12. vaja iz Matematike 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

DIFERENCIALNE ENAČBE – NADALJEVANJE

Linearne diferencialne enačbe 1. reda

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne enačbe, y_p pa neka partikularna rešitev (zadošča diferencialni enačbi).

A. Homogeni del (dobimo y_h):

$$p(x)y' + q(x)y = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Dobimo rešitev $y_h = Cg(x)$.

B. Nehomogeni del (dobimo y_p):

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Rešujemo z metodo *variacija konstante*: Za nastavek vzamemo $y_p = C(x)g(x)$ (konstanto iz rešitve homogenega dela variiramo), ga odvajamo $y' = C'(x)g(x) + C(x)g'(x)$ in vstavimo v diferencialno enačbo. Iz dobljene enačbe izračunamo $C(x)$.

1. naloga: Reši linearno diferencialno enačbo $xy' - 2y = 2x^4$ z začetnim pogojem $y(1) = 2$.

Rezultat: $y(x) = x^4 + x^2$.

2. naloga: Reši linearno diferencialno enačbo $x^2y' + xy + 1 = 0$.

Rezultat: $y(x) = \frac{C}{x} - \frac{\ln x}{x}$.

Bernoullijeve diferencialne enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)y^{\alpha}.$$

Navodilo za reševanje: Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = y^{1-\alpha}$, jo odvajamo $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, vstavimo v enačbo in dobimo linearno diferencialno enačbo 1. reda.

3. naloga: Reši Bernoullijevo diferencialno enačbo $(x+1)(yy'-1) = y^2$.

Rezultat: $y(x) = \pm\sqrt{C(x+1)^2 - 2(x+1)}$.

Eksaktne diferencialne enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0, \quad \text{kjer je } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

V tem primeru obstaja taka funkcija $z(x,y)$, da je

$$\mathrm{d}z = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Splošna rešitev eksaktne diferencialne enačbe je torej dana implicitno z enačbo $z(x,y) = C$. Do rešitve pa pridemo, tako da rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} z'_x &= P(x,y) \\ z'_y &= Q(x,y). \end{aligned}$$

4. naloga:^{DN} Ali je diferencialna enačba $2xy\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y = 0$ eksaktna? Če je eksaktna, jo reši.

Za eksaktno dif. enačbo mora biti izpolnjen pogoj

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pri nas sta

$$P(x,y) = 2xy \quad \text{in} \quad Q(x,y) = x^2 - y^2,$$

zato sledi:

$$P'_y = 2x,$$
$$Q'_x = 2x.$$

Pogoj je izpolnjen in dif. enačba je eksaktna. Do rešitve $z(x,y) = C$ pridemo, tako da rešimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} z'_x &= P(x,y) = 2xy, \\ z'_y &= Q(x,y) = x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi

$$z(x,y) = \int z'_x \mathrm{d}x = \int 2xy\mathrm{d}x = 2y\frac{x^2}{2} + D(y) = yx^2 + D(y).$$

Dobljeno funkcijo $z(x,y)$ sedaj parcialno odvajamo po y:

$$z'_y = x^2 + D'_y.$$

Iz druge enačbe zgornjega sistema sledi:

$$x^2 - y^2 = x^2 + D'_y,$$

kar pomeni, da je $D(y)$, ki je le funkcija y, enaka:

$$D'_y = -y^2 \implies D(y) = \int D'_y \mathrm{d}y = -\int y^2 \mathrm{d}y = -\frac{y^3}{3} \quad \text{(konstante ne pišemo).}$$

Sledi

$$z(x,y) = yx^2 + D(y) = yx^2 - \frac{y^3}{3}$$

in rešitev eksaktne dif. enačbe je

$$yx^2 - \frac{y^3}{3} = C.$$

Rezultat: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ enačba je eksaktna, $x^2y - \frac{y^3}{3} = C$.

<u>5. naloga</u>: Določi parameter a, tako da bo enačba $2x \ln y + \frac{x^a}{y} y' = 0$ eksaktna, in jo reši.

Rezultat: $a = 2$, $z(x,y) = x^2 \ln y$, $x^2 \ln y = C$, $y = \mathrm{e}^{\frac{C}{x^2}}$.

Ortogonalne trajektorije

Dana je 1-parametrična družina krivulj $F(x,y,C) = 0$. Ortogonalne trajektorije so vse krivulje, ki sekajo to družino pod pravim kotom.

$$\begin{array}{rcl}
F(x,y,C) & = & 0 \\
 & \downarrow & \text{dif. enačba} \\
y' & = & f(x,y) \; = \; \text{tangens naklonskega kota tangente} \\
 & \downarrow & \\
y'_T & = & -\dfrac{1}{f(x,y)} \; = \; \text{tangens naklonskega kota normale} = \text{tangente ortog. trajektorij} \\
 & \downarrow & \\
 & & \text{rešitev te dif. enačbe so ortogonalne trajektorije}
\end{array}$$

<u>6. naloga:</u>^{DN} Dana je družina krivulj $y = C(x^2+1)$. Poišči ortogonalne trajektorije. Določi še tisto ortogonalno trajektorijo, ki gre skozi točko $T(1, \frac{1}{4})$.

Najprej poiščimo diferencialno enačbo, katere splošna rešitev je dana družina krivulj:

$$\begin{aligned}
y &= C(x^2+1) \\
C &= \frac{y}{x^2+1} \\
0 &= \frac{y'(x^2+1) - y \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\
0 &= y'(x^2+1) - y \cdot 2x \\
y' &= \frac{2xy}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Diferencialna enačba, katere splošna rešitev so ortogonalne trajektorije, se sedaj glasi:

$$\begin{aligned}
y'_T &= -\frac{1}{\frac{2xy}{x^2+1}} \\
y'_T &= -\frac{x^2+1}{2xy}
\end{aligned}$$

Enačbo za ortogonalne trajektorije dobimo, če rešimo to diferencialno enačbo 1. reda, ki ima ločljivi spremenljivki (rešujemo jo tako, da namesto y' pišemo $\frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo):

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{x^2+1}{2xy} \\
y' &= -\frac{x^2+1}{2x} \cdot \frac{1}{y} \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x^2+1}{2x} \cdot \frac{1}{y} \\
dy &= -\frac{x^2+1}{2x} \cdot \frac{1}{y} dx \\
y dy &= -\frac{x^2+1}{2x} dx \\
\int y\, dy &= -\int \frac{x^2+1}{2x}\, dx \\
\frac{y^2}{2} &= -\frac{1}{2} \int (x + \frac{1}{x})\, dx \\
\frac{y^2}{2} &= -\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} + \ln x) + C \\
y^2 &= -\frac{x^2}{2} - \ln x + 2C \\
y &= \pm\sqrt{-\frac{x^2}{2} - \ln x + 2C}
\end{aligned}$$

Sedaj iz družine vseh ortogonalnih trajektorij določimo tisto, ki gre skozi točko $T(1, \frac{1}{4})$:

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{-\frac{x^2}{2} - \ln x + 2C} \\ \frac{1}{4} &= \pm\sqrt{-\frac{1}{2} - \ln 1 + 2C} \\ \frac{1}{16} &= -\frac{1}{2} + 2C \\ C &= \frac{9}{32} \end{aligned}$$

Iskani ortogonalni trajektoriji sta zato

$$y = \pm\sqrt{-\frac{x^2}{2} - \ln x + \frac{9}{16}}.$$

Rezultat: $y(x) = \pm\sqrt{-\frac{x^2}{2} - \ln x + 2C}$ cela družina; $y(x) = \pm\sqrt{-(\frac{x^2}{2} + \ln x) + \frac{9}{16}}$ ortogonalna trajektorija skozi točko T.

7. naloga: Dana je družina krivulj $x + y = Ce^y$. Poišči tisto ortogonalno trajektorijo, ki gre skozi točko $T(0, 5)$.

Rezultat: $y(x) = -x+2+C_1e^{-x}$ cela družina; $y(x) = -x+2+3e^{-x}$ ortogonalna trajektorija skozi točko T.