1. vaja iz Matematike 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

DETERMINANTE

Determinanta $\det A$ je število, prirejeno kvadratni shemi A. Determinante velikosti 2×2 in 3×3 računamo takole:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= ad - bc, \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.\end{aligned}$$

Pravila za računanje determinant

1. Determinanta je enaka 0, če:
   a.) so v kakšni vrstici (stolpcu) same 0,
   b.) sta dve vrstici (stolpca) enaki,
   c.) je kakšna vrstica (stolpec) večkratnik neke druge vrstice (stolpca).
2. Če zamenjamo dve sosednji vrstici (stolpca), determinanta spremeni predznak.
3. Determinanta ne spremeni svoje vrednosti, če:
   a.) kakšni vrstici (stolpcu) prištejemo večkratnik kakšne druge vrstice (stolpca),
   b.) kvadratno shemo, kateri je prirejena, transponiramo (zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev oz. zrcalimo čez glavno diagonalo).
4. Iz vrstice (stolpca) lahko izpostavimo skupni faktor:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \cdot a_{i1} & C \cdot a_{i2} & \cdots & C \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. Determinanto lahko zapišemo kot vsoto dveh determinant (glede na vrstico ali stolpec):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. Bločna determinanta (na diagonali ima v splošnem neničelne kvadratne bloke, povsod drugje same 0) je enaka produktu determinant blokov na diagonali.

Determinante običajno računamo z razvojem po izbrani vrstici (stolpcu):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}A_{ij}}_{\text{razvoj po } i\text{-ti vrstici}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}A_{ij}}_{\text{razvoj po } j\text{-tem stolpcu}},$$

kjer je A_{ij} determinanta kvadratne sheme, ki jo dobimo iz sheme A, tako da izbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec, torej vrstico in stolpec, v katerem se nahaja element a_{ij}.

<u>1. naloga:</u> Izračunaj determinante:

a.) $\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$

Rezultat: 1.

b.) $\overset{DN}{} \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 0 & 1+2i \\ 2-i & 1-2i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 0 & 1+2i \\ 2-i & 1-2i & 0 \end{vmatrix} =$

$= 0 + (1+i)(1+2i)(2-i) + (2+i)(1-i)(1-2i) - 0 - 0 - 0 = 2$

Rezultat: 2.

<u>2. naloga:</u> Za katere vrednosti t je determinanta

$$\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix}$$

enaka 0?

Rezultat: $-2, 4$.

3. naloga:^{DN} Za katere vrednosti x je determinanta

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^4 & x^6 \end{vmatrix}$$

enaka 0?

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} &= x^8 + x^5 + x^6 - x^4 - x^8 - x^7 = -x^7 + x^6 + x^5 - x^4 = \\ &= -x^4(x^3 - x^2 - x + 1) = -x^4(x^2(x-1) - (x-1)) = \\ &= -x^4(x-1)(x^2-1) = -x^4(x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Rezultat: $0, 1, -1$.

4. naloga: Izračunaj determinante:

a.) $\begin{vmatrix} 15 & 25 & 40 \\ 1 & 3 & 28 \\ 5 & 2 & 24 \end{vmatrix}$

Rezultat: $2\,620$.

b.) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

Rezultat: $-29\,400\,000$.

5. naloga: Izračunaj determinante:

a.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

Rezultat: 20.

b.) ^{DN}

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} 2.vr. - 2 \times 1.vr. \\ 3.vr. - 1.vr. \\ 4.vr. - 1.vr. \\ 5.vr. - 3 \times 1.vr. \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 & 6 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & -3 \\ 4 & -7 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 8 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{razvoj po 1. stolpcu} \\ 2.vr. - 1.vr. \\ 2.vr. + 3.vr. \\ 4.vr. + 2 \times 3.vr. \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 16 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -2 & 6 \\ 4 & -4 & -3 \\ -19 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 118 \quad \begin{array}{l} 1.vr. - 3 \times 3.vr. \\ \text{razvoj po 1. stolpcu} \end{array}$$

Rezultat: 118.

c.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Rezultat: 2.

d.) ^{DN*}

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} 4.vr. - 3.vr. \\ 3.vr. - 2.vr. \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 2 & 2 & 2 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} 2.vr. - 1.vr. \\ 4.vr. - 3.vr. \\ 3.vr. - 2.vr. \\ \text{enaki vrstici} \end{array}$$

Rezultat: 0.

6. naloga:^{DN*} Naslednjo $n \times n$ determinanto izračunaj z rekurzijo:

$$
\begin{array}{rcl}
D_n & = & \left|\begin{array}{cccccccc}
-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 & -1
\end{array}\right| \quad \begin{array}{l} 2.vr. - 1.vr. \\ 3.vr. - 2.vr. \\ 4.vr. - 3.vr. \\ \vdots \\ n.vr. - (n-1).vr. \end{array} \\
& = & \left|\begin{array}{cccccccc}
-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
2 & -2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 2 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & -2 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 & -2
\end{array}\right| \quad \text{razvoj po zadnjem stolpcu} \\
& = & (-1)^{n+1} \left|\begin{array}{cccccccc}
2 & -2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 2 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & -2 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2
\end{array}\right| - 2D_{n-1} \quad \begin{array}{l} \text{zgornje-} \\ \text{trikotna} \\ \text{determinanta} \\ \text{dimenzije} \\ (n-1) \times (n-1) \end{array} \\
& = & (-1)^{n+1} 2^{n-1} - 2D_{n-1} = (-2)^{n-1} - 2D_{n-1}
\end{array} \qquad (1)
$$

Dobili smo rekurzivno zvezo

$$D_n = (-2)^{n-1} - 2D_{n-1}.$$

Sedaj računamo:

$$
\begin{aligned}
D_n &= (-2)^{n-1} + (-2)D_{n-1} = (-2)^{n-1} + (-2)((-2)^{n-2} + (-2)D_{n-2}) = \\
&= 2(-2)^{n-1} + (-2)^2 D_{n-2} = 2(-2)^{n-1} + (-2)^2((-2)^{n-3} + (-2)D_{n-3}) = \\
&= 3(-2)^{n-1} + (-2)^3 D_{n-3} = \cdots = (n-1)(-2)^{n-1} + (-2)^{n-1} D_1 = \\
&= (n-1)(-2)^{n-1} + (-2)^{n-1}(-1) = (n-1)(-2)^{n-1} - (-2)^{n-1} = \\
&= (n-2)(-2)^{n-1}
\end{aligned}
$$

Rezultat: $D_n = (n-2)(-2)^{n-1}$.

Kramerjevo pravilo za reševanje sistemov linearnih enačb

Vzemimo sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Če je determinanta sistema

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

so rešitve sistema ($j = 1, 2, \ldots, n$) enake

$$x_j = \frac{D_j}{D},$$

kjer je D_j determinanta, ki jo dobimo, tako da j-ti stolpec v D zamenjamo z vektorjem $b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$.

7. naloga: Reši sistem z uporabo Kramerjevega pravila:

$$\begin{aligned}
3y + 2x &= z + 1 \\
3x + 2z &= 8 - 5y \\
3z - 1 &= x - 2y
\end{aligned}$$

Rezultat: $x = 3, y = -1, z = 2.$

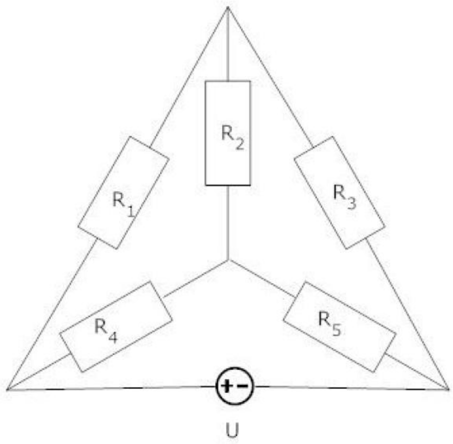
8. naloga:^{DN} Za vezje na sliki poišči tokove I_1, I_2 in I_3 v posameznih tokokrogih (tok I_1 v krogu levo zgoraj, nadaljujemo v smeri urinega kazalca). Podatki so: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 3\Omega$ in $U = 1.5V$.

Za vsak tokokrog zapišemo Ohmov zakon ($U = IR$). Dobimo sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned}
I_1R_1 + (I_1 - I_2)R_2 + (I_1 - I_3)R_4 &= 0, \\
I_2R_3 + (I_2 - I_3)R_5 + (I_2 - I_1)R_2 &= 0, \\
(I_3 - I_1)R_4 + (I_3 - I_2)R_5 &= U,
\end{aligned}$$

ki ga še uredimo:

$$\begin{aligned}
(R_1 + R_2 + R_4)I_1 - R_2I_2 - R_4I_3 &= 0, \\
-R_2I_1 + (R_2 + R_3 + R_5)I_2 - R_5I_3 &= 0, \\
-R_4I_1 - R_5I_2 + (R_4 + R_5)I_3 &= U.
\end{aligned}$$



Ko vstavimo podatke, dobimo sistem:

$$\begin{aligned} 5I_1 - 2I_2 - 2I_3 &= 0, \\ -2I_1 + 7I_2 - 3I_3 &= 0, \\ -2I_1 - 3I_2 + 5I_3 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Po Kramerjevem pravilu izračunamo determinanto sistema D ter determinante D_1, D_2 in D_3:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 58, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & -3 \\ \frac{3}{2} & -3 & 5 \end{vmatrix} = 30,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & \frac{3}{2} & 5 \end{vmatrix} = \frac{57}{2}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ -2 & -3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{93}{2}.$$

Sedaj so tokovi enaki:

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{30}{58} = 0.52A, \quad I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{57}{116} = 0.49A, \quad I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{93}{116} = 0.8A.$$

Rezultat: $I_1 = 0.52A, I_2 = 0.49A, I_3 = 0.8A$.

VEKTORJI

Skalarni produkt

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} : \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ \mathbb{C} : \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + a_3 \bar{b}_3 \end{aligned}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot |\text{proj }_{\vec{a}}\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot |\text{proj }_{\vec{b}}\vec{a}|$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ oz. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ dolžina vektorja

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$: komutativnost v $\mathbb{R}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Standardni bazni vektorji v $\mathbb{R}^3$: $\vec{\imath} = (1,0,0), \vec{\jmath} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$.

Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$: $\text{proj }_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

9. naloga:[DN] Izračunaj skalarni produkt kompleksnih vektorjev $\vec{a} = (2+\mathrm{i}, \mathrm{i}, 3-\mathrm{i})$ in $\vec{b} = (-\mathrm{i}, 1+2\mathrm{i}, -2)$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2+\mathrm{i})\mathrm{i} + \mathrm{i}(1-2\mathrm{i}) + (3-\mathrm{i})(-2) = -5 + 5\mathrm{i}$

Rezultat: $-5 + 5\mathrm{i}$.

10. naloga[DN]: Izračunaj skalarni produkt $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, kjer je $\vec{a}$ pravokoten na $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$ in $|\vec{b}| = 3$.

$(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 10\vec{a}\vec{a} - 5\vec{a}\vec{b} + 6\vec{b}\vec{a} - 3\vec{b}\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 13$

Rezultat: 13.

11. naloga: Izračunaj skalarni produkt $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, kjer je kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 4$ in $|\vec{b}| = 6$.

Rezultat: 336.

12. naloga: Dana sta vektorja $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ in $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. Določi kot med njima in pravokotni projekciji enega drugega.

Rezultat: $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\text{proj }_{\vec{u}}\vec{v} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, $\text{proj }_{\vec{v}}\vec{u} = (2,1,1)$.

13. naloga[DN⋆]: Dana sta vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$. Vemo $(\vec{p} + 3\vec{q}) \perp (7\vec{p} - 5\vec{q})$ in $(\vec{p} - 4\vec{q}) \perp (7\vec{p} - 2\vec{q})$. Izračunaj kot med njima.

Velja:

$$\begin{aligned}
(\vec{p} + 3\vec{q}) \perp (7\vec{p} - 5\vec{q}) &\implies 7|\vec{p}|^2 + 16\vec{p}\vec{q} - 15|\vec{q}|^2 = 0, \\
(\vec{p} - 4\vec{q}) \perp (7\vec{p} - 2\vec{q}) &\implies 7|\vec{p}|^2 - 30\vec{p}\vec{q} + 8|\vec{q}|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Ko obe enačbi odštejemo, dobimo

$$46\vec{p}\vec{q} = 23|\vec{q}|^2 \quad \text{oz.} \quad |\vec{q}|^2 = 2\vec{p}\vec{q}.$$

Sedaj iz prve enačbe sledi

$$|\vec{p}|^2 = \frac{15|\vec{q}|^2 - 16\vec{p}\vec{q}}{7} = \frac{30\vec{p}\vec{q} - 16\vec{p}\vec{q}}{7} = 2\vec{p}\vec{q}.$$

Izračunajmo še kot:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{\vec{p}\vec{q}}{\sqrt{2\vec{p}\vec{q}}\sqrt{2\vec{p}\vec{q}}} = \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Rezultat: $\frac{\pi}{3}$.