Če za realno matriko velja $AA^T = A^TA = I$, je A ortogonalna.

Množenje matrik

Naj bo matrika $A \in M_{m,n}$ in matrika $B \in M_{p,r}$. Potem obstaja produkt $A \cdot B$ samo tedaj, ko je $n = p$, ko ima torej matrika A enako število stolpcev, kot ima matrika B vrstic. Dobljena matrika $AB \in M_{m,r}$, torej ima m vrstic in r stolpcev, elemente matrike pa izračunamo s pravilom $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ c_{m1} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix}$$



(i,j)ti element dobimo tako, da skalarno zmnožimo i-to vrstico matrike A in j-ti stolpec matrike B.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 21 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = 2\cdot 0 + (-3)\cdot(-1) + 7\cdot 2 = 17$$

$$c_{12} = 2\cdot 7 + (-3)\cdot(0) + 7\cdot 1 = 21$$

$$c_{13} = 2\cdot 1 + (-3)(-1) + 7\cdot 0 = 5$$

$$c_{21} = 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 = -2$$

$$c_{22} = 1\cdot 7 + 0\cdot 0 + (-1)1 = 6$$

$$c_{23} = 1\cdot 1 + 0(-1) + (-1)\cdot 0 = 1$$

Še en primer:

$$[3, 6, 1] \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = [c_{11}] = 3\cdot 5 + 6\cdot 7 + 1\cdot 2 = 59$$

To je skalarni produkt dveh vektorjev.

7.3.08

Primer: $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 12 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

2×3 3×3

dimenzija

Lastnosti množenja

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ $A \in M_{m,n}$ $B \in M_{n,o}$ $C \in M_{o,p}$

  asociativnost

  $m \times n$ $\underbrace{n \times o \quad o \times p}_{n \times p}$

  $m \times p$

- $(\alpha A)B = \alpha(A \cdot B)$ $A \in M_{m,n}$ $B \in M_{n,o}$

- $\left.\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ (A+B)C &= AC + BC \end{aligned}\right\}$ distributivnost $A, B \in M_{m,n}$

- $A \cdot B \neq B \cdot A$ ni komutativno

Primer $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Opomba: Iz enakosti $A \cdot B = 0$ ne sledi, da je $A = 0$ ali $B = 0$. Obstajata neničelni matriki, katerih produkt je 0.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trditev: Naj bo A kvadratna matrika in I identiteta. Potem je $A \cdot I = I \cdot A = A$

Dokaz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Trditev: Naj bo $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,o}$. Potem je $\underbrace{\underbrace{(A \cdot B)}_{m \times o}{}^T}_{o \times m} = \underset{o \cdot n}{B^T} \cdot \underset{n m}{A^T}$

Inverzna matrika

Def: Naj bo A kvadratna matrika. Če obstaja taka matrika A^{-1} da velja $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, potem A^{-1} imenujemo inverzna matrika matrike A. A^{-1} je tudi kvadratna.

Opomba: Neničelna kvadratna matrika nima nujno inverza.

Def: Če ima matrika inverz, potem pravimo, da je obrnljiva ali nesingularna. Če inverza nima, je matrika singularna.

Trditev: Matrika A je obrnljiva natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$

Trditev: Naj bo A obrnljiva. Potem je njen inverz A^{-1} enak
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1n} \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{nn} \end{bmatrix}^T,$$
pri čemer je $A_{i,j}$ (i,j)-ti kofaktor matrike A.

$\boxed{\text{Prečrtamo } i\text{-to vrstico in } j\text{-ti stolpec, izračunamo poddeterminanto velikosti } (n-1)\times(n-1) \text{ in pomnožimo z } (-1)^{i+j}}$

Primer: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det A = \det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0$$

$A_{11} = 4 \cdot (-1)^{1+1} = 4$

$A_{12} = 2 \cdot (-1)^{1+2} = -2$

$A_{21} = 1(-1)^{1+2} = -1$

$A_{22} = 3 \cdot (-1)^{2+2} = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trditev: Naj bosta A, B obrnljivi matriki, potem je obrnljiva tudi matrika AB in njen inverz je enak $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dokaz: Označimo z X inverzno matriko matrike $A \cdot B$. Potem je $AB \cdot X = I \quad | A^{-1} \cdot$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\underbrace{A^{-1}A}_{I}B}_{B}X = \underbrace{A^{-1}I}_{A^{-1}} \end{array}\right\} \rightarrow B \cdot X = A^{-1} \quad | B^{-1} \cdot$$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\underbrace{B^{-1}B}_{I}X}_{X} = B^{-1}A^{-1} \end{array}\right\} X = B^{-1}A^{-1}$$

$5x = 7 \quad \} \cdot \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} 5x = 7 \cdot \frac{1}{5}$

$x = \frac{1}{5} \cdot 7$

S pomočjo inverznih matrik lahko rešimo matrične enačbe.

Primer:

$X \cdot A = B$, pri čemer $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$X = ?$

$XA = B \quad \} A^{-1} \cdot$

$$\underbrace{X \underbrace{A A^{-1}}_{I}}_{X} = B A^{-1} \longrightarrow X = B A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -18 & 22 \\ -4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/5 & 11/5 \\ -2/5 & 8/5 \end{bmatrix}$$

Linearne preslikave

Def: Preslikava $F: X \to Y$ je linearna, če velja

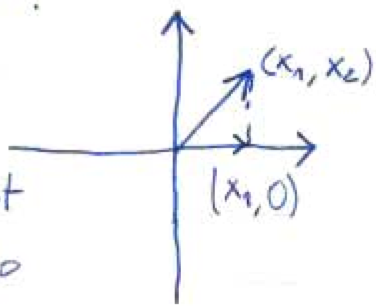
- $F(x+y) = F(x) + F(y)$, $x, y \in X$ aditivnost
- $F(\alpha x) = \alpha F(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}, x \in X$ homogenost

Primer: $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=kx$ (če bi bilo $kx+n$ ne bi bila homogena)

Trditev: Na matriko lahko gledamo kot na preslikavo. Če $A\in M_{m,n}$, potem A preslika stolpčni vektor $x\in M_{n,1}$ v stolpčno matriko (vektor) $AX\in M_{m,1}$.

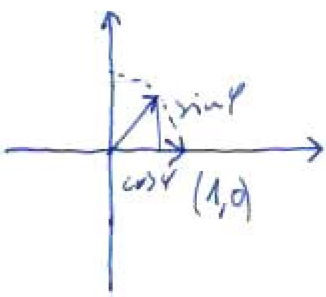
Primer: Naj bo $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$



Vektor (x_1,x_2) zapišemo kot stolpec $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$. Potem lahko izračunamo $AX=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}$

Matrika $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ predstavlja projekcijo vektorja na os x.

Primer: Naj bo $A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$ $\varphi\in[0,2\pi]$



$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$$

To je ravno za φ zarotiran vektor $(1,0)$

Hitro se lahko prepričamo, da preslikava dana z matriko $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ zarotira vektor za kot φ v pozitivni smeri.

Npr $\begin{bmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ je vektor, ki ga dobimo, če zarotiramo $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ za $\pi/3$.

Preslikava, dana z matriko je linearna. Velja tudi obrat. Vsako linearno preslikavo lahko podamo z matriko.

Dokaz: $A(X+Y) = AX + AY$ Drugi del dokaza
$A(\alpha X) = \alpha AX$ opustimo.

Rang matrike

Def: Naj bo $A \in M_{m,n}$. Potem je rang matrike A enak dimenziji največje neničelne poddeterminante matrike A.

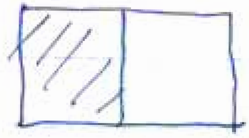
Primer: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ rang A = ?

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 6 + 6 - 24 = 0 \Rightarrow \text{rang} A < 3$$

Rang ničelne matrike je enak nič.

$\begin{vmatrix}3&0\\2&4\end{vmatrix} = 12 \neq 0 \longrightarrow$ 2×2 determinanta, ki je različna od nič. Sledi rang $A=2$.

Opomba: Rang matrike dimenzije $m\times n$ je manjši ali kvečjemu enak ~~dimenziji~~ manjšemu od števil m in n.
Torej rang $A \leq \min\{m,n\}$



11.3.08

Primer. $A = \begin{bmatrix}4&2&1&3\\6&3&4&7\\2&1&0&1\end{bmatrix}$ rang $A \leq 3$

Ali je enak 3?

$$\begin{vmatrix}4&2&1\\6&3&4\\2&1&0\end{vmatrix} = 0+16+6-0-16=0$$

$$\begin{vmatrix}2&1&3\\3&4&7\\1&0&1\end{vmatrix} = 8+7+0-12-3-0=0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 14 + 0 - 24 - 6 - 0 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 28 + 18 - 18 - 12 - 28 = 0$$

Sledi $\operatorname{rang} A < 3$. $\operatorname{rang} A = 2?$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$, sledi $\operatorname{rang} A = 2$

Opomba: $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A^T$, saj je determinanta poljubne kvadratne matrike enaka determinanti transponirane matrike (glej operacije z determinantami)

Opomba: Determinanta je enaka 0, če sta dve vrstici linearno odvisni. Spomnimo se še, da se determinanta ne spremeni, če katerikoli vrstici prištejemo večkratnik katerekoli druge vrstice.

Odtod lahko sklepamo, da velja trditev:
Rang matrike A je enak številu linearno neodvisnih vrstic matrike A, oziroma enak številu linearno neodvisnih stolpcev matrike.

Zaradi omenjenih lastnosti determinante lahko sklepamo še, da se rang matrike ne spremeni, če izvedemo katerokoli od naslednjih elementarnih operacij:

1. Rang se ne spremeni, če zamenjamo dve vrstici (spremeni se le predznak).
2. Pomnožimo katerokoli vrstico z neničelnim številom (zanima nas samo, ali je determinanta $\neq 0$)
3. Prištejemo katerikoli vrstici večkratnik druge vrstice.

Opomba: Enako velja za stolpce

Ker se rang pri elementarnih operacijah ne spremeni in ker velja trditev, rang računamo tako, da začetno matriko z elementarnimi operacijami preoblikujemo do matrike, ki ima pod „diagonalo" ničle, število neničelnih vrstic pa je enako rangu matrike, saj so te vrstice linearno neodvisne.

Primer $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\operatorname{rang} A = ?$

$$\sim \begin{matrix} V_2 - V_1 \\ V_4 - V_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_2 \\ V_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} V_4 + V_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \end{matrix}$$

(linearno neodvisna, kadar ne moremo zapisati s kombinacijo drugih dveh)

Tri linearno neodvisne vrstice, torej rang $A = 3$

SISTEM LINEARNIH ENAČB

Dan je sistem m linearnih enačb za n neznank.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Števila a_{ij} imenujemo koeficienti sistema, $x_1 \dots x_n$ so neznanke

Če velja $b_1 = b_2 = \dots b_m = 0$, je sistem homogen

Sistem m linearnih enačb za n neznank lahko zapišemo v matrični obliki, s pomočjo matrike A, dimenzije $m \times n$, s pomočjo stolpca neznank dimenzije $n \times 1$, in s pomočjo stolpca desne strani B dimenzije $m \times 1$

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$AX = B$ A je matrika koeficientov. Definirajmo še matriko

$$R = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ki jo imenujemo razširjena matrika.
Preden povemo več o obstoju rešitve in številu rešitev, si oglejmo primer.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \; / \frac{1}{a_{12}}$ $\quad x_1, x_2$ neznanki
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \; / \frac{1}{a_{22}}$

Zapišimo sistem z drugačnimi oznakami

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1 + x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} \qquad \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$$

$-k_1x + y = n_1 \longrightarrow y = k_1x + n_1$

$-k_2x + y = n_2 \qquad y = k_2x + n_2$

Kaj se lahko zgodi:

1)  (x,y) 1 rešitev

2)  ni rešitve

3)  Neskončno rešitev

Izrek (osnovni izrek o reševanju sistema linearnih enačb):

Sistem m linearnih enačb z n neznankami $AX = B$ ima rešitev natanko tedaj, ko je rang A = rang R, kjer je R razširjena matrika.

Če obstaja rešitev in je rang A število neznank, potem obstaja natanko ena rešitev.

Če obstaja rešitev in je rang $A <$ št. neznank, potem ima sistem neskončno rešitev, $n -$ rang A parametrov lahko poljubno izberemo, ostali so s temi enolično določeni.

Izrek: Homogen sistem $AX = 0$ ima vedno rešitev $x_1 = x_2 = x_n = 0$, ki jo imenujemo trivialna rešitev.

Homogeni sistem ima netrivialno rešitev (ima še kakšno drugo poleg trivialne, torej neskončno rešitev), če je rangA < št. neznank.

Izrek: Homogen sistem $AX=\vec{0}$, kjer je A kvadratna matrika (enako št. enačb in neznank) ima netrivialno rešitev, če je A singularna matrika (ima netrivialno rešitev, če rang$A<n$, če je torej $\det A=0$)

Kako rešimo sistem linearnih enačb?
Oglejmo si, koj elementarne operacije na matriki koeficientov vplivajo na sistem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots &= b_m \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- zamenjava dveh vrstic: zamenjava dveh enačb v sistemu.
- množenje vrstice z neničelnim številom: množenje enačbe s tem številom
- katerikoli vrstici prištejemo večkratnik katerekoli druge vrstice: eni enačbi prištejemo večkratnik druge.

Elementarne operacije torej ne vplivajo na rešitev sistema, sisteme linearnih enačb zato lahko rešujemo z gaussovo metodo, pri kateri razširjeno matriko z elementarnimi operacijami preoblikujemo do lepe, zgornje trikotne matrike, iz katere je enostavno prebrati rešitev sistema.

Primer.

$$x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 1 = -3x_4$$
$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 = -x_4$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} V_2 - V_1 \\ V_3 - V_1 \\ V_4 + 2V_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] V_4 - V_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right] V_4 + 2V_3 \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & D \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -4 \rightarrow x_2 = -1 \\ x_3 + x_4 = -1 \rightarrow x_3 = 2 \\ \rightarrow 1x_4 = 1 \end{array}$$

$$x_4 = 1$$

Sisteme linearnih enačb zato lahko rešujemo z Gaussovo metodo, pri kateri razširjeno matriko z elementarnimi operacijami preoblikujemo v "lepe" "zgoraj trikotne" matrike, z katere je potem enostavno prebrati rešitev sistema.

Primer:
$$x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 1 = -3x_4$$
$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 = -x_4$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{matrix} \\ v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1 \\ v_4 + 2v_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \\ v_4 - v_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \\ v_4 + 2v_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$1x_4 = 1$$
$$1x_3 + 1x_4 = -1$$
$$x_3 = -2 \quad \ldots$$

Rešitev obstaja, ker je rang matrike koeficientov enak rangu razširjene matrike.

Ker je rang matrike enak številu neznank, je rešitev natanko ena. Dobimo jo tako, da rešimo enačbe od spodaj navzgor.

14.03.2008

Z Gaussovo metodo lahko poiščemo inverzno matriko dani obrnljivi kvadratni matriki na nasledyji način.

Dano imamo matriko A, iščemo njen inverz, ki ga označimo z X.

$$A \cdot X = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$ to je sistem linearnih enačb

Podobno

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$ zopet sistem linearnih enačb

Da dobimo 1. stolpec inverzne matrike, rešimo sistem enačb;

$$\left[A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right],$$

da dobimo 2. stolpec inverzne matrike, rešimo sistem enačb

$$\left[A \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right]$$

da dobimo zadnji stolpec inverzne matrike, rešimo sistem enačb.

$$\left[A \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right]$$

Da dobimo rešitev vseh teh sistemov vedno uporabimo iste elementarne operacije

$$\left[A \;\middle|\; I \right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; A^{-1} \right]$$

Primer $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = ?$

$$[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{v_3 - v_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]_{v_3 + 2v_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \cdot \tfrac{1}{4} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]_{\substack{v_1 + v_3 \\ v_2 - v_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]_{v_1 - 2v_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma

Naj bo A kvadratna kompleksna matrika dimenzije $n \times n$ in naj bo X stolpčna matrika dimenzije $n \times 1$.

Potem izraz

$$\underset{1\times n}{\overline{X}^T} \; \underset{n\times n}{A} \; \underset{n\times 1}{X}$$

imenujemo kvadratna forma matrike A.

Izraz $\overline{X}^T A X$ je matrika dimenzije 1×1, torej je to število.

Primer $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$[\overline{x}_1 \; \overline{x}_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\overline{x}_1 \; \overline{x}_2] \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 \end{bmatrix} = \overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_1 2x_2 + \overline{x}_2 (-x_1)$$

Če je A hermitska, se kvadratna forma imenuje hermitska, če je A poševno hermitska se kvadratna forma imenuje poševno hermitska.

Izrek Za vsak X je vrednost hermitske forme realno število.

Dokaz Radi bi videli, da je $\overline{(\overline{X}^T A X)} = \overline{X}^T A X$, če je A hermitska (torej $\overline{A}^T = A$)

$$\overline{(\overline{X}^T A X)} = \overline{\overline{X}}^T \overline{A}\, \overline{X} = \underbrace{X^T \overline{A}\, \overline{X}}_{\text{št. se ne spremeni, če transponiramo}} = (X^T \overline{A}\, \overline{X})^T = \overline{X}^T \overline{A}^T (X^T)^T =$$

$[a]^T = [a]$

$(BC)^T = B^T C^T$

$$= \overline{X}^T \overline{A}^T X \underset{A \text{ hermitska}}{=} \overline{X}^T A X$$

smo dokazali

Izrek Za vsak X je vrednost poševno hermitske forme čisto (nima realnega dela) imaginarno št.

Dokaz Kompleksno št. nima realnega dela, če velja $z = -\overline{z}$. Želimo dokazati, da je $\overline{\overline{X}^T A X} = -\overline{X}^T A X$, če je A poševno hermitska, torej $\overline{A}^T = -A$

$$\overline{\overline{X}^T A X} = X^T \overline{A}\, \overline{X} \underset{X^T \overline{A}\, \overline{X} \text{ število}}{=} (X^T \overline{A}\, \overline{X})^T = \overline{X}^T \overline{A}^T X \underset{A \text{ poševno hermitska}}{=} -\overline{X}^T A\, A$$

Primer $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \overline{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$

$A = \overline{A}^T$, torej A je hermitska

$$X = \begin{bmatrix} i \\ 42 \end{bmatrix} \qquad \overline{X}^T A X = [-i \;\; 42] \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 42 \end{bmatrix} = [-i \;\; 42] \begin{bmatrix} 2i + 42 + 42i \\ i + 1 + 42 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{1\times 2}{[-i \;\; 42]} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 42 + 44i \\ 43 + i \end{bmatrix}} = -42i + 44 + 42 \cdot 43 \cancel{+ 42i} =$$

$$= 44 + 43 \cdot 42 \in \mathbb{R}$$

18.3.2008

Lastne vrednosti matrik

Naj bo A kvadratna matrika. Če za neh neničelni vektor x velja $AX = \lambda x$ potem λ imenujemo lastna vrednost A, vektor x pa tej lastni vrednosti pripadajoč lastni vektor.

Opomba. Matrika lastnim vektorjem ne spremeni smeri, torej se smer lastnih vektorjev, ko jih preslikamo z matriko, ne spremeni, kvečjemu se spremeni njihova dolžina in to za faktor λ.

Dana naj bo matrika $A \in M_{n \times n}$. Radi bi poiskali vse njene lastne vrednosti in lastne vektorje, ki pripadajo ustreznim lastnim vrednostim. To storimo na naslednji način:

Vemo: če je λ lastna vrednost in x pripadajoči lastni vektor, potem velja $AX = \lambda X$

Torej velja tudi $AX - \lambda X = 0$

~~$(A-\lambda)X = 0$~~ to ne gre, temveč $(A - \lambda I)X = 0$

Dobili smo sistem n enačb za n neznank.

$A - \lambda I \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ Ta sistem ima na desni strani same ničle, torej je homogen.

Homogen sistem ima vedno trivialno rešitev $x_1 = x_2 = x_n = 0$, torej $X = 0$. Toda ta rešitev nas ne zanima, saj $X = 0$ ni lastni vektor. Mi iščemo netrivialno rešitev, torej x, ki je različen od nič.

Homogen sistem ima netrivialno rešitev (več kot eno rešitev), če je $\operatorname{rang}(A - \lambda I) < n$, če je torej $\det(A - \lambda I) = 0$.

Dobili smo enačbo, v kateri nastopa neznano število λ, enačbo rešimo in rešitve enačbe so lastne vrednosti matrike

Ko poznamo lastne vrednosti pri izbrani lastni vrednosti pri λ_i, potem rešimo enačbo $(A - \lambda I)X = 0$, dobimo lastni vektor x, ki pripada tej lastni vrednosti.

Primer: $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \cdot 1 = 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 4 =$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$(\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$

Matrika A ima dve lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$

Izračunajmo še lastne vektorje

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5-1 & 4 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1 = -x_2$$

neskončno rešitev

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} 5-6 & 4 \\ 1 & 2-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = 4x_2 \qquad X = x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primer. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ Poiščimo lastne vrednosti in tiste lastne vektorje, ki pripadajo ~~[illegible]~~ po ABS vrednosti največji lastni vrednosti.

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-2-\lambda & 2 & -3\\ 2 & 1-\lambda & -6\\ -1 & -2 & -\lambda\end{bmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)+2(-6)(-1)+$$

$$+(-3)2(-2)-(-3)(1-\lambda)(-1)-$$

$$-2\cdot 2\cdot(-\lambda)-(-2-\lambda)(-6)(-2)=$$

$$=-\lambda^3-\lambda^2+21\lambda+45 = (\lambda+3)\,*$$

$$*(-\lambda^2+2\lambda+15)=(\lambda+3)(\lambda-5)(\lambda+3)$$

Lastni vektor $\lambda_2=5$

$$\begin{bmatrix}-2-5 & 2 & -3\\ 2 & 1-5 & -6\\ -1 & -2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-7 & 2 & -3 & 0\\ 2 & -4 & -6 & 0\\ -1 & -2 & -5 & 0\end{array}\right] \underset{V_1 \leftrightarrow V_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}-1 & -2 & -5 & 0\\ 2 & -4 & -6 & 0\\ -7 & 2 & -3 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & -8 & -16 & 0\\ 0 & 16 & 32 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$x_2+2x_3=0 \to$ ~~[illegible]~~

$x_1+2x_2+5x_3=0$

$x_1+2(-2x_3)+5x_3=0$

$$X=\begin{bmatrix}-x_3\\ -2x_3\\ x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

Izrek: Naj bo $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$

- Če je A hermitska, so vse njene lastne vrednosti realne.
- Če je A poševno hermitska, so vse njene lastne vrednosti čisto imaginarna števila
- Če je A unitarna matrika, potem so vse njene lastne vrednosti po abs. vrednosti enake 1. (Če λ lastna vrednost unitarne matrike, potem $|\lambda| = 1$)

Dokaz: (1. in 2. točka)

Naj bo λ lastna vrednost in X tej lastni vrednosti pripadajoči lastni vektor. Torej je $AX = \lambda X$

$$\bar{X}^T \cdot AX = \bar{X}^T \lambda X$$

Oglejmo si $\bar{X}^T X = [\bar{x}_1, \ldots] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} =$

$= \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \bar{x}_n x_n =$

$(z\bar{z} = |z|^2)$

$\underbrace{= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}_{\geq 0}$

$\boxed{\text{Abs kompleksnega je vedno realno}}$

Če je ta enaka 0, bi $|x_1|^2 = 0$, $|x_2|^2 = 0$, torej $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, kar pa ne more biti, saj je x lastni vektor, ki je različen od 0.

Sledi: $\lambda = \dfrac{\bar{X}^T A X}{\underbrace{\bar{X}^T X}_{\mathbb{R} > 0}}$

Če A hermitska $(\bar{A}^T = A)$, potem je $\bar{X}^T A X$ kvadratna forma hermitske matrike, ki je po izreku (nazaj) realno število, torej λ realno število, saj kvocient dveh realnih števil.

Če je A poševno hermitska $(\bar{A}^T = -A)$ je $\bar{X}^T A X$ poševno hermitska forma, ki je čisto imaginarno število

Torej λ čisto imaginarno število (kvocient imag in realnega)

3. Matrika A je unitarna, če je $\bar{A}^T A = A\bar{A}^T = I$

Oglejmo si $AX = \lambda X \;|^{-T}$

$\bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$

$\bar{A}^T \bar{X}^T = \bar{\lambda} \bar{X}^T$ Enačbo $AX = \lambda X$ z leve pomnožimo z $\bar{X}^T \bar{A}^T$ oziroma $\bar{\lambda}\bar{X}^T$

$$\left.\begin{matrix} \bar{X}^T \underbrace{\bar{A}^T A}_{I \text{ (ker A unitarna)}} X = \bar{\lambda}\bar{X}^T \lambda X \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} \bar{X}^T I X = \bar{\lambda}\lambda \bar{X}^T X \\ \underbrace{\bar{X}^T X}_{} = |\lambda|^2 \underbrace{\bar{X}^T X}_{\text{realno št} > 0} \end{matrix}$$

lahko krajšamo

$1 = |\lambda|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1$

Primer: $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix} = \bar{A}^T$ hermitska

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - (i)(-i) = \lambda^2 - 2 = 0$$

$\lambda^2 = 2 \quad \lambda_1 = \sqrt{2} \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}$

21. 3. 08

A harmitska in res smo dobili realne lastne vrednosti.

Funkcijske vrste

$f(x) = \dots + \dots + \dots \quad f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$

$g(x) = a \sin x + a \cos x + \dots$

Def: Naj bo $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ števna množica funkcij. Potem definiramo funkcijsko vrsto kot

$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Denimo, naj bo $x_0 \in \mathbb{R}$, potem je $F(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots$ številska vrsta. Če ta številska vrsta konvergira, potem pravimo, da je funkcijska vrsta konvergentna za x_0 oziroma, da je x_0 v definicijskem območju funkcijske vrste. Če številska vrsta divergira, potem pravimo, da je funkcijska vrsta za x_0 divergentna. Množica vseh vrednosti x, za katere je funkcijska vrsta konvergentna, sestavlja def. območje funkcijske vrste.

Primer:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = F(x)$$

$$f_0(x) = 1, \; f_1(x) = x, \; f_2(x) = x^2 \; \dots$$

Iščemo def. območje F.

$F(0) = 1+0+0 \ldots\ldots \quad F(\tfrac{1}{2}) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots = 2$

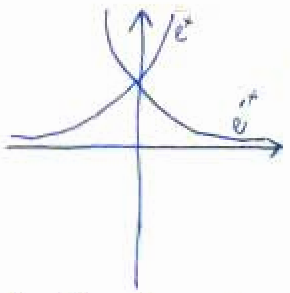
$(1+q+q^2+\ldots+q^n)(1-q) = 1-q^{n+1}$

$1+q+q^2+\ldots+q^n = (1-\underbrace{q^{n+1}}_{\to |q|<1,\, n\to\infty \to 0})/(1-q) \to 1/(1-q)$

Definicijsko območje F je interval $(-1,1)$.

Primer: $e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\ldots = (e^{-x})+(e^{-x})^2+(e^{-x})^3+\ldots = y+y^2+y^3+\ldots \Rightarrow y=e^{-x}$

Ta funk. vrsta konvergira, če $|y|<1$, torej $|e^{-x}|<1$, torej $e^{-x}<1$



Za $x>0$ je $e^{-x}<1$. Torej def območje F je $(0,\infty)$.

Def: Funkcijska vrsta je na intervalu $[a,b]$ enakomerno konvergentna, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja nek n_0, da je $|f_n(x)+f_{n+1}(x)|<\varepsilon$ za $n>n_0$ in za vsak x iz tega intervala $x\in[a,b]$.

Op: Za vsak x iz intervala $[a,b]$ št. vrsta „enako hitro" konvergira.

Izrek: Naj bo funkcijska vrsta $F(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots$ enakomerno konvergentna. Potem lahko funkcijsko vrsto členoma integriramo.

$\int F(x)dx = \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\ldots$

Če je vrsta $f_1'(x)+f_2'(x)\ldots$ enakomerno konvergentna, potem lahko prvotno vrsto členoma

odvajamo, torej $F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots$
Primer:

$$F(x) = 1 + x + x^2 + \dots \quad \text{za } x \in (-1,1) \text{ je } F(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{1-x} dx}_{-\log(1-x)} = \int 1 dx + \int x dx + \dots = x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Izkaže se, da je to res.

Potenčna vrsta

Def: Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike

$$F(x) = a_0 + (x - x_0) a_1 + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Kjer je $x_0 \in \mathbb{R}$ in $a_n \in \mathbb{R}$ in x spremenljivka.

Velikokrat obravnavamo potenčne vrste v posebnem primeru, ko je $x_0 = 0$, torej vrste $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

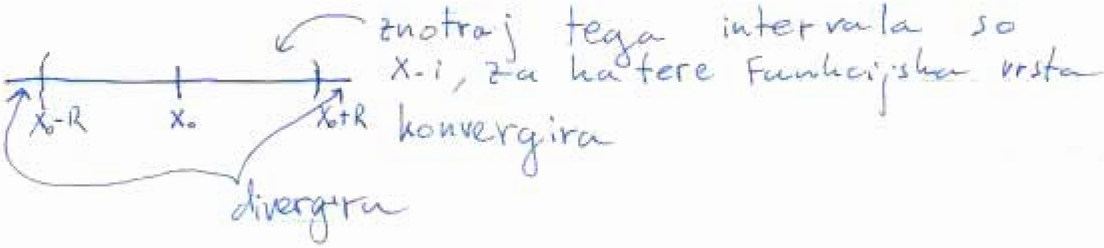
Zanima nas def. območje potenčne vrste, torej za katere x konvergira številska vrsta. To preverimo s kvocientnim kriterijem $\left(q = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \right.$ $= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|$. Konvergira, če $q < 1$, torej $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1$, oziroma

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

v splošnem $(x - x_0)^{n+1}$

Def: Izraz $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$ imenujemo konvergenčni polmer potenčne vrste $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$

Izrek: Naj bo $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$ potenčna vrsta in $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ njen konvergenčni polmer. Potem potenčna vrsta konvergira za vsak $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, divergira za $\forall x \notin [x_0 - R, x_0 + R]$. Na mejah intervala preverimo posebej.



Primer: Vrsta $x - x^2/2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{1}{n}x^n(-1)^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n \cdot (-1)^{n+1}}{1/(n+1)\cdot(-1)^{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

Za $x \in (-1, 1)$ vrsta konvergira

Na meji preverimo posebej:

- $x = -1$: $(-1) + (-1)^2/2 + (-1)^3/3 - (-1)^4/4 + \dots =$
  $= -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right).$
  To je harmonična vrsta, ki divergira
- $x = 1$: $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6$
  To je alternirajoča vrsta, splošni člen gre proti nič, zato po Leibnitzovem

25.3.08

kriterija konvergentna. Sledi: potenčna vrsta konvergira $x \in (-1, 1]$

Primer: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

konvergenčni polmer $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n)!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Ker je konvergenčni polmer $= \infty$, vrsta konvergira za vsak x.

Izrek: Naj bo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in naj bo R konvergenčni polmer vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potem je za $\forall x \in (-R, R)$ funkcija f zvezna. Velja še $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ in $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Vse vrste imajo isti konvergenčni polmer.

Primer: Poiščimo potenčno vrsto za funkcije $\mathrm{arctg}\, x$.

Pomagamo si z dejstvom, da je $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\mathrm{arctg}\, x = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$! \; 1 + x + \dots = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ $\quad |x|<1$, $x^{n+1} \to 0$

$!$
$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1-x) =$
$= 1 + x + \dots + x^n - x - x^2 - x^n - x^{n+1}$
$= 1 - x^{n+1}$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\underbrace{(-x^2)}_{y}} = \frac{1}{1-y} \underset{|y|<1}{=} 1+y+y^2+y^3+\ldots = 1+(-x^2)+(-x^2)^2+\ldots$$

$$= 1-x^2+x^4-x^6+x^8+\ldots$$

potenčno vrsto lahko členoma integriramo

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1-x^2+x^4-x^6+\ldots)\,dx =$$

$$= \int dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \int x^6 dx + \ldots =$$

$$= \underbrace{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots}_{} + C$$

$x=0$ $\quad$ $\operatorname{atg} 0 = 0 \;/\; 0+0+\ldots+C \Rightarrow C=0.$

Torej $\operatorname{atg} x =$

Izračunajmo π

$$\operatorname{atg} 1 = \pi/4 \rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

$$\pi = 4\cdot\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right)$$

4, 2.66, 3.46, 2.89, 3.339 ......

Primer: $x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + \ldots$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Sledi: vrsta konvergira samo za vrednost $x=0$.

TAYLORJEVA VRSTA

Taylor (1685 – 1731)

Funkcijo, ki je dovolj lepa, lahko zapišemo v obliki potenčne vrste, ki se imenuje Taylorjeva vrsta (funkcijo zapišemo kot neskončno vsoto zelo lepih funkcij, to so potence $(x-x_0)^n$).

Naj bo f neskončno krat odvedljiva funkcija, radi bi jo zapisali v obliki potenčne vrste, torej $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$, pri čemer moramo ugotoviti, koliko so vrednosti koeficientov $a_0, a_1 \dots$. Vrednosti so pri različnih funkcijah različne.

Oglejmo si, kako določimo koeficiente potenčne vrste na primeru polinoma
$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$

Razvijmo ta polinom po potencah h, torej pišemo $x = a + h$
$f(a+h) = A_0 + A_1(a) \cdot h + A_2(a) \cdot h^2 + \dots A_n(a) h^n$

Hočemo določiti $A_0, A_1(x_0), \dots A_n(x_0)$

$f'(x_0+h) = A_1(x_0) + 2A_2(x_0)h + \dots + A_n(x_0)nh^{n-1}$

$f''(x_0+h) = 2A_2(x_0) + 6A_3(x_0)h + \dots A_n(x_0)n(n-1)h^{n-2}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x_0+h) = n!\,A_n(x_0)$

V vse te enakosti vstavimo za h vrednost 0 in dobimo

$f(x_0) = A_0 \quad f'(x_0) = A_1(x_0) \quad f''(x_0) = 2A_2(x_0) \dots f^{(n)}(x_0) = n!A_n(x_0)$

Sledi: $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n =$

$0! = 1 \longrightarrow = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Dobili smo Taylorjev polinom.

Primer: $f(x) = 8 - 4x - 2x^2 + x^3$ Razvijmo okrog točke $x_0 = 2$

Torej $f(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3$

$a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!}$ Torej $a_0 = \frac{f(2)}{0!} = \frac{8-4\cdot 2-2\cdot 2^2+2^3}{1} = 0$

$a_1 = \frac{f'(2)}{1!} = \frac{-4\cdot 4\cdot 2+3\cdot 2^2}{1} = 0 \quad a_2 = \frac{f''(2)}{2!} = \frac{-4+6\cdot 2}{2} = 4 \quad a_3 = \frac{f'''(2)}{3!} = 1$

$(f'(x) = -4-4x+3x^2 \quad f''(x) = -4+6x \quad f'''(x) = 6)$

Sledi: $f(x) = 4(x-2)^2 + (x-2)^3$

Izrek: Naj bo f neskončnokrat odvedljiva funkcija na svojem definicijskem območju, potem jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke x_0 (iz notranjosti def. območja).

$$\boxed{f(x)} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

← neskončna

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

Taylorjevo vrsto lahko zapišemo tudi v obliki: $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$, kjer $R_{n+1}(x)$ imenujemo ostanek taylorjeve vrste. Za $R_{n+1}(x)$ velja

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, pri čemer $x_0 < x_0 + \vartheta h < x$, če $x > x_0$, oziroma $x < x_0 + \vartheta h < x_0$, če $x < x_0$

Opomba: Taylorjeva vrsta je potenčna vrsta, torej konvergira na intervalu, določenem s konvergenčnim polmerom.

Opomba: Če T. vrsta konvergira, gre $R_{n+1}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Ostanek vrste je običajno manjši od prvega člena, ki smo ga izpustili (alternirajoče vrste predvsem)

Taylorjeve vrste nekaterih elementarnih funkcij

1. Funkcija $f(x)=e^x$ okrog $x_0=0$ $\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$

$f(x)=e^x \to 1$

$f'(x)=e^x \to f'(0)=1$ $\qquad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$

$f^{(n)}(x)=e^x \to 1$

To so neskončne vrste!!!!

$\boxed{28.3.2008}$

Konvergenca Taylorjeve vrste $R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=$
$=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty \to$ Vrsta e^x konvergira za vsak $x\in\mathbb{R}$

Primer: $e=?$ $\qquad e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$

$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$

Vzemimo npr. štiri člene vrste.

- 1 člen = 1 • 2 člena = 2 • 3 členi = 2,5
- 4. členi = 2.666' • 5 členov = 2,7083 • 6 členov = 2,716

$e=2,71828\dots$

Primer: $\sqrt{e}=e^{1/2}=1+\frac{1/2}{1!}+\frac{(1/2)^2}{2!}+\frac{(1/2)^3}{3!}+\dots$

manj členov za isto natančnost

$e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\frac{8}{3!}$

Napaka je vsota ostalih

$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1{,}625$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{48} = 1{,}6458$ ↗ očitno manjša napaka.

$e^2 = 7{,}38905 \quad e^2 = 1 \quad e^2 = 3 \quad e^2 = 5 \quad e^2 = 6{,}33$ ↗ veliko večja napaka za isto št. členov.

$\boxed{\text{Splošna potenca}}$ ← ?

$f(x) = a^x$ Razvoj okoli $\emptyset$.

$f'(x) = a^x \log a$

$f''(x) = a^x (\log a)^2$

$f^{(n)}(x) = a^x (\log a)^n$

$f(0) = 1 \quad f'(0) = \log a \quad f''(0) = (\log a)^2 \ldots$

$a^x = 1 + \frac{\log a}{1!}x + \frac{(\log a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\log a)^3}{3!}x^3 + \ldots$

$\boxed{\text{Sinus}}$ vedno v radianih

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

Sledi:

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 0$ → vsi sodi odpadejo

$f'''(0) = -1$

$f^{IV}(0) = 0$

prvi člen je $\emptyset$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}(-1)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n}{\frac{1}{(2n+3)!}(-1)^{n+1}}\right] = \infty$$

← konvergenca (samo lihi členi)!

→ konvergira za vsak x

Opomba: funkcija sinus je liha funkcija $(\sin(-x) = -\sin x)$, zato pri njenem razvoju v vrsto nastopajo samo členi z lihimi potencami, saj je x^{2n+1} liha funkcija.

Opomba: Za majhne vrednosti x je $\sin x \approx x$

Primer: $\sin(0{,}1) = 0'0983$
en člen $= 0'1$

$\boxed{\text{Cosinus}}$

$f(x) = \cos x$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ $\quad f^{(4)}(0) = 1$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$$

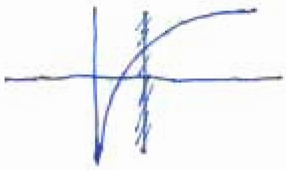
Konvergenca: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = \infty \rightarrow$ vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Opomba: cosinus je soda funkcija, zato nastopajo samo sode potence v razvoju.

Opombe: vrsta hitro konvergira za, majhne x uporablj približek $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$

Primer: $\cos(0,1) = 1 - \frac{(0,1)^2}{2} = 0,9950$

Logaritemska funkcija



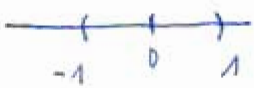
Ker log v točki $x=0$ ni definiran, v taylorjevo vrsto razvijemo $\log(1+x)$.

$$f(x) = \log(1+x) \longrightarrow \quad f(0)=0$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad f'(0)=1$$
$$f''(x) = 1(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)(1-x)^{-3} \qquad f'''(0) = 2!$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Sledi: $\log(1+x) = 1\cdot x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!}{3!}x^3 + \ldots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} =$

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3} \qquad = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Konvergenčni radij:



$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}}{(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

$x=-1$: $-1 - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$

$= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\ldots$ harmonična vrsta, ki divergira

$x=1$: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ alternirajoča vrsta, splošni člen proti 0, torej po Leibnitzovem kriteriju konvergira.

Torej vrsta za $\log(1+x)$ konvergira za $x\in(-1,1]$
Torej lahko vrednost logaritma s pomočjo tega razvoja izračunamo za vrednosti večje od $\emptyset$ in manjše ali enak 2.

Primer: $\log(2)=0{,}6931$ Vzemimo npr. 5 členov.
$\log 2\approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=0{,}783$ – odstopanje je veliko.

Če bi hoteli imeti natančnost na dve decimalki, bi morali vzeti več kot 100 členov.

Binomska vrsta

V Taylorjevo vrsto bi radi razvili funkcijo $f(x)=(1+x)^m$, kjer je $m\in\mathbb{R}$.
Preden se posvetimo razvoju, si oglejmo nekaj lastnosti binomskih koeficientov

Spomnimo se:

$(a+b)^1=a+b$
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Koeficiente dobimo s pomočjo Pascalovega trikotnika

$$\begin{array}{lccccccccc}
0 \rightarrow & & & & & 1 & & & & \\
1 \rightarrow & & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Te koeficiente lahko zapišemo v obliki $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ $\quad m, k \in \mathbb{N}$

m-ta vrstica

k-to mesto

Velja $\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$

Res! $\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!} + \dfrac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!} =$

$$= \frac{m!(k+1) + m!(m-k)}{(k+1)!(m-k)!} = \frac{m!(m+1)}{(k+1)!(m-k)!} = \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m+1-(k+1))!} =$$

$= \binom{m+1}{k+1}$. Res so v trikotniku binomski koeficienti.

Velja: $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$ simetrično

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \frac{m\,(m-1)(m-2)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k : 1\cdot 2\cdot (m-k)} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}$$

1.4.2004

Naj bo m,k element naravnih števil in $\{0\}$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

Binomski simbol definiramo bolj splošno, tudi če m ni naravno število.

Def.: Naj bo $m \in \mathbb{R}$ in $k \in \mathbb{N}$. Potem je

$$\binom{m}{k} = \frac{\overbrace{m(m-1)\cdots(m-k+1)}^{k \text{ členov}}}{k!}$$

Primer:

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{1}{16}$$

$$\binom{-\frac{1}{3}}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$\binom{\frac{5}{4}}{5} = \frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{11}{4}\right)}{5!} = \frac{-3\cdot5\cdot7\cdot11}{4^5\cdot5!}$$

Vrnimo se k razvoju v binomsko vrsto.

Naj bo $m \in \mathbb{R}$. Radi bi razširili v T. vrsto izraz $f(x) = (1+x)^m$

$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \rightarrow f'(0) = m$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \rightarrow f''(0) = m(m-1)$

$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \rightarrow f'''(0) = m(m-1)(m-2)$

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots =$$
$$= 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$$

$$\boxed{\binom{m}{0}=1}$$

Konvergenca vrste

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{m(m-1)(m-n+1)}{n!}}{\frac{m(m-1)\ldots(m-(n+1)+1)}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{m}(\cancel{m-1})\ldots(m-\cancel{n+1})(n+1)!}{\cancel{m}(\cancel{m-1})\underset{\uparrow\,(\cancel{m-n+1})}{\ldots}(m-n)\,n!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+\overbrace{(\tfrac{1}{n})}^{\to 0})}{\cancel{n}(\underbrace{(\tfrac{m}{n})}_{0}-1)} = \underline{\underline{1}}$$

konvergenčni polmer je 1.

$R=1$

$x=-1$ $\quad (1-1)^m = 0$

$(1+\binom{m}{1}(-1)+\binom{m}{2}(-1)^2+\ldots$

Vrsta konvergira za $x\in(-1,1)$. Pri $-1,1$ so težave.

Primer: $$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \overset{m=1/2}{=} 1+\binom{1/2}{1}x+\binom{1/2}{2}x^2+\ldots =$$
$$= 1+1/2\,x+\frac{1/2(-1/2)}{2!}x^2+\frac{1/2(-1/2)\cdot(-3/2)}{3!}x^3 =$$
$$= 1+\tfrac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\ldots$$

$$\sqrt{2/3} = (1-1/3)^{1/2} = 1+1/2(-1/3)-1/8(1/9)+1/16(-1/27) =$$
$$= 0{,}8157$$

0,816496

Primer: $$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = (1-x)^{-1/3} = (1+(-x))^{-1/3} = 1+\binom{-1/3}{1}(-x)+\binom{-1/3}{2}(-x)^2+\ldots$$

$$= 1+\frac{-1/3}{1}(-x)+\frac{(-1/3)(-4/3)}{2}x^2+\frac{(-1/3)(-4/3)(-7/3)}{3\cdot 2}(-x)^3 =$$

$= 1 + 1/3x + 2/9\, x^2 + 14/81\, x^3 + \dots$

Primer: $1+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\dots+\binom{m}{m} =$

$\downarrow$

koliko načinov, da vzamemo 1 izmed m

$m \in \mathbb{N}$

$(1+x)^m = 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\dots$

$(1+1)^m = 1+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\dots+\binom{m}{m}$

2^m

$\binom{m}{m+1} = \frac{m(m-1)\dots 1 \dots 0}{(m+1)!}$

Opomba: Če je $m \in \mathbb{N}$, potem je $\binom{m}{n} = 0$ za vsak $n > m$. Torej je binomska vrsta z $m \in \mathbb{N}$ končna.

Primer: $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

integralski sinus

Razvijmo $Si(x)$ v taylorjevo vrsto. To storimo tako, da najprej razvijemo v vrsto funkcijo $\frac{\sin x}{x}$.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

členoma integriramo

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!}\right) dt = t\Big|_0^x - \frac{t^3}{3\cdot 3!}\Big|_0^x + \frac{t^5}{5\cdot 5!} - \dots =$$

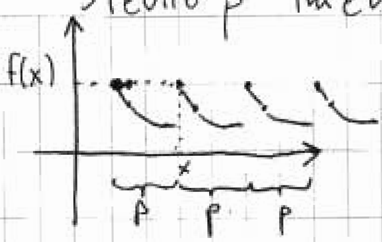
$$= x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!}$$

Fourierjeva vrsta

Pri razvoju v taylorjevo vrsto morajo biti funkcije neskončnokrat odvedljive. Imamo pa tudi funkcije, ki niso niti zvezne, zato jih v Taylorjevo vrsto ne moremo razviti. Če pa so periodične, pa jih kljub temu lahko razvijemo v Fourierjevo vrsto. To pomeni, da bomo dano funkcijo zapisali kot neskončno vsoto sinusov in cosinusov (to ni potenčna vrsta).

Definirajmo najprej nekaj pojmov:

Def: Funkcija f je periodična, če obstaja neko realno število p, tako da je
$f(x+p)=f(x)$ za vsak x iz definicijskega območja.
Število p imenujemo perioda funkcije f.



Velja: • Če je p perioda fje f, potem je za $\forall n \in \mathbb{N}$ število np tudi perioda fje f.

• periodična funkcija s periodo p je natanko določena z vrednostmi na intervalu dolžine p.
Če poznamo samo vrednosti na intervalu dolžine p, potem je funkcija že povsem določena na celotnem def. območju.

- naj bosta $a,b \in \mathbb{R}$ in f,g periodični funkciji z isto periodo p. Potem je $af+bg$ tudi periodična s periodo p, torej:
$(af+bg)(x+p) = af(x+p)+bg(x+p) = af(x)+bg(x)$

Primer periodičnih funkcij:

- $\sin x$ $\quad p=2\pi$
- $\cos x$
- $\sin 2x$ $\quad p=\pi$, potem je 2π tudi perioda
- $\cos 2x$ $\quad 3p=2\pi$ je tudi perioda
- $\sin 3x, \cos 3x$ $\quad p=2\pi/3$ $\quad \ldots \quad$ $\sin nx, \cos nx$ $\quad p=\frac{2\pi}{n} \rightarrow np=2\pi$

Torej je 2π perioda za vse funkcije oblike $\sin nx, \cos nx$. Potem pa je tudi vsota takih funkcij periodična funkcija s periodo 2π. Če ~~je~~ vsota takih funkcij (če imamo neskončno vsoto) in je ta vsota konvergentna, je dobljena vsota periodična funkcija s periodo 2π, vsoto pa imenujemo trigonometrijska vrsta.

Denimo, da je f periodična funkcija s periodo 2π in denimo, da jo lahko zapišemo v obliki trigonometrijske vrste.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots =$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{enakost } *)$$

Radi bi določili vrednost koeficientov $a_0, a_1, a_2, \dots b_1, b_2, \dots$

$\boxed{4.4.2008}$ Da bomo dano funkcijo f razvili v fourierjevo vrsto, moramo določiti še koeficiente te funkcije pri razvoju v fourierjevo vrsto in ugotoviti še kaj je s konvergenco. Izračunajmo koeficiente. V ta namen enakost (*) integriramo na intervalu od $-\pi$ do π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin(nx)dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx = a_0 x\Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 2\pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos(nx)dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ za } \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin(nx)dx = b_n\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ za } \forall n\in\mathbb{N}$$

periodična z 2π

Sledi: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 2\pi$ in od tod $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

Dalje: enakost (*) pomnožimo s $\cos(mx)$ in integriramo na intervalu $-\pi, \pi$. Podobno kot prej:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos(mx)\,dx + \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos(nx)dx\cos(mx) + \int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin(nx)\cos(mx)dx\right)}^{(**)}$$

Računamo $\int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos(mx)dx = a_0\frac{\sin mx}{m}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)\cos(mx)\,dx =$$

$$\left\{ \cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\right) \right.$$

$$\frac{1}{2} a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2} a_n \left(\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \overset{n\neq m}{=} 0$$

$n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)\cos(mx)\,dx \overset{n=m}{=} \frac{1}{2} a_n \left(\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} a_n \cdot 2\pi$$

$$\left\{ \sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\right) \right.$$

~~$b_n \sin(nx)\cos(mx)$~~

Dalje: $\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} b_n \left(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\right) dx =$

$$\overset{n\neq m}{=} \frac{1}{2} b_n \left(\frac{-\cos(n+m)x}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos(n-m)x}{n-m}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \emptyset$$

$= \emptyset$ (periodična z 2π)

$$\overset{n=m}{=} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{2} b_n \left(\underbrace{-\frac{\cos(n+m)x}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi}} + \int_{-\pi}^{\pi} 0\,dx \right) = \emptyset.$$

Sledi: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = a_m \pi$ in od tod $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$

$\mathcal{M}_{a_n}$ Vsi členi vsote so 0, razen tisti člen, ko je $n = m$ in dobimo $a_n \pi$.

$\mathcal{M}_{b_n}$ Vsi členi te vsote so enaki $\emptyset$.

Podobno bi izračunali, da je $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx$

Izrek: Koeficiente $a_0, a_1, \ldots$ in $b_1, b_2 \ldots$ pri razvoju dane funkcije v fourierjevo vrsto $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ izračunamo s pomočjo formul (prej izpeljanih - dokaz)

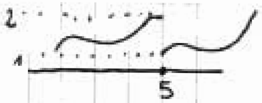
$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ in

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

Povejmo še, kako je s konvergenco fourierjeve vrste.

Izrek: Naj bo f odsekoma zvezna funkcija in naj v vsaki točki obstaja levi in desni odvod funkcije. (odsekoma - končno ali največ šteuno neskončno točk nezveznosti). Če je f ~~[illegible]~~ periodična z 2π, potem njena Fourierjeva vrsta $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ konvergira za vsak x (lahko seštejemo).

Vrednost funkcije f je enaka njeni fourierjevi vrsti za vsak x, kjer je funkcija zvezna. V točkah nezveznosti je vrednost fourierjeve vrste enaka aritmetični sredini leve in desne limite funkcije v točki nezveznosti.

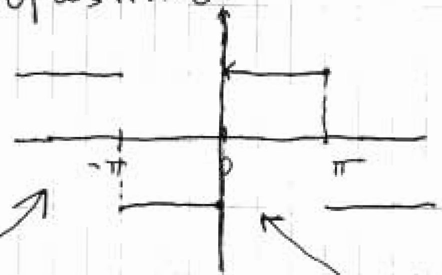
Primer:  $f(5) = 1$

aritm. sredina

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot 5) + b_n \sin(n \cdot 5) = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

V vseh ostalih točkah je leva stran enaka desni (v enačbi). Dokaz opustimo.

Primer: $f(x)$



Napišimo Fourierjevo vrsto za funkcijo, dano z grafom.

$$f(x) = \begin{cases} -1; & x \in (-\pi, 0] \\ 1; & x \in (0, \pi] \end{cases} \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right) =$

$= \frac{1}{2\pi}\left(-x\Big|_{-\pi}^{0} + x\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}(0 - \pi + \pi - 0) = 0$ ← liha

- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos(nx)}_{\text{liha} \cdot \text{soda} = \text{liha}}\,dx = \emptyset$

integral like fje na sim. intervalu = 0

- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin(nx)}_{\text{liha, liha: soda}}\,dx = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\,dx =$

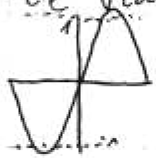
integral sode na simetričnem intervalu.

$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(nx)}{nx}\Big|_{0}^{\pi}\right) = -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)$

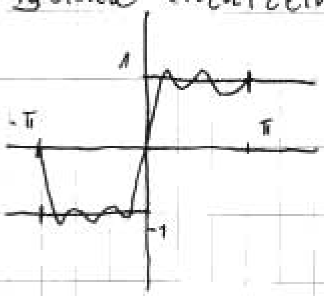
$\boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n}$ **!**

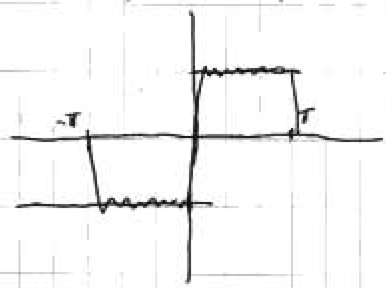
Sledi: $\left.\begin{aligned} b_1 &= -\frac{2}{\pi}\left((-1)^1-1\right) = 4/\pi \\ b_2 &= -\frac{2}{\pi\cdot 2}(1-1) = 0 \\ b_3 &= -\frac{2}{\pi 3}(-2) = 4/\pi 3 \\ b_4 &= 0 \\ b_5 &= 4/5\pi \end{aligned}\right\}$ $f(x) = \frac{4}{\pi}\cdot\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}5x + \ldots$

Slike: • če vzamemo samo en člen vrste



• 2 člena (neničelna) • veliko členov:





Opazimo, da je vrednost fourierjeve vrste v točki Ø vedno 0.

Fourierjeva vrsta je zvezna funkcija.

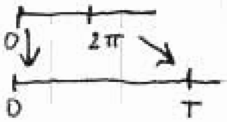
11.4.2008

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \cos nx)$ 

$a_0 = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

Funkcije s poljubno periodo.

Naj bo $f(t)$ periodična fja s periodo T, torej $f(t+T) = f(t)$ za $\forall t \in \mathbb{R}$. Radi bi razvili fjo f v Fourierjevo vrsto. To storimo tako, da uvedemo novo spremenljivko x.



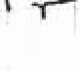
$\rightarrow x = \frac{2\pi}{T} t.$

Potem imajo funkcije $\cos(\frac{2\pi}{T} t)$, $\sin(\frac{2\pi}{T} t)$, $\cos(\frac{2\pi}{T} n \cdot t)$, $\sin(\frac{2\pi}{T} nt)$ periodo T.

Funkcijo f bomo zapisali kot vsoto funkcij ↑.

Torej $f(t) = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n2\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n2\pi}{T} t)$.

Izračunati moramo še koeficiente $a_0, a_n, b_n; n \in \mathbb{N}$

To storimo tako, da v  uvedemo nove spremenljivke $x = \frac{2\pi}{T} t$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \frac{2\pi}{T}\,dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

↑

$$x = \frac{2\pi}{T} t \rightarrow -\pi = \frac{2\pi}{T} t$$

$$dx = \frac{2\pi}{T} dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \frac{n 2\pi}{T} t \; \frac{2\pi}{T} dt =$$
$$= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{n 2\pi}{T} t \, dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2 n \pi}{T} t \, dt$$

Izrek: Naj bo $f(t)$ periodična fja s periodo T, ki je odsekoma zvezna, v vsaki točki naj obstaja levi in desni odvod, potem jo lahko razvijemo v fourierjevo vrsto in v točkah, kjer je $f(t)$ zvezna velja

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n 2\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n 2\pi}{T} t \right),$$ pri čemer so a_0, a_n in b_n enaki (2)

Primer: Imamo sinusno napetost z max vrednostjo E in periodo $2\pi/\omega$. Pošljemo jo skozi usmernik, ki odreže negativno napetost. Zanima nas fourierjevo vrsto.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & : -\pi/\omega \leq t < 0 \\ E \cdot \sin \omega t & : 0 \leq t < \pi/\omega \end{cases}$$

$$\sin \frac{2\pi}{T} t = \sin \frac{2\pi}{2\pi/\omega} t = \sin \omega t$$

$$T = 2\pi/\omega \qquad \frac{1}{T} = \omega / 2\pi \qquad \frac{2}{T} = \frac{\omega}{\pi}$$

$$a_0^{\star} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{\omega}{2\pi}\left(\int_{-\pi/\omega}^{0} \overset{\overset{0}{\parallel}}{f(t)}\,dt + \int_{0}^{\pi/\omega} f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\cdot \sin\omega t\,dt = \frac{E\cdot\omega}{2\pi}\left(-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)\Bigg|_0^{\pi/\omega} =$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left(-\cos\pi + \cos\emptyset\right) = E/\pi$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)dt = \frac{\omega}{T}\left(\int_{-\pi/\omega}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{\pi/\omega} f(t)\,dt\right) =$$

cos nωt

$$= \frac{\omega}{\pi}\Bigg(\int_{-\pi/\omega}^{0} \underbrace{f(t)\cos\frac{n2\pi}{T}\cdot t\,dt}_{\emptyset} + \int_0^{\pi/\omega} \underset{\underset{E\sin\omega t}{\parallel}}{f(t)}\cos\frac{n2\pi}{T}t\,dt\Bigg) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t\cos\frac{n2\pi}{T}t\,dt$$

$$(\star) = \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} \underbrace{\sin(\omega t + n\omega t)}_{\sin(n+1)\omega t} + \underbrace{\sin(\omega t - n\omega t)}_{\sin(1-n)\omega t} =$$

$$\boxed{\sin mx \cos lx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+l)x + \sin(m-l)x\right)}$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)\omega t}{(n+1)\omega t} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega t}\right)\Bigg|_0^{\pi/\omega} \qquad \cos(k\pi) = (-1)^k$$

$n \neq 1$

$n \neq 1$ $$a_n = -\frac{E\omega}{2\pi}\left(+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\omega} + \frac{(-1)^{1-n}}{(1-n)\omega} - \frac{1}{(n+1)\omega} - \frac{1}{(1-n)\omega}\right)$$

$$a_1^{\star} = \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} \sin 2\omega t\,dt = \frac{E\omega}{2\pi}\left(\frac{-\cos 2\omega}{2\omega}\right)\Big|_0^{\pi/\omega} = \frac{E\omega}{2\pi}\left(\frac{1}{2\omega} - \frac{1}{2\omega}\right) = \emptyset$$

$$a_2 = \frac{-E\omega}{2\pi}\left(\frac{-1}{3\omega} + \frac{-1}{-\omega} - \frac{1}{3\omega} - \frac{1}{-\omega}\right) = \frac{2}{3}\frac{E}{\pi}$$

Podobno dobimo $b_1 = \frac{E}{2}$, $b_2 = b_3 = \dots = 0$

Sinusna in kosinusna Fourierjeva vrsta

Spomnimo se: naj bodo $s_1(x), s_2(x)$ soda in $l_1(x)$ liha in $l_2(x)$ liha. funkcija. Potem je
$s_1(x)\cdot s_2(x)$ soda
$l_1(x)\cdot l_2(x)$ soda
$s_1(x)\, l_1(x)$ liha

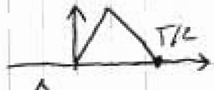
$\int_{-p}^{p} l_1(x)\,dx = 0 \quad \int_{-p}^{p} s_1(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{p} s_1(x)\,dx$

Če je f(x) soda, potem sledi, da so vse funkcije $f(x)\cdot\sin(\frac{n\pi}{T}x)$ lihe in zato $b_n = 0$ za $\forall n$. Sledi
$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n2\pi}{T}t$ in $a_0 = 2/T \int_0^{T/2} f(t)\,dt^{*}$,
$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{T/2} f(t)\cos\frac{n2\pi}{T}t\,dt$.

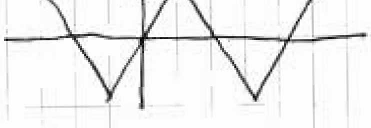
Če je f(t) liha, so $f(t)\cdot\cos\frac{n2\pi}{T}t$ lihe funkcije in zato $a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{n2\pi}{T}t\,dt = 0$. ~~Sledi~~ Tudi $a_0 = 0$.

Sledi: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n}{T}t$, pri čemer
$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \underbrace{f(t)\sin\frac{n2\pi}{T}}_{soda} t\,dt$.

Opomba: Soda funkcija je enaka vsoti samih sodih funkcij (cos), liha pa vsoti samih lihih (sin).

Dalje: Naj bo f funkcija, ki je definirana na končnem intervalu $[0, \frac{T}{2}]$. npr:


Razširimo do sode funkcije

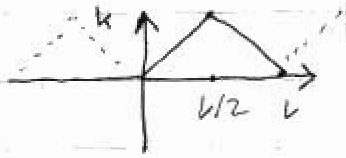
Razširimo do lihe funkcije


Potem lahko to funkcijo razširimo

Do sode periodične funkcije na $\mathbb{R}$, ali pa do lihe periodične funkcije na $\mathbb{R}$. V prvem primeru dobljeno razvijemo v cosinusno, v drugem primeru pa dobljeno liho funkcijo razširimo v sinusno Fourierjevo vrsto.

Opomba: Če imamo dano fjo f na končnem intervalu in jo razširimo v cosinusno Fourierjevo vrsto, to pomeni da smo najprej to funkcijo f razširili do sode periodične funkcije in to potem razvili v Fourierjevo vrsto.

Primer: $f(t) = \begin{cases} (2k/L)t; & 0 < t < L/2 \\ (2k/L)(L-t); & L/2 < t < L \end{cases}$



Razvijmo jo v kosinusno fourierjevo vrsto.

Vemo: $b_n = 0$ $\quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}t$

$T = 2L \rightarrow \frac{n2\pi}{T} = \frac{n\pi}{L}$

$a_0 = \frac{2}{2L} \int_0^L f(t)\,dt = \frac{1}{L}\left(\int_0^{L/2} \frac{2k}{L} t\,dt + \int_{L/2}^{L} \frac{2k}{L}(L-t)\,dt\right) = k/2$

$a_n = \frac{2}{L}\left(\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} t\cos\frac{n\pi}{L}t\,dt + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-t)\cos\frac{n\pi}{L}t\,dt\right)$

$= \frac{nk}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)$

15.4.2008 Fourierjeva vrsta v kompleksni obliki.

$\cos(nx) = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$, $\sin(nx) = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$

$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ Velja izpeljava Matematika III.

Odtod sledi, da lahko f zapišemo v Fourierjevo vrsto tudi na naslednji način

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - i b_n) e^{inx}}$$

Da formula res velja, se prepričamo tako, da v formulo vstavimo $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$, poračunamo in dobimo $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$

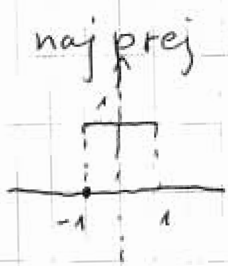
Fourierjev integral

Denimo, da fja f ni periodična, torej je ne moremo razviti v fourierjevo vrsto (ker imamo vsoto sinusov in cosinusov, ki so same periodične funkcije in je zato njihova „vsota" periodična).

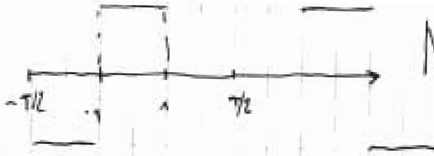
Lahko pa jo razvijemo v t.i. Fourierjev integral.

Kaj storimo, si oglejmo najprej na primeru:

Naj bo $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$



Definirajmo funkcijo $f_T(x)$, ki je periodična s periodo T.



Nato periodo T vedno bolj večamo

Ko periodo povečamo, je periodična funkcija f_T na večjem območju enaka funkciji f. Periodično funkcijo f_T pa lahko razvijemo v Fourierjevo vrsto, torej je f na nekem intervalu T enaka razvoju v Fourierjevo vrsto funkcije f_T. Ko T pošljemo v neskončnost, v limiti dobimo Fourierjev integral:

$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x)\right)d\omega$, pri čemer je
$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\omega v)\,dv$ in $B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\omega v)\,dv$

Funkcije več spremenljivk

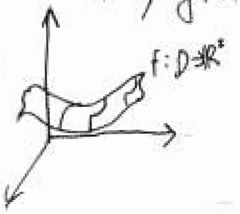
Def.: Funkcija dveh spremenljivk je preslikava f, ki iz nekega območja $D\subset\mathbb{R}^2$ slika v $\mathbb{R}$, torej $f: D\to\mathbb{R}$ $((x,y)\to f(x,y))$.

Primer: Naj bo D neko območje na Zemlji (približno je to del ravnine), funkcija f naj dani točki z neko geografsko širino in dolžino priredi nadmorsko višino.

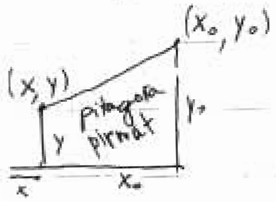
Primer: $f: D\to\mathbb{R}$; D je kvadrat, funkcija vsaki točki kvadrata priredi neko vrednost med 0 in 1.

Ta funkcija je zapis neke črnobele slike (če je vrednost $f(x,y)=0$, je tam slika črna, če je $f(x,y)=1$, je bela, če je vmes, je tam nek odtenek sive barve).

Opomba: Točka na grafu funkcije, ki slika $f: D \to \mathbb{R}^2$ je točka v prostoru $\mathbb{R}^3$, graf funkcije pa je neka ploskev v $\mathbb{R}^3$.



Razdalja točke (x,y) do točke (x_0,y_0) je $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$



f zvezna v x_0, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$, čim je $|x - x_0| < \delta$

Def.: Funkcija $f: D \subseteq \mathbb{R}^2, D \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki (x_0, y_0), če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x_0,y_0) - f(x,y)| < \varepsilon$, čim je $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$

Torej, če smo blizu (x_0,y_0), se funkcijska $f(x,y)$ malo spremeni glede na $f(x_0,y_0)$.

Def.: Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ je enakomerno zvezna, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$, čim je $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta$

Torej je isti ε dober za vsako točko na danem območju.

Def.: Število A je limita funkcije f dveh spremenljivk v točki (x_0, y_0), če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x,y) - A| < \varepsilon$ čim je $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ ((x,y) je blizu (x_0,y_0)). Kot pri funkciji ene spremenljivke.

To zapišemo: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$

Opomba: Na podoben način, kot smo definirali predhodne pojme za funkcijo dveh spremenljivk, definiramo zveznost, enakomerno zveznost, limito tudi za funkcije več spremenljivk. $|f(x_1 \dots x_n) - f(y_1 \dots y_n)| < \varepsilon$

$\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2} < \delta$

Parcialni odvodi funkcije več spremenljivk

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, funkcija dveh spremenljivk. Če eno izmed spremenljivk fiksiramo (npr $y = y_0$), potem je f pri tem y_0 funkcija zgolj ene spremenljivke x. To pa znamo odvajati. Tako dobimo parcialni odvod funkcije f glede na spremenljivko x.

Def:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$$

To je parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x v točki (x,y). Parcialni odvod pišemo tudi $f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

Podobno je $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}}=f_y(x,y)$

Ponovno definiramo parcialne odvode funkcije več spremenljivk

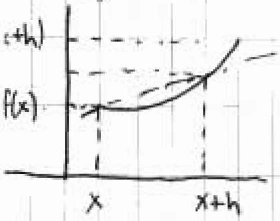
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\dots,x_n)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,x_k+h,x_n)-f(x_1\dots x_n)}{h}}$$

Primer: $f(x,y)=e^{-xy^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{-xy^2}(-y^2)$ $\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{-xy^2}(-2xy)$

Primer: $f(x,y)=\operatorname{tg}\frac{y}{x}$ $\quad\partial f/\partial x=(1/\cos^2\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})$

Poglej odvode (mat I) $\quad\partial f/\partial y=(1/\cos^2\frac{y}{x})\cdot(\frac{1}{x})$



$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)\cdot h$ (diferencial)

Funkcija ene spremenljivke. Podobno definiramo diferencial tudi za funkcije več spremenljivk

18.4.2008

Def: Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, zvezna fja in naj v točki (a,b) obstajata njena parcialna odvoda $f_x(a,b)$ in $f_y(a,b)$. Če obstaja limita
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$
potem pravimo, da je f diferenciabilna v točki (a,b). Izraz $df = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$ imenujemo totalni diferencial funkcije v točki (a,b).

Opomba: Če je f diferenciabilna v (a,b), potem gre izraz $f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k$ hitreje proti $\to 0$, kot $\sqrt{h^2+k^2}$, ko gre $(h,k)\to(0,0)$.

Opomba: Če je f diferenciabilna v (a,b), potem je $f(a+h,b+k) \approx f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k$.

Opomba: Diferencial funkcije pomeni, da funkcijo aproksimiramo z „linearno preslikavo" (ravnina).

Opomba: Tot. diferencial na enak način definiramo tudi za funkcije več spremenljivk
$f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2,\dots x_n)\in\mathbb{R}$
Potem je $df(x_1,\dots x_n) = f_{x_1}dx_1+f_{x_2}dx_2+\dots+f_{x_n}dx_n$

Primer: $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2}$ $\quad f_x = z \cdot \dfrac{-1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x$

$$f_y = z \cdot \frac{-1}{(x^2+y^2)^2} 2y \qquad f_z = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$df = \frac{-2xz\,dx}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2yz\,dy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{dz}{(x^2+y^2)}$$

Primer: Stožec s polmerom $R=5$, višino $v=10$.
R pomanjšamo za 0,2, h poveča za 0,2.
Kako se spremeni prostornina

$h=-0,2 \qquad k=0,2$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot v$$

$$V(R,v)$$

$$V(R+h, v+k) \simeq V(R,v) + V_R(R,v)h + V_v(R,v)k$$

$$V(R+h, v+k) - V(R,v) \approx V_R(R,v)h + V_v(R,v)k = *$$

$$V_R = \frac{1}{3}\pi \cdot 2R \cdot v \qquad V_v = \frac{1}{3}\pi R^2$$

$$* = \frac{1}{3}\pi \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot (-0,2) + \frac{1}{3}\pi\, 25 \cdot 0,2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\, (-20+5) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-15) = \underline{\underline{-5\pi}}$$

Odvajanje posrednih funkcij

Primer za fjo ene spremenljivke:

$f(x) = \cos x \qquad g(x) = x^2$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = \cos x^2$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x$

Do pravila za parcialno odvajanje posrednih funkcij več spremenljivk, bomo prišli v treh korakih

1. Naj bo $z = z(u, v)$, pri čemer $u = u(x)$ in $v = v(x)$. Funkcija z je potem funkcija ene spremenljivke x, torej lahko izračunamo njen odvod po spremenljivki x.

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{z(\underbrace{u(x+h)}_{u+\Delta u}, \underbrace{v(x+h)}_{v+\Delta v}) - z(u(x), v(x))}{h}$$

Označimo $\Delta u = u(x+h) - u(x)$, $\Delta v = v(x+h) - v(x)$ in zapišimo še enkrat formulo za diferencial.

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v) =$$
$$= f_u(u,v)\Delta u + f_v(u,v)\Delta v + \eta\sqrt{h^2+k^2} \quad (*) \leftarrow \frac{f(\ ) - f(\ ) f_u \Delta u\, f_v \Delta v}{\sqrt{h^2+k^2}} \to \eta$$

Velja še:
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta u}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta v}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$$

Izraz $(*)$ delimo s h in h pošljemo proti 0.

Dobimo:
$$\frac{dz}{dx} = \lim_{h \to 0} z_u \frac{\Delta u}{h} + z_v \frac{\Delta v}{h} + \eta \frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{h} =$$
$$\to 0$$

$$= \boxed{z_u u' + z_v v' = \frac{dz}{dx}}$$

2. Naj bo $z=z(u)$ in $u=u(x,y)$. Torej je funkcija z funkcija dveh spremenljivk, torej jo lahko parcialno odvajamo po x in po y.
Odvajajmo jo najprej parcialno po spremenljivki x, torej privzamimo, da je y konstanta. Potem pa znamo funkcijo ene spremenljivke x posredno odvajati:

$z_x = z'(u) \cdot u_x$ Podobno $z_y = z'(u) \cdot u_y$

3. Naj bo $z=z(u,v)$ in $u(x,y)$ ter $v=v(x,y)$.
Funkcija z je funkcija dveh spremenljivk.
Združimo prvi in drugi korak in dobimo:

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$$
$$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y$$

oziroma
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Totalni diferencial je potem
$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$ pri čemer

$du = u_x\,dx + a_y d_y$ in $dv = v_x\,dx + v_y d_y$

22.4.2008

Primer: $z = u^2 \log v$

$u = \frac{x}{y} \qquad v = x \cdot y$

$\frac{\partial z}{\partial x} = ? \qquad z_u = 2u \log v$

$z_v = u^2 \cdot \frac{1}{v}$

$u_x = 1/y$

$v_x = y$

$$z_x = 2u\log v \cdot \frac{1}{y} + u^2 \frac{1}{v} \cdot y = 2\frac{x}{y}\log(xy)\cdot\frac{1}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \frac{1}{xy}\cdot y =$$
$$= 2\frac{x}{y^2}\log(x y) + \frac{x}{y^2}$$

Enako bi dobili, če bi parcialno odvajali po x funkcijo $z = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \log(xy)$

$$z_x = 2\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\cdot\log(xy) + \left(\frac{x}{y}\right)^2\frac{1}{xy}\cdot y = 2\frac{x}{y^2}\log(xy) + \frac{x}{y^2}$$

Višji odvodi

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ parcialno odvedljiva funkcija (obstajata njena parcialna odvoda f_x in f_y). Če sta f_x in f_y parcialno odvedljivi, ju lahko parcialno odvajamo in dobimo parcialne odvode drugega reda.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial(f)}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}$$

zreh: Če sta parcialna odvoda f_x in f_y zvezno parcialno odvedljiva, sta njuna mešana parcialna odvoda enaka ($f_{xy} = f_{yx}$)

~~pomba~~ Večkrat bomo rabili naslednji pojem

ef: Hessejeva matrika drugih parcialnih odvodov funkcije $f(x,y)$ je

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

ali splošneje, če je f funkcija več spremenljivk $x_1 \dots x_n$

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} \dots f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} \dots f_{x_2 x_n} \\ \vdots \\ f_{x_n x_1} \dots f_{x_n x_n} \end{bmatrix}$$

Opomba: Hessejeva matrika je za dvakrat zvezno parcialno odved-ljive funkcije simetrična. (npr.: ~~[illegible]~~ za fjo dveh spremenljivk $f_{xy} = f_{yx}$ in zato $H = H^T$)

Primer: $f(x,y) = \log(xy^2) + xy^2$

$f_x = \frac{1}{xy^2} \cdot y^2 + y^2 \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{xy^2} \cdot x2y + x2y$

$f_{xx}(x,y) = -1/x^2 \qquad f_{xy}(x,y) = 2y$

$f_{yx}(x,y) = 2y \qquad f_{yy}(x,y) = -2/y^2 + 2x$

Taylorjeva vrsta za funkcije dveh spremenljivk

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, neskončnokrat parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk v točki (a,b). Potem lahko funkcijo f okrog točke (a,b) razvijemo v Taylorjevo vrsto:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + (f_x h + f_y k)_{(\text{v točki } a,b)} + \frac{1}{2!}(f_{xx} h^2 + 2 f_{xy} hk + f_{yy} k^2)_{(a,b)}$$
$$+ \frac{1}{3!}(f_{xxx} h^3 + 3 f_{xxy} h^2 k + 3 f_{xyy} h k^2 + f_{yyy} k^3)_{(a,b)} + \ldots$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_x h + f_y k)^{(n)}_{(a,b)}}{n!} \right) + f(a,b)$$, pri čemer

$$(f_x h + f_y k)^{(1)} = f_x h + f_y k \quad \text{in} \quad (f_x h + f_y k)^2 = f_{xx} h^2 + 2 f_{xy} hk + f_{yy} h^2$$

Primer: $f(x,y) = e^x \sin y$ — Izračunajmo taylorjevo vrsto v točki 0.

$f_x(x,y) = e^x \sin y$ $\quad$ $f_y(x,y) = e^x \cos y$

$f_{xx}(x,y) = e^x \sin y$ $\quad$ $f_{xy}(x,y) = e^x \cos y$

$f_{yy}(x,y) = -e^x \sin y$ $\quad$ $f_{xxx}(x,y) = e^x \sin y$

$f_{xxy}(x,y) = e^x \cos y$ $\quad$ $f_{yyx}(x,y) = -e^x \sin y$

$f_{yyy}(x,y) = -e^x \cos y$

$$f(h,k) = e^0 \cdot \sin 0 + (e^0 \sin 0 \cdot h + e^0 \cos 0 \cdot k) + \frac{1}{2!}(e^0 \sin 0 h^2 +$$
$$+ 2 \cdot e^0 \cos 0 hk + (-e^0 \sin 0) h^2) + \frac{1}{3!}(e^0 \sin 0 h^3 +$$
$$+ 3 e^0 \cos 0 h^2 k + 3(-e^0 \sin 0) h k^2 + (-e^0) \cos 0 k^3) + \ldots =$$

43

$= k + \frac{1}{2!} \cdot 2hk + \frac{1}{3!}(3h^2k - k^3) + \ldots$

$$f(0{,}1,\ -0{,}05) = \underbrace{e^{0{,}1} \cdot \sin(-0{,}05)}_{= -0{,}055229} \overset{-0{,}05523}{=} -0{,}05 + 0{,}1(-0{,}05) + \frac{1}{6}\left(3 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}05(-1) - (-0{,}05)^3\right) \ldots$$

Izrek o implicitni funkciji

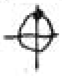
Naj bo $F: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ funkcija dveh spremenljivk, s pomočjo katere implicitno definiramo fjo ene spremenljivke $y = y(x)$, torej enačba $F(x,y) = 0$ naj določa funkcijo ene spremenljivke $y = y(x)$.

Primer: $F(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{atg}\frac{y}{x}$ in
enačba $F(x,y) = 0$, torej
$\log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{atg}\frac{y}{x} = 0$ implicitno določa
fjo $y = y(x)$.
Zanima nas, kdaj enačba $F(x,y) = 0$ sploh določa neko funkcijo $y = y(x)$.
Na to vprašanje nam odgovori naslednji izrek:

Izrek o implicitni funkciji:
Naj ima fja $F: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ naslednje lastnosti:
1. V okolici točke (a,b) je zvezno parcialno odvedljiva
2. $F(a,b) = 0$
3. $F_y(a,b) \neq 0$

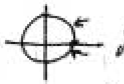
Potem obstaja natanko ena funkcija $y = y(x)$, tako da je $y(a)=b$ in v neki okolici točke $x=a$ velja $F(x, y(x))=0$.

Oglejmo si na primeru, kaj ta izrek pove: $F(x,y)=x^2+y^2-1$. Potem je z enačbo $x^2+y^2-1=0$ pri primernih pogojih dana implicitno funkcija $y=y(x)$.



Naj bo najprej izbrana točka $(0,1)$. Očitno je $F(0,1)=0$. Izračunamo $F_y(x,y)=2y$ $F_y(0,1)=2\neq 0$, pogoji so izpolnjeni, torej po izreku obstaja $y=y(x)$, tako da je $y(0)=1$ in $F(x,y(x))=0$.

$y=\sqrt{1-x^2}$

Vzemimo sedaj točko $(1,0)$. Velja $F(1,0)=1^2+0^2-1=0$, $F_y(1,0)=2\cdot 0=\underline{0}$  dvovrednosti. V tem primeru ne obstaja nobena funkcija $y=y(x)$ tako, da bi bilo $y(1)=0$ in $F(x,y(x))=0$ v neki okolici $x=1$.

Dalje: Denimo, da imamo implicitno podano funkcijo $y=y(x)$ z enačbo $F(x,y)=0$. Radi bi izračunali odvod $y'(x)$ v neki točki $x=a$.
To storimo tako, da izračunamo totalni diferencial funkcije $F(x,y(x))$ in upoštevamo, da je $F(x,y)=0$.
Dobimo $dF(x,y)=0$ oziroma $F_x\cdot dx+F_y\,dy=0$. Sledi

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}=\frac{-F_x}{F_y}}$$

Primer. Fja y je dana implicitno $\log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{atg}\frac{y}{x} = 0$

Kaj se dogaja s funkcijo y v točki $x=1$?

Radi bi vedeli, koliko je $y'(1) = ?$

$y' = -\frac{F_x}{F_y}$

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x - \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$F_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y - \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

$y' = -\left(\frac{x+y}{y-x}\right)$ $\quad y'(1) \rightarrow$ Izračunati moramo še, koliko je y pri danem $x=1$.

Vstavimo v enačbo in dobimo

$\log\sqrt{1^2-y^2} - \operatorname{atg}\frac{y}{1} = 0$

$\log\sqrt{1-y^2} = \operatorname{atg} y$ Za $y=0$ je enačba izpolnjena.

Izračunajmo odvod y' v točki $y(1)=0$. Dobimo

$y'(1) = -\frac{1+0}{0-1} = 1$. Funkcija $y=y(x)$ v točki $y(1)=0$ narašča.

Podobno lahko izpeljemo formulo za parcialne odvode implicitno podane funkcije dveh spremenljivk $z=z(x,y)$, podane z enačbo $F(x,y,z)=0$. Potem je

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

25.4.08

25.04.2008

Ekstrem funkcije dveh spremenljivk

Def. funkcija $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ima v točki (a,b) ekstrem, če velja:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) > 0$$, v tem primeru je ekstrem minimum

ali $$f(a+h, b+k) - f(a,b) < 0$$, v tem primeru je ekstrem maksimum,

za vsak h in k v neki dovolj majhni okolici točke (a,b).

Ekstrem funkcije dveh spremenljivk bomo iskali s pomočjo parcialnih odvodov prvega in drugega reda.

Denimo da ima v točki (a,b) funkcija ekstrem.

Fiksirajmo eno koordinato funkcije f, torej $f = f(x,b)$. Potem je f funkcija samo ene spremenljivke x, in ima kot funkcija ene spremenljivke ekstrem v točki $x = a$.

Torej mora biti odvod te funkcije po spremenljivki x v točki a enak 0. To pomeni

$$f_x(a,b) = 0.$$

Podobno, če fiksiramo še drugo koordinato dobimo $f = f(a,y)$ in od tod izpeljemo, da mora biti tudi

$$f_y(a,b) = 0$$

Pokazali smo, da je potrebni pogoj za nastop ekstrema v točki (a,b), da je

$$f_x(a,b) = 0 \text{ in } f_y(a,b) = 0. \quad *$$

To pomeni, če neka točka ne zadošča temu pogoju, v tej točki ni ekstrema.

Ni pa nujno, da je v točki, ki zadošča pogoju * ekstrem.

Def: Točke, ki zadoščajo pogoju *, imenujemo stacionarne točke. (kandidati za ekstrem).

V katerih stacionarnih točkah je ekstrem in kakšen je ta ekstrem pa ugotavljamo z drugimi parcialnimi odvodi.

Naj bo točka (a,b) stacionarna točka funkcije f. Zapišimo Taylorjevo vrsto funkcije f.

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \tfrac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + \right.$$

Označimo $A=f_{xx}(a,b)$, $B=f_{xy}(a,b)$, $C=f_{yy}(a,b)$ in se spomnimo še, da je (a,b) stacionarna točka, torej je $f_x(a,b)=0$ in $f_y(a,b)=0$.
Sledi:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\xi(h,k)$$

pri majhnih vrednostih h in k veliko manjši od ostalih členov

Sledi, da ima za majhne vrednosti h in k izraz

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)$$

isti predznak kot $Ah^2+2Bhk+Ck^2$. (☆)

Zapišimo (☆) na naslednji način

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2}{A},$$ pri čemer $A\neq 0$.

~~1. Denimo $AC-B^2$~~

1.) Denimo, da je $AC-B^2>0$, potem je števec ulomka pozitiven. Če je $A>0$, je potem ulomek pozitiven in v (a,b) je minimum. Če je $A<0$, je ulomek negativen in v (a,b) je maksimum.

2.) Če je $AC-B^2<0$, dobimo pri različnih vrednostih h in k v števcu enkrat pozitivno in enkrat negativno število. V tem primeru v točki (a,b) ni ekstrema.

3.) Če $AC-B^2=0$ ne vemo.

Preden zapišemo izrek se spomnimo definicije Hessejeve matrike za funkcijo f in oznak $A=f_{xx}(a,b)$, $B=f_{xy}(a,b)$, $C=f_{yy}(a,b)$.

Torej

$$H(x,y)\overset{def}{=}\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{bmatrix}_{(x,y)}$$

oziroma

$$H(a,b)\overset{def}{=}\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{bmatrix}_{(a,b)}\overset{def}{=}\begin{bmatrix} A & B \\ B & C\end{bmatrix}.$$

Potem pa je $\det H(a,b)=\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & C\end{bmatrix}=AC-B^2=f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$

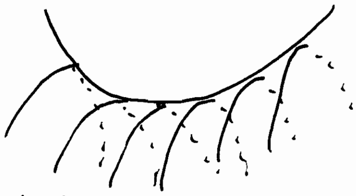
Izrek: Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija.
Naj bo (a,b) stacionarna točka funkcije f, torej $f_x(a,b)=0$ in $f_y(a,b)=0$.

Velja: 1.) Če je $\det H(a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$ in je

a) $f_{xx}(a,b) > 0$, potem je v točki (a,b) minimum

b) $f_{xx}(a,b) < 0$, potem je v točki (a,b) maksimum

2.) Če je $\det H(a,b) = f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 < 0$ potem v točki (a,b) ni ekstrema. V točki (a,b) je sedlo.



3.) Če je $\det H(a,b) = 0$. S pomočjo drugih odvodov ne moremo določiti ali je v točki (a,b) ekstrem ali ne.

Primer $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

Najprej poiščemo stacionarne točke

$$f_x = 3x^2 - 6y - 39$$

$$f_y = 2y - 6x + 18$$

Iščemo (x, y) za katere.

$$3x^2 - 6y - 39 = 0 \Rightarrow x^2 - 2y - 13 = 0$$

$$2y - 6x + 18 = 0 \Rightarrow y - 3x + 9 = 0 \Rightarrow y = 3x - 9$$

$$x^2 - 2 \cdot (3x - 9) - 13 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}}$$

Sledi $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
$y_1 = -6$, $y_2 = 6$

$T_1(1,-6)$ $T_2(5,6)$ - stacionarni točki.

Kaj sta stacionarni točki? Preverimo z determinanto Hessejeve matrike

$f_{xx} = 6x$

$f_{xy} = -6$

$f_{yy} = 2$

① $T_1(1,-6)$

$$\det H = \det\begin{bmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}_{(1,-6)} = \det\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = 12-36 = -24 < 0$$

ni ekstrema.

② $T_2(5,6)$

$$\det H(5,6) = \det\begin{bmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}_{(5,6)} = \det\begin{bmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = 60-36 = 24 > 0$$

V točki T_2 je ekstrem, ker $f_{xx}(5,6) = 6 \cdot 5 = 30 > 0$ je v točki T_2 minimum.

Vezani ekstrem

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Iščemo ekstrem te funkcije pri dodatnem pogoju, da je

$$g(x,y) = 0$$

Pogoj $g(x,y) = 0$ imenujemo tudi vez.

Pogoj $g(x,y) = 0$ določa neko krivuljo v ravnini. Torej iščemo ekstrem funkcije f samo za tiste točke (x,y), ki ležijo na tej krivulji, torej iščemo največjo vrednost funkcije f nad to krivuljo.

Vezani ekstrem funkcije f lahko poiščemo na dva načina:

1.1 Vez $g(x,y) = 0$ nam implicitno določa funkcijo $y = y(x)$. Potem pa je $f(x, y(x))$ funkcija ene spremenljivke katere ekstreme iščemo.

Torej mora veljati $\frac{df}{dx} = 0$

Vemo pa, da je $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cancel{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ (↑)

Dalje, odvod implicitno podane funkcije $y=y(x)$ pa je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

Vstavimo to v enačbo (⇑) in dobimo

$$\frac{\partial f}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\frac{\partial g}{dx}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\right)=0$$

Sledi $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}=0}$

2.) Vezani ekstrem lahko poiščemo tudi z Lagrangevo metodo pri kateri definirano novo funkcijo treh spremenljivk na naslednji način.

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

F imenujemo Lagrangeva funkcija, λ pa Lagrangev multiplikator

Vezani ekstrem potem poiščemo tako, da poiščemo „navadni" ekstrem funkcije F, torej rešimo enačbe.

$$F_x=0$$
$$F_y=0$$
$$F_\lambda=0.$$

Opomba: Z Lagrangevo metodo lahko poiščemo tudi vezani ekstrem funkcije več spremenljivk $f(x_1,\ldots x_n)$. pri več vezeh $g_1(x_1\ldots x_n)=0, \ldots, g_n(x_1\ldots x_n)=0$.

Lagrangova funkcija je v tem primeru $F(x_1\ldots x_n,\lambda_1,\ldots\lambda_m) = f(x_1\ldots x_n)+\lambda_1 g_1(x_1\ldots x_n)+\ldots+\lambda_m g_n(x_1\ldots x_n)$.

$$F_{x_1}=0 \qquad F_{\lambda_1}=0$$
$$F_{x_2}=0 \qquad \vdots$$
$$\vdots$$
$$F_{x_n}=0 \qquad F_{\lambda_m}=0$$

Primer $f(x,y)=xy$

$g(x,y)=0$; $g(x,y)=x+y-1$

1. način

$$f_x g_y - f_y g_x = 0$$

$$\left.\begin{matrix} f_x = y & g_x = 1 \\ f_y = x & g_y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y\cdot 1 - x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = y$$

Upoštevamo še vez in dobimo

$x+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ in $y=\frac{1}{2}$ stacionarna točka $T(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

2. način

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy + \lambda(x+y-1)$$

$F_x = y+\lambda \Rightarrow y = -\lambda$

$F_y = x+\lambda \Rightarrow x = -\lambda$

$F_\lambda = x+y-1$

$-\lambda-\lambda-1=0 \Rightarrow 2\lambda = -1 \quad \lambda = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{matrix} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{matrix}$ stacionarna točka $T(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Navadne diferencialne enačbe

Navadna diferencialna enačba je enačba, v kateri nastopa neznana fja ene spremenljivke in njeni odvodi. Primer: $y' = ky$

Parcialna dif. enačba je enačba, v kateri nastopa neznana fja več spremenljivk in njeni parcialni odvodi. Primer: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Odslej bomo obravnavali zgolj navadne dif. enačbe, parcialne pri mat IV.

Pravimo, da je dif. enačba reda n, če v enačbi nastopa n-ti odvod fje, višji odvodi pa ne nastopajo. Primer: $y' - y^{(4)} = 3xy^{21}$

To je d.e. 4-tega reda.

Splošno lahko zapišemo D.E. n-tega reda v obliki $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$

Primer: $F(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}) = y' - y^{(4)} - 3xy^{21}$

$F(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}) = 0$

Rešitev dif. enačbe je v splošnem več.

Primer: $y' = ky$

$y = e^{kx} \cdot C, \quad y' = k \cdot e^{kx} \cdot C$

C = poljubna konstanta, neskončno rešitev

Če v rešitvi dif. enačbe nastopa poljubna konstanta, potem tako rešitev imenujemo splošna rešitev. Če so dani začetni pogoji (npr. vrednost funkcije v času 0) ali robni pogoji (struna je ves čas vpeta v krajiščih), potem lahko s pomočjo teh pogojev določimo vrednost splošne konstante in dobimo partikularno rešitev.

Opomba: nima vsaka dif. enačba rešitve.

Primer: 2g $_{88}Ra^{220}$

$y(t)$ je količina Ra v času t

$y(0) = 2g$

$y(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)$

D.E.

$\boxed{y'(t) = k\ y(t)}$ $\qquad k = -1{,}4 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}$

Rešitev dif. enačbe je $y(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ Dobili smo splošno rešitev, konstanto c določimo s pomočjo začetnega pogoja. $\underset{2g}{y(0)} = c \cdot e^0 = c \Rightarrow c = 2g$

$\boxed{y(t) = 2 \cdot e^{-1{,}4 \cdot 10^{-11} t}}$ partikularna rešitev

Čez eno leto: $y(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) = 1'9991$

Razpolovna doba: $2e^{-1{,}4 \cdot 10^{-11} t} = 1$

$-1{,}4 \cdot 10^{-11} t = \log \frac{1}{2}$

$t = \log 0{,}5 / (-1{,}4 \cdot 10^{-11})$

$t = 1570$ let

Enačbe prvega reda

1. Enačbe z ločljivimi spremenljivkami

Dif. enačba z ločljivimi spremenljivkami je enačba, ki se da zapisati v obliki $\boxed{g(y)y' = f(x)}$

Rešimo jo tako, da zapišemo $y' = dy/dx$ in dobimo $g(y)dy = f(x)dx$, nato še integriramo

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$

Primer: $9yy' + 4x = 0$

$$9yy' = -4x$$

$$9y\frac{dy}{dx} = -4x \qquad \int 9y\,dy = \int -4x\,dx$$

$$9\frac{y^2}{2} = -4\frac{x^2}{2} + C$$

Sledi: $\frac{9}{2}y^2 + 2x^2 = C$ Rešitev v implicitni obliki

To dif. enačbo rešijo funkcije, katerih graf je del elipse.

Primer: bakrena krogla $100°$, damo v vodo $30°$. Po 3 min ima krogla $70°$. Kdaj bo $31°$?

$f(t)$ meri temperaturo krogle v času t.

$$\boxed{f'(t) = (f(t) - 30)\,k}$$

$f(0) = 100^\circ$

$f(180) = 70^\circ$

$f(t_0) = 31^\circ$

$$\frac{df}{dt} = k(f-30)$$

$$\int df/(f-30) = \int k\,dt$$

$$\log(f-30) = k\cdot t + \boxed{\log C}$$

konstanta zapisana kot log da dobimo lepši rezultat

antilogaritmiramo
$$e^{\log(f-30)} = e^{k\cdot t + \log C}$$

$$f - 30 = e^{kt}\cdot e^{\log C}$$

$$f = 30 + C\cdot e^{kt}$$

Vemo $\underset{100}{\underset{\parallel}{f(0)}} = 30 + C\cdot e^0 = 30 + C \rightarrow C = 70$

$$\underset{70}{\underset{\parallel}{f(180)}} = 30 + C\cdot e^{k\cdot 180} \longrightarrow 40 = 70\,e^{k\cdot 180}$$

$$\frac{4}{7} = e^{k\cdot 180} \qquad k\cdot 180 = \log\frac{4}{7}$$

$$k = -3.1\cdot 10^{-3}$$

$$\underset{31}{\underset{\parallel}{f(t_0)}} = 30 + 70e^{-3{,}1\cdot 10^{-3}\,t_0}$$

$$1 = 70e^{-3{,}1\cdot 10^{-3}\,t_0}$$

$$t_0 = \log(1/70)\,/\,(-3{,}1\cdot 10^{-3}) = 1370, \approx 22\text{ min}$$

Nekatere diferencialne enačbe lahko s substitucijo prevedemo na D.E. z ločljivimi spremenljivkami, taka je npr. homogena D.E prve stopnje, to je D.E. oblike $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Rešimo jo tako, da vpeljemo novo spremenljivko $u = y/x$. Potem je $y = u \cdot x$ in $y' = u'x + u$*. Sledi

$u' \cdot x + u = f(u)$ vstavimo * v

To je DE na ločljivi spremenljivki.

$$\frac{du}{dx} x = f(u) - u$$

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \qquad \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

Ko izračunamo u, vstavimo $y = u \cdot x$

Primer: $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

Ni d.e. z ločljivimi spremenljivkami

Izrazimo y'. Potem je $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} =$

$$= \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y} = \frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{y}{x}}$$

Torej je ta d.e. homogena enačba prve stopnje, torej uvedemo novo spremenljivko

$u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux, \quad x = y/u$

51

$u'x + u = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u}$

$u'x = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u}$

$\frac{du}{dx}x = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$

$\frac{du}{u + 1/u} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$

$\frac{du \cdot u}{1+u^2} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$ $\qquad \int \frac{du\, 2u}{1+u^2} = -\int\frac{dx}{x}$

$v = 1+u^2 \quad dv = 2u\,du$

$\int \frac{dv}{v} = -\log x + \log C$

$\log v = -\log x + \log C$

$v = \frac{1}{x} \cdot C$

$v = \frac{1}{x} C$

$1 + u^2 = \frac{C}{x}$

$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C}{x}$

$1 + \frac{y^2}{x^2} = C/x \qquad \frac{y^2}{x^2} = \frac{C}{x} - 1$

$y^2 = Cx - x^2$

Linearna enačba prvega reda

D.E. Oblike $y' + f(x)y = g(x)$ se imenuje lin dif. enačba prvega reda. Če je $g(x) = 0$ za $\forall x$, dobimo $y' + f(x)y = 0$. To je homogena enačba prvega reda.

Če $g(x)$ ni enak nič za vsak x se $y' + f(x)y = g(x)$ imenuje nehomogena linearna d.e. prvega reda. Linearno de. prvega reda rešimo z metodo variacije konstante. To storimo v dveh korakih:

① Najprej rešimo homogeno D.E. $y' + f(x)y = 0$
Homogena lin. D.E prvega reda je enačba z

9.5.2008

ločljivimi spremenljivkami, ki jo znamo rešiti.

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y$$
$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int f(x)\,dx$$
$$\log y = -\int f(x)\,dx$$
$$\boxed{y = C \cdot \underbrace{e^{-\int f(x)dx}}_{y_h}}$$

Dobili smo rešitev homogene dif. enačbe, ki jo označimo z y_h.

(2) Rešitev nehomogene poiščemo tako, da privzamemo, da C ni konstanta, temveč funkcija x-a, torej $C = C(x)$ in nato fjo $y = C(x)y_h$ vstavimo v nehomogeno enačbo.

Dobimo $(C y_h(x))' + f(x)C(x)y_h(x) = g(x)$
$$C'(x)y_h(x) + C(x)y_h'(x) + f(x)C(x)y_h(x) = g(x)$$
$$C'(x)y_h(x) + C(x)\underbrace{(y_h'(x) + f(x)y_h(x))}_{\substack{\parallel \\ \emptyset\text{, ker } y_h \text{ rešitev homogene dif. enačbe}}} = g(x)$$

Sledi: $C'(x)y_h(x) = g(x)$
$$C'(x) = g(x)/y_h(x)$$
$$C(x) = \int (g(x)/y_h(x))\,dx$$

Dobili smo rešitev nehomogene enačbe, ki je
$$y(x) = C(x)y_h(x) = \int \frac{g(x)}{y_h(x)}dx \; y_h(x)$$

Splošna rešitev lin. dif. en. prvega reda je enaka $y(x) = Cy_h(x) + y_p(x)$, pri čemer je Cy_h splošna rešitev homogene in y_p partikularna rešitev nehomogene. V rešitvi nastopa natanko ena splošna konstanta

Primer: $y' + y\,tg\,x = \cos x$ linearna, I. reda, nehomogena

① $y' + y\,tg\,x = 0$

$\frac{dy}{dx} = -y\,tg\,x$

$\frac{dy}{y} = -tg\,x\,dx \qquad \frac{dy}{y} = -\int tg\,x\,dx$

$\log y = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx \qquad u = \cos x \quad du = -\sin x\,dx$

$= \int \frac{du}{u} = \log u + \log C$

$y_h = C \cdot \cos x$

② nehomogena, rešimo z var. konst

$y = C(x) \cdot \cos x \rightarrow$ vstavimo v nehomogeno

$(C(x)\cos x)' + C(x)\cos x\,tg\,x = \cos x$

$C'(x)\cos x + C(x)(-\sin x) + C(x)\cos x\,tg\,x = \cos x$

$C'(x)\cos x + \cancel{C(x)(-\sin x)} + \cancel{C(x)\sin x} = \cos x$

$C'(x)\cos x = \cos x$

$C'(x) = 1 \qquad C(x) = \int dx \qquad C(x) = x + K$

Splošna rešitev

$y(x) = C(x)\cos x = (x+K)\cos x = x\cos x + \underbrace{K\cos x}$

partikularna rešitev nehomogene

splošna R homogene

Primer: $xy' + y = -4$, $y(1) = 1$

① $xy' + y = 0$

$x \frac{dy}{dx} = -y$

$\frac{x}{dx} = -\frac{y}{dy}$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

konstanta $\quad -\log x = \log x^{-1} = \log \frac{1}{x}$

$\log y = -\log x + \log C$

$e^{\log y} = e^{-\log x + \log C}$

$y = \frac{1}{x} \cdot C$

② $y(x) = \frac{1}{x} C(x)$

$x\left(\frac{C(x)}{x}\right)' + \frac{C(x)}{x} = -4$

$x \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = -4$

$\frac{C'(x)x}{x} - \frac{C(x)}{x} + \frac{C(x)}{x} = -4 \rightarrow C(x) = \int -4\,dx$

$C(x) = -4x + k$

Rešitev nehomogene: $y(x) = (-4x + k) \cdot \frac{1}{x} = -4 + \frac{k}{x}$

Bernoullijeva diferencialna enačba

Nekatere dif. enačbe lahko prevedemo na linearne dif. enačbe.

Def.: D.E. oblike $y'(x) + f(x)\,y(x) = g(x)\,y^n$ imenujemo Bernoullijeva D.E., če $n \neq 1$

Bernullijevo D.E. rešimo tako, da jo najprej delimo z y^n in dobimo $\frac{y'(x)}{y^n(x)} + \frac{f(x)}{y^{n-1}(x)} = g(x)$, nato pa vpeljemo novo spremenljivko $W(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)} = y^{1-n}(x)$

$w'(x) = (1-n)\,y^{-n}(x)\cdot y'(x) = \frac{y'(x)}{y^{n}(x)}(1-n)$ $\boxed{y^{k}(x) = k y^{k-1}(x)\cdot y'(x)}$

Sledi $y'(x)/y^{n}(x) = \frac{1}{1-n} w'(x)$

Torej $\frac{1}{1-n} w'(x) + f(x)\cdot w(x) = g(x)$ (v enačbo ...)

Dobili smo linearno D.E., ki jo znamo rešiti

Primer: $y' + y = x\cdot\sqrt{y} \rightarrow y' + y = x\cdot y^{1/2}$ Bernoullijeva

$$\frac{y'}{y^{1/2}} + \frac{y}{y^{1/2}} = x \qquad \frac{y'}{y^{1/2}} + \frac{1}{y^{-1/2}} = x$$

$$w(x) = \frac{1}{y^{-1/2}(x)} = y^{1/2}(x)$$

$$w'(x) = \frac{1}{2} y^{-1/2}(x)\cdot y'(x) = \frac{1}{2}\frac{y'(x)}{y^{1/2}(x)}$$

$$2w'(x) + w(x) = x$$

1) $w'(x) = -\frac{w(x)}{2} \rightarrow \frac{dw}{dx} = -\frac{w}{2} \rightarrow \frac{dw}{w} = -\frac{dx}{2}$

$$\log w = -\tfrac{1}{2}x + \log C$$

$$w = e^{-1/2x}\cdot C$$

2) nehomogena $w(x) = e^{-1/2x}\cdot C(x)$

vstavimo v nehomogeno

$$2\cdot(e^{-1/2x}C(x))' + e^{-1/2x}C(x) = x$$

$$2(e^{-1/2x}\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot C(x) + e^{-1/2x}\cdot C'(x)) + e^{-1/2x}C(x) = x$$

$$\cancel{-e^{-1/2x}C(x)} + 2e^{-1/2x}C'(x) + \cancel{e^{-1/2x}C(x)} = x$$

$$C'(x) = x\cdot\tfrac{1}{2}e^{1/2x}$$

$$C(x) = \frac{1}{2}\int x e^{\frac{1}{2}x}dx = \frac{1}{2}\left(x\cdot 2e^{\frac{1}{2}x} - \int 2e^{1/2x}dx\right) =$$

$x = u$, $du = dx$

$dv = e^{1/2x}dx$, $v = 2e^{1/2x}$

$$= xe^{1/2x} - 2e^{1/2x} + K$$

$$w(x) = C(x)\cdot e^{-1/2x} = (xe^{1/2x} - 2e^{1/2x} + K)e^{-1/2x} =$$

$$= x - 2 + Ke^{-1/2x}$$

Upoštevamo $w(x) = y^{1/2}(x) = \sqrt{y(x)}$

Torej $y(x) = w(x)^2 = \left(x - 2 + k \cdot e^{-1/2 x}\right)^2$

Eksaktna diferencialna enačba

Ker je $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ lahko v nekaterih primerih dif. enačb, kjer $y'(x)$ nastopa linearno, zapišemo D.E. v obliki $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

Primer: $x^2 y' - y^2 x = 4$

$$x^2 \frac{dy}{dx} - y^2 x - 4 = 0 \qquad \text{množi z } dx$$

$$x^2 dy - (y^2 x + 4)\,dx = 0$$

V tem primeru je $M(x,y) = -(y^2 x + 4)$ in $N(x,y) = x^2$

Def: Dif. enačba oblike $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ je eksaktna, če velja, da je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \; ☾ \; (M, N \text{ zvezno parcialno odvedljivi})$$

Rešitev eksaktne dif. enačbe dobimo v implicitni obliki $F(x,y) = 0$, pri čemer za fjo F velja, da je $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ in $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ (*)

F ~~je~~ pri pogojih (*) res ~~rešitev~~ definira rešitev dif. enačbe, saj je $dF = F_x dx + F_y dy = M dx + N dy = 0$

pogoj ☾ pa pove, da je $F_{xy} = F_{yx}$

$$\partial M/\partial y \leftarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} \rightarrow \partial N/\partial x$$

Primer: $xy' + y + 4 = 0$

$$x\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$

$$x\,dy + (y+4)\,dx = 0$$

Ali je eksaktna? $M(x,y) = y+4$ $\quad N(x,y) = x$

Preverimo $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$

Ker je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$, je dif. enačba eksaktna.

Torej iščemo $F(x,y)$, tako, da je $\frac{\partial F}{\partial x} = y+4 \rightarrow F = \int (y+4)\,dx$

$F(x,y) = (y+4)\cdot x + \underbrace{K(y)}$

Vemo še, da $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, torej $\frac{\partial F}{\partial y} = x + K'(y) = N = x$

Sled: $K'(y) = 0 \Rightarrow K(y) = K_1 \leftarrow$ to pa je konstanta

Funkcija $F(x,y)$ je torej $F(x,y) = (y+4)x + K_1$

Končna rešitev $F(x,y) = 0$ oziroma $(y+4)x + K_1 = 0$

13.5.08

Reševanje DE z vpeljavo parametra

Oglejmo si dva tipa

- V de. ne nastopa spremenljivka y, torej rešujemo d.e. oblike
  $F(x, y') = \emptyset$

a) Če lahko izrazimo $y' = \varphi(x)$, potem je to d.e. z ločljivimi spremenljivkami $\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \Rightarrow dy = \varphi(x)\,dx$.

b) Denimo, da lahko izrazimo $x = \varphi(y')$. Potem vpeljemo parameter $p = y'$! Sledi $x = \varphi(p)$ in $dx = \varphi'(p)\,dp$. ❀
Ker je $\underset{dy/dx}{y'} = p$, je $dy = p\,dx$ in zato po ❀ $dy = p\varphi'(p)\,dp$.

Sledi $\boxed{y=\int p\varphi'(p)\,dp}$ in $\boxed{x=\varphi(p)}$. To pa je parametrični zapis.

Primer: $4(y')^3-2y'+x=0$

Sledi $x=2y'-4(y')^3$. Vpeljemo parameter $y'=p$ in dobimo $\underline{x=2p-4p^3}$.

Velja $dy=p\,dx=p(2-12p^2)\,dp$

$y=\int(2p-12p^3)\,dp=\underline{p^2-3p^4+C}$

• Drugi tip: V DE ne nastopa spremenljivka x, torej DE oblike $f(y,y')=0$.

a) Če lahko izrazimo $y'=\varphi(y)$, dobimo ločljive spremenljivke $\frac{dy}{dx}=\varphi(y)$ in tako $\frac{dy}{\varphi(y)}=dx$.

b) Denimo, da lahko izrazimo y kot funkcijo $y=\varphi(y')$. Vpeljemo novo spremenljivko $y'=p$. Potem je $y=\varphi(p)$ in $dy=\varphi'(p)\,dp$. Ker je $y'=p$, je $dy=p\,dx^{(*)}$ in zato $dx=\frac{dy}{p}^{*}=\frac{\varphi'(p)}{p}\,dp$. Dobimo $\underline{x=\int\frac{\varphi'(p)}{p}\,dp}$ in $\underline{y=\varphi(p)}$

Primer: $y-y'-\sqrt{1+(y')^2}=0$.

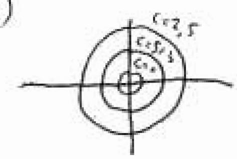
Sledi $y=y'+\sqrt{1+(y')^2}$. Vpeljemo $y'=p$ in dobimo $y=p+\sqrt{1+p^2}$. Potem je

$dy=\left(1+\frac{1\cdot 2p}{2\sqrt{1+p^2}}\right)dp$. $\frac{dy}{dx}=p\Rightarrow dx=\frac{dy}{p}=$
$=\left(\frac{1+1/\sqrt{1+p^2}\,p}{p}\right)dp.$

$$x=\int\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp=\log p+\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+C$$

Družine krivulj, ortogonalne trajektorije

Primer: $x^2+y^2=C^2$ (✿).



Pri različnih vrednostih konstante C dobimo različne krivulje.

Enačba (✿) torej določa družino krivulj.
Ker v splošni rešitvi D.E. nastopa poljubna konstanta, nam splošna rešitev d.e. določa neko družino krivulj.
Lahko pa tudi za dano družino krivulj poiščemo D.E., katere rešitev je dana družina krivulj.

Primer: Naj bo dana družina krivulj $x^2+y^2=C^2$. Iščemo d.e., katere rešitev bo ta družina krivulj. Odvajamo.
$\cancel{2}x+\cancel{2}yy'=0$. Dobimo $y'=-\frac{x}{y}$

Def.: Krivulja, ki je pravokotna na dano družino krivulj, se imenuje ortogonalna trajektorija. Vse ortogonalne trajektorije na dano družino krivulj, se imenujejo družina ortogonalnih trajektorij dane družine.

Kako izračunati ortogonalne trajektorije za dano družino, podano z enačbo $F(x,y,c)=0$.

1) Najprej poiščemo d.e., ki določa dano družino in izrazimo $y'=f(x,y)$

Dve premici sta pravokotni, če ima prva smerni koeficient k, druga pa $-1/k$. Torej mora biti smerni koeficient tangente na ortogonalno trajektorijo $-\frac{1}{f(x,y)}$.

2) Rešiti moramo torej D.E. $y' = -\frac{1}{f(x,y)}$ in rešitev te D.E. bo družina ortogonalnih trajektorij na dano družino $F(x,y)=0$.

Primer: $x^2+y^2=C^2$ dana dolžina. Iščemo ortogonalne trajektorije.

① Poiščemo d.e. za dano dolžino

$y' = -x/y$

② Rešimo d.e. $y' = -\frac{1}{(x/y)} = \frac{y}{x}$.

$dy/dx = y/x \rightarrow dy/y = dx/x$

$\log y = \log x + \log C$. antilogaritmiramo:

$y = C \cdot x \leftarrow$ družina ortogonalnih trajektorij.

Eksistenca in enoličnost rešitve d.e.

Oglejmo si poseben primer d.e. oblike

$y' = f(x,y)$ pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$. (***)

Ta začetni problem (D.E. + začetni pogoj) ima lahko več rešitev, natanko eno rešitev ali pa nima rešitve. $y' = 2\frac{y}{x} \leftarrow$ Primer

splošna rešitev $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$

$\log y = 2\log x + \log C$

$y = Cx^2$

Če je začetni pogoj $y(0)=0$ imamo neskončno rešitev. Če je z.p. $y(1)=1$, sledi $C=1$, imamo natanko eno rešitev. Če je $y(0)=1$, ni rešitve.

Zanima nas, kdaj ima začetni problem (***) rešitev in kdaj je ta rešitev ena sama. Na to nam odgovorita naslednja izreka:

Izrek: Naj bo $f(x,y)$ zvezna in omejena funkcija na pravokotniku $Q=\{(x,y);\ |x-x_0|\leq a,\ |y-y_0|\leq b\}$.

torej $|f(x,y)|<M$.

Potem v okolici točke x_0 obstaja rešitev D.E. $y'=f(x,y)$ pri pogoju $y(x_0)=y_0$

Izrek: Naj bo $f(x,y)$ zvezna, odvedljiva funkcija, za katero velja $|f(x,y)|<M$ in $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|<K$ na pravokotniku Q. Potem obstaja natanko ena rešitev dif. enačbe $y'=f(x,y)$ pri pogoju $y(x_0)=y_0$

Rešitev dobimo iterativno s pomočjo Picardove formule.

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt.$$

Zaporedje $y_1, y_2 \ldots$ konvergira k rešitvi $y(x)$.

Primer: $y' = y$ $\xrightarrow{} f(x,y)=y$, $y(0) = 1$ (x_0, y_0). Rešimo to d.e. s Picardovo formulo:

$y_0 = 1$ $\quad y_1(x) = 1 + \int_0^x f(t,1)\,dt = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + t\Big|_0^x = \underline{1+x}$

$y_2(x) = 1 + \int_0^x f(t, 1+t)\,dt = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x = 1 + x + x^2/2$

$y_3(x) = 1 + \int_0^x f\left(t, 1+t+\frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right)\Big|_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

Dobivamo vedno več členov taylorjeve vrste za fjo e^x, ki je rešitev začetnega problema. Očitno $y_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} y(x) = e^x$

Enačbe višjega reda

Splošna D.E. n-tega reda ima obliko

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

njena splošna rešitev pa je

$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Za določitev teh konstant imamo lahko npr. n-začetnih pogojev. $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1 \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ ← začetni problem

→ n-začetnih pogojev ali naprimer n-robnih pogojev $y(x_1) = y_1 \dots y(x_2) = y_2 \dots y(x_n) = y_n$ ← robni problem

Linearne D.E. višjega reda

Splošna oblika linearne D.E. reda n je

$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + f_1(x)\,y'(x) + f_0(x)\,y(x) = r(x)$

V primeru, ko je $n=2$ imamo linearno D.E. oblike

$y''(x) + f(x)\,y'(x) + g(x)\,y(x) = r(x)$

16.5.2008

Najprej se posvetimo na homogeno linearno d.e. drugega reda (ko $r(x)=\emptyset$)

$$y''(x)+f(x)y'(x)+g(x)y(x)=0 \quad (\ast)$$

Trditev: denimo, da sta fji y_1 in y_2 rešitvi d.e. $\ast$, potem je tudi njuna linearna kombinacija rešitev te enačbe.

Res: Naj bo $y_3=ay_1+by_2$ linearna kombinacija y_1 in y_2. Potem je

$$y_3''+f(x)y_3'+g(x)y_3=$$
$$=(ay_1+by_2)''+f(x)(ay_1+by_2)'+g(x)(ay_1+by_2)=$$
$$=a\underbrace{(y_1''+f(x)y_1'+g(x)y_1)}_{=0,\text{ ker } y_1 \text{ rešitev DE}}+b\underbrace{(y_2''+f(x)y_2'+g(x)y_2)}_{=0,\text{ ker } y_2 \text{ rešitev DE}}$$

Def.: Funkciji $y_1(x)$ in $y_2(x)$ sta linearno odvisni, če obstaja konstanta C, tako da je $y_1(x)=Cy_2(x)$.

Če je $y_1(x)/y_2(x)$ različno od konstante fje, sta $y_1(x)$ in $y_2(x)$ linearno neodvisni.

Primer: $y_1=\sin x\cdot\cos x \quad y_2=\cos x \quad y_3=\sin 2x$

- $y_1(x)/y_2(x)=\sin x \neq \text{konst.}$ y_1 in y_2 lin. neodvisni
- $y_1(x)/y_3(x)=\sin x\cos x/\sin 2x=\sin x\cos x/2\sin x\cos x=1/2$ lin. odvisni.

Izrek: Rešitev $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ je splošna rešitev d.e. $y''(x) + F(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$ natanko tedaj, ko sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi d.e.. (če dobimo splošno rešitev, smo poiskali vse rešitve d.e.). (če hočemo poiskati vse rešitve, moramo torej poiskati dve linearno neodvisni rešitvi in vsaka rešitev se da potem zapisati kot linearna kombinacija teh dveh.

Opomba: za ugotavljanje lin. odvisnosti rešitev homogene linearne d.e. drugega reda si lahko pomagamo z determinanto Wronskega.

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Trditev: Rešitvi y_1 in y_2 lin. d.e. sta linearno neodvisni, natanko tedaj, ko je det. Wronskega $\neq 0$, za vsak x. Če je $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$ v neki točki x_0, potem je $W(y_1(x), y_2(x)) = 0$ za $\forall x$ in $y_1(x)$ ter $y_2(x)$ sta linearno odvisni.

Primer: $y'' + \omega^2 y = 0$

$\left.\begin{array}{l} y_1 = \sin x\omega \\ y_2 = \cos \omega x \end{array}\right\}$ to sta rešitvi
Ali sta lin. neodvisni?

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \\ \omega\cos(\omega x) & -\omega\sin(\omega x) \end{vmatrix} = -\omega\sin^2(\omega x) - \omega\cos^2(\omega x) = -\omega \neq 0$$

In sta linearno neodvisni.

Splošna rešitev je potem $Y(x) = C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x)$.

Opomba: det Wronskega lahko definiramo tudi za d.e. višjega reda, npr. $W(y_1(x), y_2(x), y_3(x)) =$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}^{3\times 3}$$

Linearna dif. enačba drugega reda homogena s konstantnimi koeficienti

Def: Lin. dif. en. 2. reda homogena s konst koef je d.e. oblike $y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Rešitev d.e. iščemo z nastavkom $y(x) = e^{rx}$

Potem je $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2e^{rx}$. in zato

$r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx}$.

$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$ $\quad e^{rx} \neq 0$ za $\forall x$ torej

$r^2 + ar + b = 0$ Dobili smo karakteristično enačbo.

Če bo konstanta r zadoščala karakteristični enačbi, potem bo e^{rx} rešitev DE

Poiščimo rešitev kvadratne enačbe

$r_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b})$ $\quad r_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b})$

Rešitev d.e. je torej e^{r_1x} ali e^{r_2x}.

Kakšna pa sta r_1 in r_2?

Pri reševanju kvadratne enačbe lahko dobimo

- 2 različni realni rešitvi $r_1 \neq r_2$
- 2 različni kompleksni (konjugirani)
- 1 realna rešitev

Poglejmo si vsak primer posebej:

a) $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

Potem $y_1(x) = e^{r_1 x}$ in $y_2(x) = e^{r_2 x}$ lin. neodvisni
$\frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{r_1 x - r_2 x} \neq$ konstante.

Splošna rešitev je $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b) $r_1 = p + iq \neq r_2 = p - iq$

Spomnimo se, da je $e^{iq} = \cos(qx) + i \sin(qx)$. ← Euler

Torej je $C_1 e^{(p+iq)x} + C_2 e^{(p-iq)x} =$

$= e^{px}(C_1 e^{iqx} + C_2 e^{-iqx}) = e^{px}(C_1(\cos(qx) + i\sin(qx)) +$

$+ C_2(\cos(qx) - i\sin(qx)) =$

$= e^{px}(\cos(qx)\underbrace{(C_1 + C_2)}_{D_1} + \sin(qx)\underbrace{i(C_1 - C_2)}_{D_2})$

Dobimo splošno rešitev

$y(x) = e^{px}(D_1 \cos(qx) + D_2 \sin(qx))$

(linearno neodvisni + sta $e^{px}\cos(qx)$ in $e^{px}\sin(qx)$)

c) Imamo eno samo realno rešitev + kv. enačbe in zato samo eno rešitev d.e.

Druga lin. neodvisna rešitev je $y_2(x) = x e^{rx}$

Očitno $y_1(x)$ in $y_2(x)$ linearno neodvisni. Preveriti moramo še, da $y_2(x) = x e^{rx}$ res reši de.

Ker je $y_2'(x) = e^{rx} + x \cdot r e^{rx}$

$y_2''(x) = r e^{rx} + r e^{rx} + x r^2 e^{rx}$

Dobimo $2 r e^{rx} + x r^2 e^{rx} + a(e^{x} + x e^{rx}) + b x e^{rx} =$

$= e^{rx}(2r + x r^2 + a + a x r + b x) =$

$= e^{rx}(x\underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0 \text{ ker } r \text{ rešitev kv. enačbe}} + \underbrace{2r + a}_{=0})$

$=0$, ker je r edina rešitev, je $\sqrt{a^2-4b} = 0$ in $r = -a/2$

$= \emptyset$

Sledi, da je splošna rešitev v tem primeru
$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Primer: $y'' + y' - 2y = 0$

$y = e^{rx}$

$r^2 e^{rx} + r e^{rx} - 2 e^{rx} = 0$

$r^2 + r - 2 = 0$

$(r+2)(r-1) = 0$ Sledi $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

Primer: $y'' + y' + 4y = 0$

$r^2 + r + 4 = 0$

$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 16}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{p} \pm \underbrace{\frac{i\sqrt{15}}{2}}_{q}$

$y(x) = e^{-1/2 x}(C_1 \cos \frac{\sqrt{15}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{15}}{2} x)$

Primer: $y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r_1 - 1)^2 = 0$

$r = 1$ $\rightarrow$ $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$

20.5.08

Eulerjeva diferencialna enačba

Def.: D.E. oblike

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

se imenuje Eulerjeva d.e.

Rešimo jo tako, da jo z vpeljavo nove spremenljivke $x = e^t$ prevedemo na d.e. s konst. koeficienti.

Velja namreč naslednje $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ in $dx = e^t dt$, torej $dt/dx = 1/e^t = e^{-t}$. Sledi $y' = e^{-t}\dot{y}$.

Dalje $y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(-e^{-t}\dot{y} + e^{-t}\ddot{y}\right)e^{-t}$

Dobimo: $x^2y'' + axy' + by = 0$

$$\cancel{e^{2t}}(\cancel{-e^{-2t}}\dot{y} + \cancel{e^{-2t}}\ddot{y}) + a\cancel{e^{t}}(+\cancel{e^{-t}})\dot{y} + by = 0$$

$$\ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0$$

Dobili smo d.e. s konst. koeficienti, katero znamo rešiti. Zapišemo karakteristično enačbo $r^2 + (a-1)r + b = 0$. Ločimo tri primere:

1) dve različni realni rešitvi $r_1 \neq r_2$, potem dobimo $y_1 = e^{r_1 t} = (e^t)^{r_1} = x^{r_1}$

$y_2 = e^{r_2 t} = (e^t)^{r_2} = x^{r_2}$

Splošna rešitev je $y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$

2) Imamo dve različni kompleksni rešitvi

$r_1 = p + iq \qquad r_2 = p - iq$

Potem je $y = e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt)$

$y = (e^t)^p (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt)$

Splošna rešitev je

$y = x^p(C_1\cos(q\log x) + C_2\sin(q\log x))$

3) Imamo eno rešitev r.

Potem $y = C_1 \underbrace{e^{rt}}_{x^r} + C_2 \underbrace{t}_{\log x} e^{rt}$

Splošna rešitev je $y = C_1 x^r + C_2 \log x \, x^r$

Opomba: Do splošne rešitve Eulerjeve d.e., pri kateri ima karakteristična enačba dve različni realni rešitvi, bi prišli tudi z nastavkom $y = x^r$.
V ostalih dveh primerih ta nastavek ni dober.

Primer: $\cancel{2}x^2y'' - \frac{3}{2}xy' - \frac{3}{2}y = 0$ Eulerjeva

Karakt. enačba: $\cancel{2}r^2 + (-\frac{3}{2} - 1)r + (-\frac{3}{2}) = 0$

Do karakteristične enačbe lahko pridemo tudi z nastavkom $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$,
$y'' = r(r-1)x^{r-2}$

$\cancel{x^2} \cdot r(r-1)\cancel{x^{r-2}} - \frac{3}{2}\cancel{x}\, r\cancel{x^{r-1}} - \frac{3}{2}\cancel{x^r} = 0$

$r^2 + (-\frac{3}{2} - 1)r - \frac{3}{2} = 0$

$r^2 - \frac{5}{2}r - \frac{3}{2} = 0$

$2r^2 - 5r - 3 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2(-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4}$

$r_1 = 3$, $r_2 = -\frac{1}{2}$

Splošna rešitev je $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-1/2}$

Primer: $x^2y''-3xy'+4y=0$ eulerjeva

karakt. en.: $r^2+(-3-1)r+4=0$

$r^2-4r+4=0$

$r_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot4}}{2}=2$

$y=C_1x^2+C_2\log x\cdot x^2$

Primer: $x^2y''+7xy'+13y=0$

$r^2+(7-1)r+13=0$

$r^2+6r+13=0$

$r_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot13}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-6\pm i4}{2}$

$r_{1,2}=-3\pm2i$

splošna rešitev $y=x^{-3}(C_1\cos(2\log x)+C_2\sin(2\log x))$

Pri homogenih lin. d.e. višjega reda veljajo podobne lastnosti:

- linearna kombinacija rešitev homogene d.e. je zopet rešitev d.e.
- linearno odvisnost rešitev homogene linearne d.e. lahko preverimo z determinanto Wronskega, npr za red 3 je $W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$
- Pri večkratnih ničlah karakteristične enačbe dobimo linearno neodvisne rešitve tako, da množimo s potencami x^n, npr. e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}

Primer: $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0$

Rešujemo z nastavkom $y = e^{rx}$

$r^5 e^{rx} - 3r^4 e^{rx} + 3r^3 e^{rx} - r^2 e^{rx} = 0$

$r^5 - 3r^4 + 3r^3 - r^2 = 0$

$r^2(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) = 0$

$r^2(r-1)^3 = 0$

$r_{1,2} = 0 \qquad r_{3,4,5} = 1$

$y_1 = e^{0x} = 1, \; y_2 = xe^{0x} = x$

$y_3 = e^x \quad y_4 = xe^x \quad y_5 = x^2 e^x$

Splošna rešitev

$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x + C_5 x^2 e^x$

Nehomogene linearne dif. enačbe

Obravnavali bomo najprej nehomogene linearne d.e. drugega reda.

$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$

Izrek: Naj bo y_h splošna rešitev homogene linearne d.e

$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \quad (\equiv)$

in y_p katerakoli partikularna rešitev nehomogene linearne d.e.

$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$

Potem je $y = y_h + y_p$ splošna rešitev nehomogene linearne d.e.

Torej, da poiščemo splošno rešitev nehomogene de zadošča, da poiščemo eno (katerokoli) rešitev nehomogene d.e. in splošna rešitev

homogene d.e. ~~≡~~.
V nadaljevanju si bomo pogledali dva načina iskanja partikularne rešitve, saj smo si že pogledali, kako v nekaterih primerih poiščemo splošno rešitev homogene.

Iskanje partikularne rešitve:
1. način: metoda nedoločenih koeficientov
to metodo si bomo ogledali pri lin. d.e. s konst koef.

V primeru, da je na desni strani d.e. lepa fja, torej če je $f(x)$ oblike e^{kx}, $\sin kx$, $\cos kx$, polinom ali linearna kombinacija (včasih tudi produkt), potem iščemo partikularno rešitev z nastavkom, v katerem nastopajo omenjene funkcije.

a) če je $r(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, potem je nastavek $y_p(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$
Primer: $y'' + 4y = 8x^2$
- homogena: $y'' + 4y = 0$
$r^2 + 4 = 0 \qquad r_{1,2} = \pm 2i$
$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin x$
- partikularna $y_p = A_1 x^2 + A_2 x + A_3$
vstavimo v d.e. ~~in dobimo~~
$y_p' = 2A_1 x + A_2$, $y_p'' = 2A_1$

$$2A_1 + 4(A_1x^2 + A_2x + A_3) = 8x^2$$

$4A_1 = 8$ (x^2) $\quad 4A_2 = 0$ (pri x^1) $\quad 2A_1 + 4A_3 = 0$ (pri x^0)

$A_1 = 2$ $\quad A_2 = 0$ $\quad A_3 = -1$

Sled: $y_p = 2x^2 - 1$

Splošna rešitev $y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x^2 - 1$

b) Če je npr. $r(x) = \sin(kx)$. Potem je nastavek

$y_p = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx$

Primer: $y'' - y' - 2y = 10\cos x$

- homogena $y'' - y' - 2y = 0 \rightarrow r^2 - r - 2 = 0$

$(r-2)(r+1) = 0$

$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

- nehomogena

$y_p = A_1 \cos x + A_2 \sin x$

$y_p' = -A_1 \sin x + A_2 \cos x$

$y_p'' = -A_1 \cos x - A_2 \sin x$

Vstavimo v nehomogeno in dobimo

$-A_1\cos x - A_2 \sin x - (-A_1 \sin x + A_2 \cos x) - 2(A_1 \sin x + A_2 \cos x) =$

$= 10 \cos x$

$-A_1 - A_2 - 2A_1 = 10 \rightarrow -3A_1 - A_2 = 10$ $\quad -10A_2 = 10 \rightarrow A_2 = -1$

$-A_2 + A_1 - 2A_2 = 0 \rightarrow A_1 - 3A_2 = 0 \rightarrow A_1 = 3A_2$ $\quad A_1 = -3$

Splošna rešitev nehomogene je

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 3\cos x - \sin x$

c) Če npr. $r(x) = e^{kx}$, iščemo rešitev z nastavkom

$y_p = Ae^{kx}$

Opomba: Če je rešitev homogene d.e. linearno odvisna (večkratnih desne strani, iščemo rešitev t nastavkom $y_p = x e^{kx}$

Primer: $y'' - y' - 2y = -e^{-x}$

- homogena $y'' - y' - 2y = 0$

  $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$ (glej primer b)

- nehomogena $y_p = Axe^{-x}$

Potem je $y_p' = A(e^{-x} + xe^{-x}(-1)) = A(e^{-x} - xe^{-x})$

$y_p'' = A(-e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x})$

Vstavimo v nehomogeno d.e. in dobimo

$A(-2e^{-x} + xe^{-x}) - A(e^{-x} - xe^{-x}) - 2Axe^{-x} = -e^{-x}$

e^{-x}: $-2A - A = -1 \rightarrow A = 1/3$

xe^{-x}: $A + A - 2A = 0$

$y_p = \frac{1}{3} x e^{-x}$ Splošna rešitev nehomogene je

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} x e^{-x}$

2. način: Metoda variacije konstante.

Pri tem načinu iščemo partikularno rešitev tudi v bolj splošnih primerih.

Naj bo $y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ splošna rešitev homogene linearne DE $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$

Partikularno rešitev potem iščemo z metodo variacije konstante

$y_p = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

kjer c_1 in c_2 nista več konstanti, temveč Fji spremenljivke x

Odvajamo $y_p' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x)$

Lahko dodamo naslednji pogoj : $\underline{C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0}$

Sledi: $y_p'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)$

in $y_p''(x) = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x)$

Vstavimo v de. in dobimo

$C_1'(x) y'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x) + f(x)(C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)) +$
$+ g(x)(C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)) = r(x)$

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_1(x)\overbrace{(y_1''(x) + f(x) y_1'(x) + g(x) y_1(x))}^{=0,\text{ ker } y_1 \text{ rešitev homogene}} +$$
$$+ C_2(x)\underbrace{(y_2''(x) + f(x) y_2'(x) + g(x) y_2(x))}_{=0,\text{ ker } y_2 \text{ rešitev homogene}} = r(x)$$

Dobili smo torej dva pogoja za neznani fji $C_1(x)$ in $C_2(x)$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ 2)\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = r(x) \end{array}\right\} \text{☼}$$

Poiskati moramo rešitvi $C_1'(x)$ in $C_2'(x)$ sistema enačb ☼. Sistem enačb pa ima rešitev, če je

23.5.08

determinanta sistema $\neq \emptyset$, torej če je
$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq \emptyset$. To je determinanta Wronskega.
To pa vemo, da je različno od nič, saj sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi homogene d.e.

Opomba: Pri linearnih nehomogenih enačbah višjega reda iščemo partikularno rešitev z variacijo konstante, tako, da rešimo sistem

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0$$
$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = r(x)$$

Tudi ta sistem ima rešitev, ker je determinanta Wronskega za fje $y_1 \ldots y_n$ različna od nič.

Primer: $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ nehomogena lin. s konst. koef. II. reda

1. homogena

$y'' + y = 0$ nastavek $y = e^{rx}$

$r^2 + 1 = 0$ $r_{1,2} = \pm i$

$y_1(x) = \cos x$ $y_2(x) = \sin x$

2. nehomogena

Rešimo z variacijo konstante

$y_*(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$

sistem enačb je potem

$C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \qquad /(\cos x)$

$C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = r(x) = \frac{1}{\cos x} \qquad /(-\sin x)$

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\cos^2 x + C_2'(x)\sin x\cos x &= 0 \\ C_1'(x)\sin^2 x + C_2'(x)\cos x(-\sin x) &= -\frac{\sin x}{\cos x}\end{aligned}\right\} +$$

$C_1'(x)(\cancel{\sin^2 x + \cos^2 x}) = -\frac{\sin x}{\cos x}$

$C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \qquad / \int$

$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \quad \left(\begin{matrix}\cos x = t \\ dt = -\sin x\,dx\end{matrix}\right) \quad C_1(x) = \log(\cos x)$

$= \int \frac{dt}{t}$

$C_2(x)$: Vstavimo v ~~[illegible]~~ prvo enačbo in dobimo

$-\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cancel{\cos x} + C_2'(x) \cdot \sin x = 0$

$C_2'(x) = 1 \rightarrow C_2(x) = \int dx = x + K$

Splošna rešitev nehomogene d.e. je

$(\log(\cos x) + K_1)\cos x + (x + K_2)\sin x = y(x)$

Zniževanje reda D.E.

V nekaterih posebnih primerih lahko d.e znižamo red, npr, če v d.e ne nastopa

- spremenljivka x
- odvisna funkcija y
- x in y'

⋮

Oglejmo si zgotj primer

$F(x, y', y'')=0$ Vpeljemo novo spremenljivko $u(x)=y'(x) \to u'(x)=y''(x)$ in dobimo d.e. prvega reda $F(x,u,u')=0$

Primer: $xy'' - y' + \log x = 0$, $y(1)=0$, $y'(1)=2$

$x y'' - y' = -\log x$

Ne nastopa spremenljivka y, torej lahko znižamo red $u(x)=y'(x)$, $u'(x)=y''(x)$

$xu' - u = -\log x$ lin. d.e. 1. reda, nehomogena

① homogena

$xu' - u = 0$

$x\frac{du}{dx} = 0 \to \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \to \log u = \log x + \log C$

$\underline{u = Cx}$

② nehomogena z variacijo konstante

$u = C(x) \cdot x \to u'(x) = C'(x)x + C(x)$

Vstavimo v d.e. in dobimo

$x(C'(x)x + C(x)) - C(x) \cdot x = -\log x$

$x^2 C'(x) + \cancel{xC(x)} - \cancel{C(x)x} = -\log x$

$C'(x) = -\log x / x^2 \quad / \int$

$C(x) = \int -\log x / x^2 \, dx = \begin{pmatrix} t = \log x, x = e^t \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{pmatrix} = -\int \frac{t\,dt}{e^t} = -\int t e^{-t} dt =$

$\begin{pmatrix} u = t & dv = e^{-t} dt \\ du = dt & v = e^{-t} \end{pmatrix} = -\left(t(-e^{-t}) - \int(-e^{-t}) dt\right) = te^{-t} - e^{-t} + K$

$C(x) = \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x} + K$

Splošna rešitev $u(x) = x\left(\frac{\log x}{x} + \frac{1}{x} + K\right) =$

$= \log x + 1 + Kx$

$y'(x) = u(x) \quad / \int$

$y(x) = \int(\log x + 1 + Kx)\, dx = x\log x \cancel{+x} \cancel{-x} + K\frac{x^2}{2} + L$

$\int \log x \, dx = *$
$\log x = w \quad x = v$
$dx = dv \quad \frac{1}{x}dx = dw$
$= x\log x - \int x \frac{1}{x} dx =$
$= x \log x - x$

$\overset{0}{y(1)} = \cancel{-1} + K\frac{1}{2} + L \qquad 0 = \cancel{1}\frac{+3}{2} + L \to L = -1/2$

$\underset{2}{y'(1)} = 0 + 1 + K \to K = 1$

$$\boxed{y(x) = x\log x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}$$

Sistemi diferencialnih enačb

def: Sistem d.e. je sestavljen iz več enačb, v katerih nastopa več neznanih funkcij in odvodi teh funkcij.

def: Sistem d.e. je normalen, če ga lahko zapišemo v obliki:

$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\vdots$
$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kjer $x_1, \ldots x_n$ neznane fje in t neodvisna spremenljivka

primer: S sistemom d.e. lahko opišemo gibanje točke v prostoru, neznane fje $x(t), y(t), z(t)$ predstavljajo koordinate točke v času t.

<u>Izrek</u>: Sistem n-d. enačb prvega reda z n neznanimi funkcijami je ekvivalenten eni d.e. n-tega reda za eno neznano fjo!

Primer: $\dot{x} = 2x + y$

$$\dot{y} = -x \rightarrow x = -\dot{y} \qquad \rightarrow \quad \dot{x} = 2(-\dot{y}) + y$$

$$\dot{x} = -\ddot{y} \qquad -\ddot{y} = 2(-\dot{y}) + y$$

$$\boxed{\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0}$$

$$y = e^{rt}; \qquad \dot{y} = re^{rt} \qquad \ddot{y} = r^2 e^{rt}$$

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow r_{1,2} = 1$$

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

$$x(t) = -\dot{y}(t) = -(C_1 e^t + C_2 e^t + C_2 t \cdot e^t)$$