3. vaja iz Matematike 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

VEKTORJI - NADALJEVANJE

Vektorji v prostoru

19. naloga: Dana so oglišča tristrane piramide $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$ in $D(3,7,2)$. Izračunaj vektor višine skozi oglišče A.

Rezultat: $\vec{v} = \frac{4}{17}(11,10,17)$.

ANALITIČNA GEOMETRIJA

Premica v prostoru

Premica v prostoru je določena s točko in smernim vektorjem.
Enačbo premice lahko zapišemo v več oblikah:

- Vektorska oblika:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r_A} + t \cdot \vec{s}, \\ (x,y,z) &= (a_1,a_2,a_3) + t(s_1,s_2,s_3), \end{aligned}$$

  kjer je $T(x,y,z)$ poljubna točka na premici (odvisna od t), $A(a_1,a_2,a_3)$ je izbrana točka na premici, $\vec{s} = (s_1,s_2,s_3)$ pa smerni vektor premice.

- Parametrična oblika:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot s_1, \\ y &= a_2 + t \cdot s_2, \\ z &= a_3 + t \cdot s_3. \end{aligned}$$

- Kanonična oblika:

$$\frac{x-a_1}{s_1} = \frac{y-a_2}{s_2} = \frac{z-a_3}{s_3}.$$

1. naloga:^{DN} Zapiši enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1,0,-1)$ in je vzporedna vektorju $\vec{e} = (2,1,-5)$. Enačbo premice zapiši v vseh treh oblikah.

Rezultat: $\vec{r} = (1, 0, -1) + t(2, 1, -5)$; $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = -1 - 5t$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-5}$.

2. naloga: Zapiši enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1, 1, 1)$ in je pravokotna na vektorja $\vec{e}_1 = (2, 1, 1)$ in $\vec{e}_2 = (3, 3, 0)$.

Rezultat: $\vec{r} = (1, 1, 1) + t(-1, 1, 1)$; $x = 1 - t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + t$; $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Ravnina v prostoru

Ravnina v prostoru je določena s točko in normalo.
Enačbo ravnine lahko zapišemo v več oblikah:

- Vektorska oblika:

$$\vec{AT} \cdot \vec{n} = 0 \implies (\vec{r} - \vec{r_A}) \cdot \vec{n} = 0,$$
$$((x, y, z) - (a_1, a_2, a_3)) \cdot (a, b, c) = 0,$$

  kjer je $T(x, y, z)$ poljubna točka na ravnini, $A(a_1, a_2, a_3)$ je izbrana točka na ravnini, $\vec{n} = (a, b, c)$ pa normalni vektor, ki je pravokoten na ravnino.

- Implicitna ali splošna oblika:

$$ax + by + cz = d, \quad d = \vec{r_A} \cdot \vec{n}.$$

3. naloga: Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(2, -3, 5)$ in je pravokotna na vektor $\vec{n} = (1, -3, 2)$. To enačbo tudi normiraj!

Rezultat: $x - 3y + 2z = 21$; $\frac{1}{\sqrt{14}}x - \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{2}{\sqrt{14}}z = \frac{21}{\sqrt{14}}$.

4. naloga: Zapiši enačbo ravnine skozi točke $A(0, 0, 0)$, $B(4, -2, 1)$ in $C(2, 4, -3)$.

Rezultat: $x + 7y + 10z = 0$.

5. naloga:^{DN} Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko $M(0, 1, 2)$ in je vzporedna premicama $x = y - 2 = z + 3$ in $x + 1 = y = -z + 2$.

Normala ravnine je vektorski produkt smernih vektorjev obeh premic:

$$\vec{n} = (1, 1, 1) \times (1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 2, 0).$$

Torej

$$-2x + 2y = d, \;\; d = (0, 1, 2) \cdot (-2, 2, 0) = 2.$$

Rezultat: $-x + y = 1$.

6. naloga: Določi kot med ravninama $x - 4y + 8z = 8$ in $x + z = 6$.

Rezultat: $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

7. naloga:^{DN} Določi kot med ravnino $x - z = 5$ in premico $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1}, z = 3$.

Kot med ravnino in premico je $\frac{\pi}{2}$ minus kot med normalo ravnine $\vec{n} = (1, 0, -1)$ in smernim vektorjem premice $\vec{s} = (1, 1, 0)$. To je,

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Pri tem smo kot med normalo ravnine $\vec{n}$ in smernim vektorjem premice $\vec{s}$ izračunali iz pravila $\vec{n} \cdot \vec{s} = |\vec{n}| \cdot |\vec{s}| \cos \varphi$.

Rezultat: $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

8. naloga:^{DN} Določi presečišče ravnin $x + y + z = 3$, $x + 2y + 3z = 6$ in $2x - y + z = 2$.

Presečišče treh nevzporednih ravnin je točka, ki jo dobimo, tako da rešimo sistem treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x + 2y + 3z &= 6, \\ 2x - y + z &= 2. \end{aligned}$$

Dobimo $x = 1, y = 1, z = 1$.

Rezultat: $T(1, 1, 1)$.

9. naloga: Določi presečišče ravnin $x - 3y + 5z = 1$ in $2x + y - z = 2$.

Rezultat: $x = t$, $y = \frac{11}{2} - \frac{11}{2}t$, $z = \frac{7}{2} - \frac{7}{2}t$.

10. naloga: Katera ravnina gre skozi točko $T(1, 2, -1)$ in skozi presečišče ravnin $2x - z = -1$ in $4y + 2z = 2$?

Rezultat: $2x - 4y - 3z + 3 = 0$.

11. naloga: Določi točko, v kateri premica $2x = \frac{3y+3}{5} = 4z - 1$ prebode ravnino $2x + 3y + 4z = 14$.

Rezultat: $T(\frac{8}{7}, \frac{59}{21}, \frac{23}{28})$.

12. naloga: Določi presečišče premic $\vec{r} = (1, 2, 0) + t(1, 1, 1)$ in $\vec{r} = (2, 3, 1) + s(0, 3, -1)$.

Rezultat: $T(2, 3, 1)$.

13. naloga:^{DN} Kolikšen mora biti parameter λ, da se premici $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{\lambda}$ in $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{4}$ sekata? Določi presečišče.

Premici se sekata, če obstaja kakšna rešitev sistema enačb:

$$\begin{array}{rcccc}
x & = & t+1 & = & s+2 \\
y & = & -t+2 & = & 2s+3 \\
z & = & \lambda t+1 & = & 4s+4 \\
\hline
t-s & = & 1 & & \\
-t-2s & = & 1 & & \\
\lambda t-4s & = & 3 & & \\
\hline
s & = & -\frac{2}{3} & & \\
t & = & \frac{1}{3} & &
\end{array}$$

Do te možne rešitve smo prišli s pomočjo prvih dveh enačb. Določimo torej λ, tako da bo zadoščeno tudi tretji enačbi:

$$\lambda = \frac{4s+3}{t} = 1.$$

Presečišče dobimo, če $s = -\frac{2}{3}$ ali $t = \frac{1}{3}$ vstavimo v ustrezno parametrično obliko enačbe premice:

$$T(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}).$$

Rezultat: $\lambda = 1$, $T(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.

Razdalje

a.) Razdalja med točko in ravnino (zapišemo enačbo premice p skozi točko T pravokotno na ravnino, tj. v smeri normale; izračunamo točko P, v kateri premica prebada ravnino; dolžina vektorja $\vec{TP}$ je razdalja točke T in ravnine π):

$T(x_0, y_0, z_0)$, $\pi : ax + by + cz = d$

$$d(T, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

b.) Razdalja med točko in premico (dobimo jo kot višino paralelograma, ki ga oklepata vektorja $\vec{s}$ in $\vec{T_0T}$; izračunamo jo, tako da ploščino paralelograma izrazimo na dva načina – z vektorskim produktom in formulo osnovnica · višina):

T točka, p premica s točko T_0 in smernim vektorjem $\vec{s}$

$$d(T, p) = \frac{|\vec{s} \times \vec{T_0T}|}{|\vec{s}|}$$

c.) Razdalja med vzporednima premicama:

p_1, p_2 dve premici, T_1 točka na premici p_1

$$d(p_1, p_2) = d(T_1, p_2)$$

d.) Razdalja med nevzporednima premicama (dobimo jo kot višino paralelepipeda, ki ga oklepajo smerna vektorja s_1 in s_2 ter vektor $\vec{T_1T_2}$; izračunamo jo, tako da volumen paralelepipeda izrazimo na dva načina – z mešanim produktom in formulo osnovna ploskev $\cdot$ višina):

p_1, p_2 dve premici, T_1 točka na premici p_1, T_2 točka na premici p_2, $\vec{r} = \vec{T_1T_2}$

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r})|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

14. naloga:^{DN} Izračunaj oddaljenost točk $A(0,0,0)$, $B(1,-1,0)$ in $C(3,5,4)$ od ravnine $\pi : 2x + 3y + 4z = -1$.

$$\begin{aligned}
d(A,\pi) &= \frac{|1|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}} \\
d(B,\pi) &= \frac{|2-3+1|}{\sqrt{29}} = 0 \implies \text{točka } B \text{ leži na ravnini } \pi \\
d(C,\pi) &= \frac{|6+15+16+1|}{\sqrt{29}} = \frac{38}{\sqrt{29}}
\end{aligned}$$

Rezultat: $d(A,\pi) = \frac{1}{\sqrt{29}}$, $d(B,\pi) = 0$, $d(C,\pi) = \frac{38}{\sqrt{29}}$.

15. naloga: Dani sta ravnini $\pi_1 : 12x + 9y - 20z = 19$ in $\pi_2 : 16x - 12y + 15z + 9 = 0$. Določi točko, ki leži na osi y in je enako oddaljena od teh dveh ravnin.

Rezultat: $T_1(0, \frac{4}{3}, 0)$, $T_2(0, -\frac{10}{3}, 0)$.

16. naloga: Izračunaj oddaljenost točk $A(0,0,0)$ in $B(2,2,0)$ od premice $p : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}$.

Rezultat: $d(A,p) = \frac{3\sqrt{3}}{5}$, $d(B,p) = 3$.

17. naloga: Izračunaj razdaljo med premicama:

a.) $p_1 : x - 2 = 2y = z + 1$ in $p_2 : x + 1 = 2y = z - 2$,

b.) ^{DN} $p_1 : x = 2y = z$ in $p_2 : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{3}$.

Premici sta nevzporedni, saj imata nevzporedna smerna vektorja $\vec{s}_1 = (1, \frac{1}{2}, 1)$ in $\vec{s}_2 = (2,1,3)$. Razdaljo med premicama zato izračunamo po formuli

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r})|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|},$$

kjer je $\vec{r} = \vec{T_1T_2} = (1,0,-1)$ vektor, ki povezuje točki $T_1(0,0,0)$ in $T_2(1,0,-1)$ na premicah. Izračunajmo mešani produkt v števcu,

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

in vektorski produkt v imenovalcu,

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (\frac{1}{2}, -1, 0).$$

Sledi

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r})|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{\frac{1}{2}}{|(\frac{1}{2}, -1, 0)|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Rezultat: a.) $d(p_1, p_2) = 3\sqrt{2}$, b.) $d(p_1, p_2) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.