13. vaja iz Matematike 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

DIFERENCIALNE ENAČBE – NADALJEVANJE

LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE VIŠJIH REDOV

Homogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kjer so $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstantni koeficienti.

Navodilo za reševanje: Rešujemo jo z nastavkom $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, ki ga odvajamo in vstavimo v dif. enačbo. Dobimo *karakteristično enačbo*:

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

katere rešitve so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Splošna rešitev homogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti je tedaj

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

1. naloga: Reši enačbo $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Rezultat: $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{x}$.

2. naloga: ^{DN} Reši enačbo $y'' - 2y' + y = 0$.

Dana je homogena linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti. Rešujemo jo z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Dobimo karakteristično enačbo:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 1 \ \text{ dvojna ničla} \end{aligned}$$

Splošna rešitev se glasi:

$$y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 x \mathrm{e}^{x}.$$

Rezultat: $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 x \mathrm{e}^{x}$.

3. naloga: Poišči rešitev dif. enačbe $y''' - y'' - y' + y = 0$, ki zadošča pogojem $y(0) = 2$, $y(1) = -\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$ in $y'(0) = 0$.

Rezultat: $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x + C_3\mathrm{e}^{-x}$ splošna rešitev; $y(x) = 3\mathrm{e}^x - 4x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

4. naloga: Reši enačbo $y'' - 4y' + 5y = 0$. Poišči tisto rešitev, za katero velja $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$.

NAMIG: Uporabi Eulerjevo formulo $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Rezultat: $y(x) = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin x$ splošna rešitev; $y(x) = 2e^{2x}\sin x$ rešitev začetnega problema.

NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE S KONSTANTNIMI KOEFICIENTI

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$a_ny^{(n)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b(x),$$

kjer so $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstantni koeficienti, $b(x)$ pa funkcija spremenljivke x.

Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne dif. enačbe s konst. koef., y_p pa neka partikularna rešitev (zadošča diferencialni enačbi).

A. Homogeni del (dobimo y_h):

$$a_ny^{(n)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0.$$

To je homogena linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti. Dobimo rešitev y_h.

B. Nehomogeni del (dobimo y_p):

$$a_ny^{(n)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b(x).$$

Rešujemo lahko z metodo *inteligentnega ugibanja* oz. *nedoločenih koeficientov.* Za nastavek vzamemo funkcijo iste oblike, kot je desna stran $b(x)$ z nekaj prostimi parametri. Metoda deluje, če je $b(x)$ funkcija, katere odvodi so podobni funkciji sami. V splošnem, če je

$$b(x) = e^{\alpha x}(P_i(x)\cos(\beta x) + Q_j(x)\sin(\beta x)),$$

kjer je $P_i(x)$ polinom stopnje i in $Q_j(x)$ polinom stopnje j, potem za nastavek vzamemo

$$y_p = x^ke^{\alpha x}(R_m(x)\cos(\beta x) + S_m(x)\sin(\beta x)),$$

kjer sta R_m in S_m polinoma stopnje $m = \max\{i, j\}$, k pa večkratnost ničle $\alpha + i\beta$ v karakteristični enačbi homogene enačbe.

Če je $b(x)$ vsota več različnih členov zgornje oblike, je nastavek y_p vsota posameznih nastavkov.

Nastavek y_p odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo. Iz dobljene enačbe izračunamo vse parametre iz nastavka.

Partikularna rešitev z metodo variacije konstant

Partikularno rešitev lahko vedno najdemo z metodo *variacije konstant*. Če je splošna rešitev pripadajoče homogene enačbe

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

kjer so $y_1, y_2, \ldots, y_n$ osnovni sistem rešitev homogene enačbe, rešitev iščemo v obliki

$$y_p = u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2 + \cdots + u_n(x) y_n.$$

Za določitev $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ rešimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{array}{rcll} u_1' y_1 + & \cdots & + u_n' y_n & = 0 \\ u_1' y_1' + & \cdots & + u_n' y_n' & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ u_1' y_1^{(n-1)} + & \cdots & + u_n' y_n^{(n-1)} & = b(x) \end{array}$$

Z integracijo dobimo neznane funkcije $u_1, u_2, \ldots, u_n$, jih vstavimo v nastavek y_p in dobimo partikularno rešitev.

5. naloga:[DN] Reši enačbo $y'' - 5y' - 6y = \cos x + \mathrm{e}^{2x}$.

Splošna rešitev dane nehomogene linearne dif. enačbe s konstantnimi koeficienti je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne dif. enačbe s konst. koef., y_p pa partikularna rešitev.

A. Homogeni del (računamo y_h):

$$y'' - 5y' - 6y = 0.$$

To je homogena linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti. Dobimo karakteristično enačbo

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 5\lambda - 6 &= 0 \\ (\lambda - 6)(\lambda + 1) &= 0 \\ \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -1 & \end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je zato:

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{6x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

B. Nehomogeni del (računamo y_p):

Partikularno rešitev y_p iščemo z metodo nedoločenih koeficientov. Za nastavek vzamemo funkcijo iste oblike, kot je desna stran

$$b(x) = \cos x + \mathrm{e}^{2x}$$

z nekaj prostimi parametri.

Zaradi prvega dela $\cos x$, kjer je $\alpha + i\beta = i$, kar ni ničla karakteristične enačbe iz homogenega dela in je zato $k = 0$, dobimo prvi del nastavka

$$A\cos x + B\sin x,$$

kjer sta pred obema trigonometričnima funkcijama polinoma stopnje 0 tako kot pred $\cos x$ v $b(x)$.

Zaradi drugega dela e^{2x}, kjer je $\alpha + i\beta = 2$, kar spet ni ničla karakteristične enačbe iz homogenega dela in je zato $k = 0$, dobimo drugi del nastavka

$$C\mathrm{e}^{2x},$$

kjer je pred funkcijo e^{2x} polinom stopnje 0 tako kot pred e^{2x} v $b(x)$.

Sledi nastavek za partikularno rešitev

$$y_p = A\cos x + B\sin x + C\mathrm{e}^{2x}$$

z nedoločenimi koeficienti A, B in C. Določimo jih, tako da nastavek vstavimo v dif. enačbo. Še prej ga seveda moramo dvakrat odvajati:

$$\begin{aligned} y &= A\cos x + B\sin x + C\mathrm{e}^{2x} \\ y' &= -A\sin x + B\cos x + 2C\mathrm{e}^{2x} \\ y'' &= -A\cos x - B\sin x + 4C\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Funkcije y, y', y'' vstavimo v dif. enačbo:

$$(-A\cos x - B\sin x + 4C\mathrm{e}^{2x}) - 5(-A\sin x + B\cos x + 2C\mathrm{e}^{2x}) - 6(A\cos x + B\sin x + C\mathrm{e}^{2x}) = \cos x + \mathrm{e}^{2x},$$

ki jo uredimo po linearno neodvisnih funkcijah $\sin x$, $\cos x$ in e^{2x}:

$$(5A - 7B)\sin x + (-7A - 5B)\cos x - 12C\mathrm{e}^{2x} = \cos x + \mathrm{e}^{2x}.$$

Enačbo rešimo, tako da primerjamo koeficiente pred linearno neodvisnimi funkcijami $\sin x$, $\cos x$ in e^{2x} na obeh straneh enačbe:

$$\begin{aligned} \sin x:&\quad 5A - 7B &= 0, \\ \cos x:&\quad -7A - 5B &= 1, \\ \mathrm{e}^{2x}:&\quad -12C &= 1. \end{aligned}$$

Sledi rešitev sistema: $A = -\frac{7}{74}$, $B = -\frac{5}{74}$ in $C = -\frac{1}{12}$. Partikularna rešitev dif. enačbe se zato glasi

$$y_p = -\frac{7}{74}\cos x - \frac{5}{74}\sin x - \frac{1}{12}\mathrm{e}^{2x}.$$

Splošna rešitev dif. enačbe je torej

$$y = y_h + y_p = C_1\mathrm{e}^{6x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - \frac{7}{74}\cos x - \frac{5}{74}\sin x - \frac{1}{12}\mathrm{e}^{2x}.$$

Rezultat: $y(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x} - \frac{7}{74}\cos x - \frac{5}{74}\sin x - \frac{1}{12}e^{2x}$.

6. naloga:^{DN} Reši začetni problem $y'' - 2y' - 3y = x^2$, $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

Splošna rešitev dane nehomogene linearne dif. enačbe s konstantnimi koeficienti je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne dif. enačbe s konst. koef., y_p pa partikularna rešitev.

A. Homogeni del (računamo y_h):

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

To je homogena linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti. Dobimo karakteristično enačbo

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0 \\ (\lambda - 3)(\lambda + 1) &= 0 \\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1 & \end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je zato:

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

B. Nehomogeni del (računamo y_p):

Partikularno rešitev y_p iščemo z metodo nedoločenih koeficientov. Za nastavek vzamemo funkcijo iste oblike, kot je desna stran

$$b(x) = x^2,$$

ki je polinom stopnje 2, z nekaj prostimi parametri. Ker je $\alpha + i\beta = 0$, ki ni ničla karakteristične enačbe iz homogenega dela in je zato $k = 0$, vzamemo za nastavek za partikularno rešitev poljuben polinom stopnje 2,

$$y_p = Ax^2 + Bx + C,$$

z nedoločenimi koeficienti A, B in C. Določimo jih, tako da nastavek vstavimo v dif. enačbo. Še prej ga seveda moramo dvakrat odvajati:

$$\begin{aligned} y &= Ax^2 + Bx + C \\ y' &= 2Ax + B \\ y'' &= 2A \end{aligned}$$

Funkcije y, y', y'' vstavimo v dif. enačbo:

$$2A - 2(2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

ki jo uredimo po linearno neodvisnih potencah spremenljivke x:

$$-3Ax^2 + (-4A - 3B)x + 2A - 2B - 3C = x^2.$$

Enačbo rešimo, tako da primerjamo koeficiente pred istimi potencami x na obeh straneh enačbe:

$$\begin{aligned}
x^2: &\quad -3A &= 1,\\
x^1: &\quad -4A-3B &= 0,\\
x^0: &\quad 2A-2B-3C &= 0.
\end{aligned}$$

Sledi rešitev sistema: $A=-\frac{1}{3}$, $B=-\frac{4}{9}$ in $C=-\frac{14}{27}$. Partikularna rešitev dif. enačbe se zato glasi

$$y_p = -\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{14}{27}.$$

Splošna rešitev dif. enačbe je torej

$$y = y_h + y_p = C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{14}{27}.$$

Poiščimo še rešitev začetnega problema:

$$\begin{aligned}
y(0)=0: &\quad 0 = C_1+C_2-\tfrac{14}{27}\\
y'(0)=1: &\quad 1 = 3C_1-C_2+\tfrac{4}{9}
\end{aligned}$$

Drugi pogoj se nanaša na odvod

$$y' = 3C_1\mathrm{e}^{3x}-C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}.$$

Sledi rešitev sistema: $C_1=\frac{29}{108}$ in $C_2=\frac{1}{4}$. Rešitev začetnega problema je zato

$$y = \frac{29}{108}\mathrm{e}^{3x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{14}{27}.$$

Rezultat: $y(x)=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{14}{27}$ splošna rešitev; $y(x)=\frac{29}{108}\mathrm{e}^{3x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{14}{27}$ rešitev začetnega problema.

7. naloga: Reši enačbo $y'''-y=-3\mathrm{e}^x$.
NAMIG: Partikularno rešitev išči v obliki $y_p=Ax\mathrm{e}^x$.

Rezultat: $y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-x\mathrm{e}^x$.

8. naloga: Reši enačbo $y''+y=4\sin x+1$.
NAMIG: Partikularno rešitev išči v obliki $y_p=x(A\sin x+B\cos x)+C$.

Rezultat: $y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x-2x\cos x+1$.

9. naloga: Reši enačbo $y''-y=(2x+1)\cos\frac{x}{2}$.
NAMIG: Partikularno rešitev išči v obliki $y_p=(Ax+B)\sin\frac{x}{2}+(Cx+D)\cos\frac{x}{2}$.

Rezultat: $y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{32}{25}\sin\frac{x}{2}-(\frac{8}{5}x+\frac{4}{5})\cos\frac{x}{2}$.

Eulerjeve enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

kjer so $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstantni koeficienti.

Navodilo za reševanje: Rešujemo jo z nastavkom $y(x) = x^\lambda$, ki ga odvajamo in vstavimo v dif. enačbo. Dobimo *karakteristično enačbo*, katere rešitve so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Splošna rešitev Eulerjeve dif. enačbe je tedaj

$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \cdots + C_n x^{\lambda_n}.$$

10. naloga: Reši enačbo $x^2 y'' - x y' - 3y = 0$.

Rezultat: $y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-1}$.

11. naloga:^{DN} Reši enačbo $x^2 y'' - x y' + y = 0$.

Dana dif. enačba je Eulerjeva. Rešujemo jo z nastavkom $y = x^\lambda$. Dobimo karakteristično enačbo:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 1 \quad \text{dvojna ničla} \end{aligned}$$

Splošna rešitev se glasi:

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x.$$

Rezultat: $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x$.

12. naloga: Reši enačbo $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 7 x y' - 8y = 0$.

Rezultat: $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + C_3 x^2 \ln^2 x$.

Diferencialne enačbe, v katerih odvisna spremenljivka y nastopa samo enkrat

13. naloga: Reši diferencialno enačbo $y''' = 2 + \sin x$.

Rezultat: $y(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + \frac{Cx^2}{2} + Dx + E$.

Metode za zniževanje reda diferencialnih enačb

Nekaterim diferencialnim enačbam lahko znižamo red.

Če enačba ne vsebuje odvisne spremenljivke y, tj. je oblike $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Red dif. enačbe znižamo, tako da uvedemo novo odvisno spremenljivko, npr.

$$u = y'.$$

14. naloga:^{DN} Reši diferencialno enačbo $(1-x^2)y'' - xy' = 0$.

Dana diferencialna enačba ne vsebuje odvisne spremenljivke y, zato lahko znižamo njen red, tako da (namesto y) uvedemo novo odvisno spremenljivko

$$u = y' \implies u' = y''.$$

Po zamenjavi dobimo

$$(1-x^2)u' - xu = 0,$$

kar je dif. enačba 1. reda in sicer dif. enačba z ločljivima spremenljivkama. To enačbo rešimo (tj. poiščemo u), tako da namesto u' pišemo $\frac{du}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned}
(1-x^2)u' &= xu \\
(1-x^2)\frac{du}{dx} &= xu \\
(1-x^2)du &= xu\,dx \\
\frac{du}{u} &= \frac{x}{1-x^2}\,dx \\
\int \frac{1}{u}\,du &= \int \frac{x}{1-x^2}\,dx \\
\int \frac{1}{u}\,du &= -\int \frac{1}{2t}\,dt \\
\ln u &= -\frac{1}{2}\ln t + \ln C \\
\ln u &= \ln t^{-\frac{1}{2}} + \ln C \\
\ln u &= \ln\left(Ct^{-\frac{1}{2}}\right) \\
u &= Ct^{-\frac{1}{2}} \\
u &= \frac{C}{\sqrt{t}} \\
u &= \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Pri tem smo v integral racionalne funkcije

$$\frac{x}{1-x^2}$$

uvedli novo spremenljivko

$$t = 1-x^2 \Rightarrow dt = -2x\,dx.$$

Ker je splošna rešitev dif. enačbe za u enaka

$$u = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$$

in je $u = y'$, je rešitev začetne dif. enačbe

$$y = \int u\,dx = \int \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = C\arcsin x + D.$$

Rezultat: $y(x) = C\arcsin x + D$.

15. naloga: Reši diferencialno enačbo $\cos x \cdot y''' + \sin x \cdot y'' = \sin x$.

Rezultat: $y(x) = \frac{x^2}{2} - C\cos x + Dx + E$.

SISTEMI DIFERENCIALNIH ENAČB

Sisteme linearnih dif. enačb s konstantnimi koeficienti

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_1x + a_2y \\ \dot{y}(t) &= a_3x + a_4y \end{aligned}$$

rešujemo s podobnimi nastavki kot linearne dif. enačbe s konst. koeficienti:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\mathrm{e}^{\lambda t}, \\ y(t) &= B\mathrm{e}^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Ko nastavek odvajamo in vstavimo v sistem, dobimo homogen sistem dveh enačb za dve neznanki A in B (λ pa je parameter), ki ima netrivialno rešitev, ko je determinanta koeficientov sistema enaka 0. Iz te enačbe izračunamo λ.

16. naloga:^{DN} Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y, \\ \dot{y} &= -x + 2y, \end{aligned}$$

kjer je $x = x(t)$, $y = y(t)$, skupaj z začetnim pogojem $x(0) = 1$, $y(0) = -3$.

Podan je sistem dveh linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti. Neznani funkciji sta x in y, ki sta obe odvisni od časa t. Sistem rešujemo s podobnimi nastavki kot linearne dif. enačbe s konst. koef.:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\mathrm{e}^{\lambda t}, \\ y(t) &= B\mathrm{e}^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Nastavka odvajamo in vstavimo v sistem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \\ \dot{y}(t) &= B\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} &= 2A\mathrm{e}^{\lambda t} - B\mathrm{e}^{\lambda t} \\ B\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} &= -A\mathrm{e}^{\lambda t} + 2B\mathrm{e}^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\lambda &= 2A - B \\ B\lambda &= -A + 2B \end{aligned}$$

Dobljen sistem dveh linearnih enačb obravnavajmo kot sistem za neznanki A in B (λ pa naj bo parameter):

$$\begin{aligned} (\lambda - 2)A + B &= 0, \\ A + (\lambda - 2)B &= 0. \end{aligned}$$

Ker je ta sistem homogen in kvadraten (enako število enačb kot neznank), ima netrivialno rešitev natanko tedaj, ko je determinanta koeficientov sistema enaka 0:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Torej, ko je

$$\begin{aligned} (\lambda - 2)^2 - 1 &= 0, \\ (\lambda - 2 - 1)(\lambda - 2 + 1) &= 0, \\ (\lambda - 3)(\lambda - 1) &= 0, \\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

Sedaj dobi nastavek (podobno kot pri dif. enačbah s konstantnimi koeficienti) naslednjo obliko:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1\mathrm{e}^{3t} + A_2\mathrm{e}^{t}, \\ y(t) &= B_1\mathrm{e}^{3t} + B_2\mathrm{e}^{t}. \end{aligned}$$

Splošna rešitev bo vsebovala dva parametra (v sistemu nastopata dva različna odvoda prvega reda, tj. $\dot{x}$ in $\dot{y}$), trenutni nastavek pa zaenkrat vsebuje štiri parametre, torej dva preveč. Zvezo med njimi lahko poiščemo, tako da ta nastavek še enkrat vstavimo v sistem. Dovolj je, če ga vstavimo v eno samo dif. enačbo sistema, saj obe enačbi vodita do istih rezultatov, torej enakih zvez med parametri A_1, A_2, B_1, B_2. Sledi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y, \\ 3A_1\mathrm{e}^{3t} + A_2\mathrm{e}^{t} &= 2(A_1\mathrm{e}^{3t} + A_2\mathrm{e}^{t}) - (B_1\mathrm{e}^{3t} + B_2\mathrm{e}^{t}). \end{aligned}$$

Ko izenačimo koeficiente pred linearno neodvisnima funkcijama e^t in e^{3t}, dobimo linearni sistem dveh enačb za štiri neznanke, katerega rešitev je 2-parametrična:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{3t} &: \ 3A_1 = 2A_1 - B_1, \\ \mathrm{e}^{t} &: \ A_2 = 2A_2 - B_2. \end{aligned}$$

Torej $B_1 = -A_1$ in $B_2 = A_2$. Sledi splošna rešitev sistema diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \mathrm{e}^{3t} + A_2 \mathrm{e}^{t}, \\ y(t) &= -A_1 \mathrm{e}^{3t} + A_2 \mathrm{e}^{t}. \end{aligned}$$

Izračunajmo še rešitev začetnega problema z začetnim pogojem $x(0) = 1$ in $y(0) = -3$:

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 + A_2, \\ -3 &= -A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Dobimo $A_1 = 2$ in $A_2 = -1$. Sledi rešitev

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{t}, \\ y(t) &= -2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{t}. \end{aligned}$$

Rezultat: $x(t) = -\mathrm{e}^{t} + 2\mathrm{e}^{3t}$, $y(t) = -\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{3t}$.

17. naloga: Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x - y, \\ \dot{y} &= x - y, \end{aligned}$$

kjer je $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Rezultat: $x(t) = (Ct + D)\mathrm{e}^{-2t}$, $y(t) = (-Ct - C - D)\mathrm{e}^{-2t}$.

NEKAJ PRIMEROV UPORABE DIFERENCIALNIH ENAČB V ELEKTROTEHNIKI

1. primer: LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA 1. REDA

Dano je LR vezje na sliki s podatki $R = 6\Omega$, $L = 3H$ in $U = 2V$. Izračunaj, kako se spreminja tok s časom, če smo ob času $t = 0s$ preklopili stikalo (torej je bil tok takrat enak 0). Kolikšen je tok ob času $t = 5s$?

Rešitev:

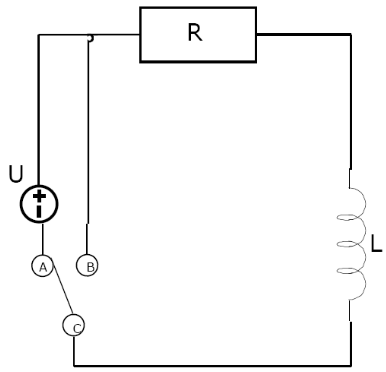
Diferencialna enačba za to vezje se glasi:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U.$$

Začetni pogoj: $I(0) = 0$.

To je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda. Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} L\frac{dI}{dt} + RI &= 0 \\ \int \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L}\int dt \\ \ln I &= -\frac{R}{L}t + \ln k \\ I_h(t) &= ke^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$



Nato z variacijo konstante izračunamo partikularno rešitev.

$$\begin{aligned} I &= k(t)e^{-\frac{R}{L}t} \\ \dot{I} &= \dot{k}(t)e^{-\frac{R}{L}t} - k(t)\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo

$$L\dot{k}(t)e^{-\frac{R}{L}t} - k(t)Re^{-\frac{R}{L}t} + k(t)Re^{-\frac{R}{L}t} = U$$

in dobimo

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{U}{L}e^{\frac{R}{L}t} \\ k(t) &= \frac{U}{L}\int e^{\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}e^{\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je torej: $I_p(t) = \frac{U}{R}$.
Splošna rešitev je vsota partikularne rešitve in rešitve homogenega dela:

$$I(t) = I_p(t) + I_h(t) = \frac{U}{R} + ke^{-\frac{R}{L}t}$$

Ko upoštevamo še začetni pogoj, dobimo:

$$I(0) = \frac{U}{R} + k = 0,$$

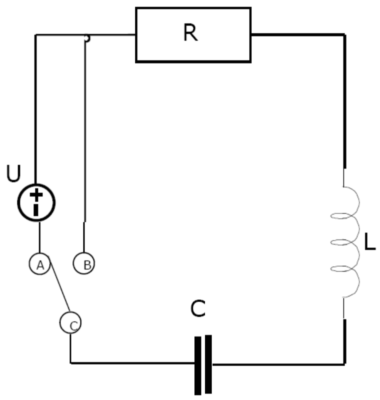
od koder sledi, da je $k = -\frac{U}{R}$.
Tok v vezju se torej s časom spreminja takole:

$$I(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Za dane podatke je tok ob času $t = 5s$:

$$I(5) = \frac{2}{6}(1 - e^{-\frac{6\cdot 5}{3}}) = 0.33A.$$

2. primer: LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA 2. REDA
Dano je LCR vezje na sliki s podatki $U = 10V$, $R = 7\Omega$, $L = 20mH$ in $C = \mu 8F$.



Izračunaj, kako se spreminja tok s časom, če smo ob času $t = 0s$ preklopili stikalo (torej je bil tok takrat enak 0).

Rešitev:
Napetostna enačba za to vezje:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I dt = U.$$

Enačbo enkrat odvajamo po času in delimo z L, da dobimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0.$$

Začetni pogoji: $I(0) = 0$ in $\frac{dI}{dt}(0) = \frac{U}{L}$. Drugi začetni pogoj dobimo iz prve enačbe pri $t = 0$.
To je homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Rešimo jo z nastavkom $I = e^{\lambda t}$, pri čemer označimo $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ in $2\xi\omega = \frac{R}{L}$:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Oblika rešitve je odvisna od tega, ali ima karakteristična enačba dve različni realni rešitvi, eno dvojno rešitev, ali dve konjugirano kompleksni rešitvi. To pa je seveda odvisno od danih podatkov. Ker je $L = 20mH$ in $C = 8\mu F$, je $\omega = 2500$ in zato je $\xi = \frac{7}{100}$, kar pomeni, da dobimo za dane podatke dve konjugirano kompleksni rešitvi. Zato je rešitev diferencialne enačbe oblike:

$$I(t) = e^{-2\xi\omega t}\left(A\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + B\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\right)$$

Potrebno je še določiti konstanti A in B. V ta nemen rešitev odvajamo:

$$\begin{aligned}\dot{I}(t) &= -2\xi\omega e^{-2\xi\omega t}\left(A\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + B\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\right)\\ &\quad + e^{-2\xi\omega t}\left(-A(\omega\sqrt{1-\xi^2})\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + B(\omega\sqrt{1-\xi^2})\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\right)\end{aligned}$$

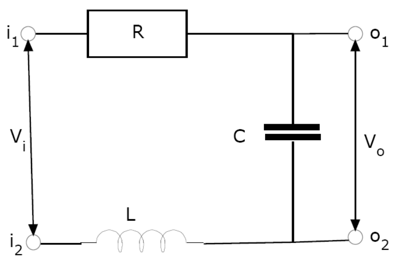
Nato vstavimo začetna pogoja:

$$I(0) = A = 0$$
$$\dot{I}(0) = -2\xi\omega A + B\omega\sqrt{1-\xi^2} = \frac{U}{L}$$

Od tod sledi, da je $A = 0$ in $B = \frac{U}{L\omega\sqrt{1-\xi^2}}$. Torej je rešitev diferencialne enačbe enaka:

$$I(t) = \frac{U}{L\omega\sqrt{1-\xi^2}} e^{-2\xi\omega t} \sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}t\right)$$

3. primer: LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA 2. REDA
Dano je LCR vezje na sliki. Izračunaj, kako se spreminja izhodna napetost V_o s časom, če je vhodna napetost V_i oblike $V_i = V\cos\Omega t$.



Rešitev:
Napetostna enačba za to vezje je

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I dt = V_i,$$

kjer je

$$V_o = \frac{1}{C}\int I dt.$$

Od tod sledi, da je

$$I = C\frac{dV_o}{dt}, \qquad \frac{dI}{dt} = C\frac{d^2V_o}{dt^2}.$$

Diferencialna enačba se torej glasi:

$$LC\frac{d^2V_o}{dt^2} + RC\frac{dV_o}{dt} + V_o = V_i,$$

oziroma

$$\frac{d^2V_o}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_o}{dt} + \frac{V_o}{LC} = \frac{V_i}{LC}.$$

To je nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti. Signal V_i naj bo oblike $V_i(t) = V\cos\Omega t$. Če pišemo $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, $2\xi\omega = \frac{R}{L}$ in $F = \frac{V}{LC}$, dobimo enačbo oblike:

$$\ddot{V}_o + 2\xi\omega\dot{V}_o + \omega^2 V_o = F\cos\Omega t.$$

Najprej rešimo homogeni del:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Predpostavimo, da so podatki taki, da je $\xi < 1$, torej sta rešitvi karakteristične enačbe konjugirano kompleksni. Rešitev ima obliko:

$$V_o^h(t) = e^{-2\xi\omega t}\left(A\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + B\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\right)$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom (predpostavimo, da so podatki taki, da je $\Omega \neq \omega\sqrt{1-\xi^2}$):

$$V_o^p(t) = D\cos\Omega t + E\sin\Omega t.$$

Ker je $\dot{V}_o^p = -D\Omega\sin\Omega t + E\Omega\cos\Omega t$ in $\ddot{V}_o^p = -D\Omega^2\cos\Omega t - E\Omega^2\sin\Omega t$, sledi

$$(-D\Omega^2 + 2E\xi\omega\Omega + D\omega^2)\cos\Omega t + (-E\Omega^2 - 2D\xi\omega\Omega + E\omega^2)\sin\Omega t = F\cos\Omega t$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} -D\Omega^2 + 2E\xi\omega\Omega + D\omega^2 &= F \\ -E\Omega^2 - 2D\xi\omega\Omega + E\omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

Od tu dobimo konstanti D in E in partikularno rešitev diferencialne enačbe. Splošna rešitev je vsota partikularne rešitve in rešitve homogenega dela.