4. vaja iz Matematike 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

ANALITIČNA GEOMETRIJA - NADALJEVANJE

Zrcaljenja

a.) Zrcaljenje točke čez premico:
A točka na premici, $\vec{s}$ smerni vektor premice, T dana točka, S projekcija točke T pa premico, T' zrcalna točka

$$\vec{r'} = \vec{r} + \vec{TT'} = \vec{r} + 2\vec{TS} = \vec{r} + 2(\vec{TA} + \vec{AS}) = \vec{r} + 2\left(\frac{\vec{AT}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|^2}\vec{s} - \vec{AT}\right)$$

b.) Zrcaljenje točke čez ravnino:
$\vec{n}$ normala ravnine $\pi : ax + by + cz = d$, $T(x_0, y_0, z_0)$ dana točka, S projekcija točke T na ravnino π, T' zrcalna točka točke T glede na ravnino π

$$\vec{r'} = \vec{r} + \vec{TT'} = \vec{r} + 2\vec{TS} = \vec{r} - 2\left(\tilde{d}(T,\pi)\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)$$

Pri tem je

$$\tilde{d}(T,\pi) = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

torej predznačena razdalja med točko in ravnino, ki je lahko tudi negativna, odvisno od tega, na kateri strani ravnine leži točka T. To je, če ima $\vec{TS}$ enako smer kot normala $\vec{n}$, je $\tilde{d}(T,\pi) \geq 0$, sicer je negativno.

1. naloga: Določi zrcalno točko k točki $T(1,1,1)$ glede na premico, ki je presečišče ravnin $x + y + z = 2$ in $x + y - z = 2$.

Rezultat: $T'(1,1,-1)$.

2. naloga: Poišči simetrično točko k točki $T(4,2,4)$ glede na ravnino $\pi : 2x + y + 2z = 9$. Izračunaj še projekcijo P točke T na ravnino.

Rezultat: $T'(0,0,0)$, $P(2,1,2)$.

3. naloga:^{DN*} Zapiši enačbo premice, ki je simetrična premici $\frac{x-1}{2} = \frac{2y-4}{2} = z$ glede na ravnino $x - 2y + 2z = 7$.

Originalna in njej simetrična premica imata skupno točko, tj. prebodišče z ravnino. Izračunamo jo, tako da koordinate iz parametrične oblike enačbe premice vstavimo v enačbo ravnine:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 2t+1 \\ y & = & t+2 \\ z & = & t \end{array} \implies 2t+1-2(t+2)+2t=7 \implies t=5.$$

Prebodišče je zato $P(11,7,5)$. Za smerni vektor simetrične premice rabimo še eno točko, ki jo lahko dobimo, tako da točko $T(1,2,0)$, ki leži na originalni premici, prezrcalimo čez ravnino:

$$\vec{r'} = \vec{r} - 2\left(\tilde{d}(T,\pi)\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right) = (1,2,0) - 2\left(\tilde{d}(T,\pi)\cdot\frac{(1,-2,2)}{3}\right),$$

kjer je

$$\tilde{d}(T,\pi) = \frac{1-4-7}{3} = -\frac{10}{3}.$$

Torej

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= (1,2,0) - 2\left(-\frac{10}{3}\cdot\frac{(1,-2,2)}{3}\right) = (1,2,0) + \frac{20}{9}\cdot(1,-2,2) = \frac{20}{9}((9,18,0)+(1,-2,2)) \\ &= \frac{40}{9}(5,8,1) \end{aligned}$$

in koordinate prezrcaljene točke so $T'(\frac{200}{9},\frac{320}{9},\frac{40}{9})$. Sedaj lahko zapišemo smerni vektor simetrične premice:

$$\vec{s'} = \vec{PT'} = (\frac{200}{9},\frac{320}{9},\frac{40}{9}) - (11,7,5) = (\frac{101}{9},\frac{257}{9},-\frac{5}{9}) = \frac{1}{9}(101,257,-5).$$

Sledi enačba simetrične premice v vektorski obliki:

$$\vec{r'} = (11,7,5) + t(101,257,-5).$$

Rezultat: $\frac{x-11}{101} = \frac{y-7}{257} = \frac{z-5}{-5}$.

MATRIKE

Matrika dimenzije $m\times n$ je pravokotna tabela $m\cdot n$ števil, ki ima m vrstic in n stolpcev:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m,n}.$$

Operacije na matrikah

- množenje s skalarjem:

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

- se števanje po komponentah (matriki morata biti enakih dimenzij):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

- transponiranje (zamenjava vrstic in stolpcev oz. zrcaljenje čez glavno diagonalo):

$$A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m,n} \quad \Longrightarrow \quad A^T = [a_{ji}]_{j=1,i=1}^{n,m}$$

- konjugiranje (za kompleksne matrike):

$$A^* = \overline{A^T}$$

- množenje matrik (pogoj: št. vrstic druge matrike = št. stolpcev prve matrike):

  $A \cdot B = C$, c_{ij} = skalarni produkt $i-$te vrstice matrike A in $j-$tega stolpca matrike B

- sled kvadratne matrike (vsota diagonalnih elementov):

$$tr(A) = tr \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

4. naloga:[DN] Dana je kompleksna matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -3\mathrm{i} & -4+\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} & 6 & 7 & 2+6\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Zapiši A^T in A^*.

Rezultat: $A^T = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 4 & -2-\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 2 & 6 \\ 4 & -3\mathrm{i} & 7 \\ 5 & -4+\mathrm{i} & 2+6\mathrm{i} \end{bmatrix}$, $A^* = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 4 & -2+\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 2 & 6 \\ 4 & 3\mathrm{i} & 7 \\ 5 & -4-\mathrm{i} & 2-6\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

5. naloga: Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. Izračunaj $4A - B^T$ in $2A^T + 3B$!

Rezultat: $4A - B^T = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 17 & -2 \\ 18 & 2 \end{bmatrix}$, $2A^T + 3B = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 16 \\ 6 & -8 & 22 \end{bmatrix}$.

6. naloga: Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Izračunaj produkta AB in BA!

Rezultat: $AB = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 9 & 22 & 15 & -8 \\ -4 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$.

7. naloga:^{DN} Izračunaj produkta vrstičnega vektorja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ in stolpičnega vektorja $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ko pomnožimo matriki velikosti $\mathbf{1} \times 3$ in $3 \times \mathbf{1}$, dobimo matriko velikosti 1×1, kar je skalar:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 4 + 3 = 6.$$

Podobno, po množenju matrik velikosti $\mathbf{3} \times 1$ in $1 \times \mathbf{3}$, dobimo matriko velikosti 3×3:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rezultat: $A \cdot B = 6$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

8. naloga: Izračunaj $f(A)$, če je $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 7$ in $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $f(A) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

9. naloga: Pravimo, da matriki A in B komutirata, če velja $AB = BA$. Ali lahko določimo parametra a in b, tako da bosta matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} b & a & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{bmatrix}$ komutirali?

Rezultat: Taka parametra a in b ne obstajata.

Obrnljive matrike in inverzi

Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja matrika A^{-1}, tako da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Pri tem je

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

enotska matrika ali identiteta. Če matrika ni obrnljiva, pravimo, da je singularna. Matriko A^{-1} imenujemo inverzna matrika matrike A.

Velja naslednje:

i.) Identiteta je enota za matrično množenje: $A \cdot I = I \cdot A = A$.

ii.) Matrika A je nesingularna natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

iii.) Izračun inverzne matrike (metoda kofaktorjev):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T,$$

kjer je $\tilde{A}$ matrika kofaktorjev $\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ in A_{ij} je poddeterminanta k elementu a_{ij}, ki jo iz $\det A$ dobimo tako, da odstranimo i-to vrstico in j-ti stolpec.

10. naloga: Poišči inverze k danim matrikam:

a.) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Rezultat: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

b.) ^{DN} $B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Rezultat: $B^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

c.) $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

Rezultat: $C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -10 & -56 & 32 \\ 5 & 22 & -13 \\ 4 & 26 & -14 \end{bmatrix}$.

Rang matrike

Rang $r(A)$ matrike $A^{m \times n}$ je enak številu linearno neodvisnih vrstic/stolcev. To je tudi red največje kvadratne podmatrike v pravokotni matriki, ki ima determinanto različno od 0. Velja:

$$r \leq \min\{m, n\}.$$

Rang matrike se ne spremeni, če:

i.) dve vrstici med seboj zamenjamo,

ii.) vrstico pomnožimo s poljubnim neničelnim številom,

iii.) vrstici prištejemo poljubni večkratnik kake druge vrstice.

11. naloga: Določi rang matrik:

a.) ^{DN} $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Najprej delamo ničle pod glavno diagonalo (z operacijami, ki ohranjajo rang matrik). Nadaljujemo, dokler ne dobimo matrike, v kateri imajo vrstice na začetku vsaka drugačno število ničel. Rang take matrike je število vseh vrstic, ki niso sestavljene iz samih ničel.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} 3 \times 2.vr. - 1.vr. \\ 3 \times 3.vr. - 1.vr. \\ \hline 3.vr. - 4 \times 2.vr. \end{array} \\ &\equiv \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \implies r(A) = 3. \end{aligned}$$

Rezultat: $r(A) = 3$, matrika ima poln rang.

b.) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 8 & -6 \\ 3 & -3 & 11 & -2 \end{bmatrix}$

Rezultat: $r(B) = 2$.

c.) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -9 & 13 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rezultat: $r(C) = 4$.