9. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

FOURIEROVA VRSTA

Razvoj funkcije $f(x)$, ki je periodična s periodo T (ali podana na intervalu (t_0, t_0+T)), v Fourierovo vrsto na intervalu (t_0, t_0+T):

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)) \\
\omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \\
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\cos(n\omega_0 x)\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\sin(n\omega_0 x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Velja:

- Če je funkcija $f(x)$ soda, je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz kosinusov in konstante ($b_n = 0$).
- Če je funkcija $f(x)$ liha, je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz sinusov ($a_0 = 0$, $a_n = 0$).

Če je funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $(0, a)$, jo lahko razvijemo v Fourierovo vrsto kot:

- funkcijo s periodo a – navadna Fourierova vrsta,
- sodo funkcijo s periodo $2a$ – sodo nadaljevanje (kosinusna Fourierova vrsta),
- liho funkcijo s periodo $2a$ – liho nadaljevanje (sinusna Fourierova vrsta).

1. naloga: Razvij funkcijo $f(x) = x^2$ v Fourierovo vrsto na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rezultat: $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx$.

2. naloga:^{DN} Razvij funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < \pi \\ 0 & ; -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Ko funkcijo $f(x)$, ki je definirana na intervalu $(-\pi, \pi)$, razvijemo v Fourierovo vrsto, dobimo periodično funkcijo s periodo 2π. Dobljena funkcija ne bo ne liha ne soda, zato moramo izračunati tako koeficiente a_n kot tudi koeficiente b_n. Ker je $T = 2\pi$, je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi}\pi^2 = \frac{\pi}{4} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \qquad [\textit{per partes: } u = x,\ \cos(nx)\,dx = dv] \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx\right) = 0 + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}(\cos(n\pi) - 1) \\
&= \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \qquad [\textit{per partes: } u = x,\ \sin(nx)\,dx = dv] \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nx)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{n}(-1)^n
\end{aligned}$$

Sledi Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx - \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

Rezultat: $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$.

3. naloga: Razvij funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -a \leq x < -1, \\ 1 & ; -1 \leq x < 1, \\ 0 & ; 1 \leq x \leq a, \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-a, a]$.

Rezultat: $f(x) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}$.

4. naloga: Razvij funkcijo $f(x) = x$, ki je dana na intervalu $[0, \pi]$, najprej v sinusno, nato v kosinusno, potem pa še v navadno Fourierovo vrsto.

Rezultat: Sinusna vrsta (liho nadaljevanje):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx,$$

kosinusna vrsta (sodo nadaljevanje):

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos{(2n-1)x},$$

navadna Fourierova vrsta (periodična funkcija s periodo π):

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin{(2nx)}.$$

<u>5. naloga:</u>^{DN} Razvij funkcijo $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ v kosinusno Fourierovo vrsto.

Ko funkcijo $f(x)$ razvijemo v kosinusno Fourierovo vrsto na intervalu $[0, \pi]$, dobimo sodo periodično funkcijo s periodo π. Ker je $T = \pi$, je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi} \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(2nx)\, dx \\
& \left[\textit{uporabimo formulo } \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(x - 2nx) + \sin(x + 2nx))\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(1-2n)x + \sin(1+2n)x)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{1-2n} \cos(1-2n)x - \frac{1}{1+2n} \cos(1+2n)x \right]_0^{\pi}
\end{aligned}$$

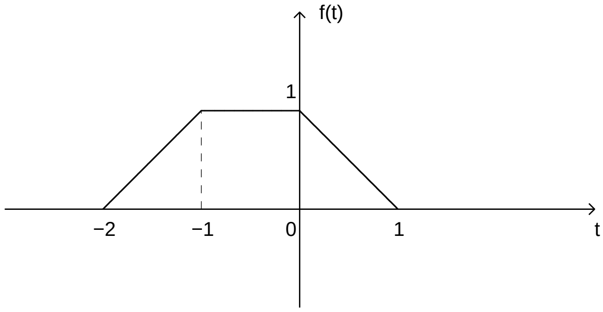
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{1-2n} \cos(\pi - 2n\pi) - \frac{1}{1+2n} \cos(\pi + 2n\pi) + \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{1-2n} \cos\pi - \frac{1}{1+2n} \cos\pi + \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1-2n} + \frac{2}{1+2n} \right) = \frac{4}{(1-4n^2)\pi} \\
b_n &= 0
\end{aligned}$$

Sledi kosinusna Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ na intervalu $[0, \pi]$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4n^2)\pi} \cos{(2nx)}.$$

Rezultat: $f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4n^2)\pi} \cos(2nx)$.

6. naloga:^{DN} Razvij funkcijo $f(t)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-2, 2]$.



Iz slike razberemo predpis funkcije $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} t+2, & -2 \leq t < -1 \\ 1, & -1 \leq t < 0 \\ -t+1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Fourierova vrsta funkcije $f(t)$ je periodična funkcija s periodo 4. Dobljena funkcija ne bo ne liha ne soda, zato moramo izračunati tako koeficiente a_n kot tudi koeficiente b_n. Ker je $T=4$, je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1}(t+2)\,dt + \int_{-1}^{0} 1\,dt + \int_{0}^{1}(-t+1)\,dt + \int_{1}^{2} 0\,dt\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\left[\frac{t^2}{2}+2t\right]_{-2}^{-1} + [t]_{-1}^{0} + \left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_{0}^{1}\right) = \frac{1}{2}\\
a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt =\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-1}(t+2)\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \int_{-1}^{0}\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \int_{0}^{1}(-t+1)\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt\right) =\\
&= \frac{1}{2}\left(\left[(t+2)\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1}\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \left[\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right]_{-1}^{0} + \right.\\
&\quad \left.\left[(-t+1)\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right]_{0}^{1} + \int_{0}^{1}\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt\right) =\\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\\
b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt =\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-1}(t+2)\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \int_{-1}^{0}\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \int_{0}^{1}(-t+1)\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt\right) =\\
&= \frac{1}{2}\left(\left[-(t+2)\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\right]_{-2}^{-1} + \int_{-2}^{-1}\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \left[-\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\right]_{-1}^{0} + \right.\\
&\quad \left.\left[-(-t+1)\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt\right) =\\
&= -\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}$$

Sledi Fourierova vrsta funkcije $f(t)$ na intervalu $[-2,2]$:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos(\frac{n\pi t}{2}) - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right).$$

Rezultat: $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos(\frac{n\pi t}{2}) - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right)$.

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

Funkcija n spremenljivk je funkcija $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x_1,\ldots,x_n) = y$.

7. naloga: Poišči in nariši definicijsko območje funkcije 2 spremenljivk:

a.) ^{DN} $f(x,y) = \frac{x-5xy}{3\sqrt{y-x^2}}$

Funkcijski predpis je definiran pri naslednjih pogojih:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{y-x^2} &\neq 0, \\ y-x^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Oba pogoja skupaj pravita $y > x^2$. Torej je definicijsko območje funkcije f enako

$$D_f = \{(x,y); y > x^2\},$$

kar je množica vseh točk nad parabolo z enačbo $y = x^2$.

Rezultat: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2\}$.

b.) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$

Rezultat: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1 \text{ in } (y \geq 1 \text{ ali } y \leq -1\}$.

Nivojske krivulje ali nivojnice

Nivojske krivulje funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $z = f(x,y)$, so krivulje $f(x,y) = C$ v definicijskem območju funkcije f, na katerih zavzame f konstantno vrednost C.

8. naloga: Izračunaj in nariši nivojske krivulje funkcije 2 spremenljivk:

a.) $f(x,y) = xy$

Rezultat: nivojnice so hiperbole $y = \frac{C}{x}$.

b.) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$

Rezultat: nivojnice so krožnice $x^2 + y^2 = \ln C$.

Parcialni odvodi

Funkcijo $f(x_1, \ldots, x_n)$ lahko odvajamo na vsako spremenljivko $x_1, \ldots, x_n$ posebej. Ko odvajamo f po spremenljivki x_i, obravnavamo vse ostale spremenljivke x_j $(j \neq i)$ kot konstante.

Parcialni odvod funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ po spremenljivki x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Totalni diferencial funkcije f:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

<u>9. naloga</u>: Poišči prve parcialne odvode in totalni diferencial funkcije:

a.) ^{DN} $f(x,y) = (x^3 - y^2)^2$

Izračunajmo vse parcialne odvode (1. reda) funkcije $f(x,y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x^3 - y^2)\cdot 3x^2 = 6x^2(x^3 - y^2)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2(x^3 - y^2)\cdot(-2y) = -4y(x^3 - y^2)\end{aligned}$$

Sedaj je totalni diferencial funkcije f enak

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 6x^2(x^3 - y^2)\mathrm{d}x - 4y(x^3 - y^2)\mathrm{d}y.$$

Rezultat: $df = 6x^2(x^3 - y^2)\mathrm{d}x - 4y(x^3 - y^2)\mathrm{d}y.$

b.) $f(x,y,z) = y \cdot \sin(x^2 + y^2 + z^2)$

Rezultat: $df = 2xy\cos(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x + \left(\sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2y^2\cos(x^2 + y^2 + z^2)\right)\mathrm{d}y + 2yz\cos(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}z.$

c.) $f(x,y,z) = \arcsin\frac{xy}{z} + \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Rezultat: $df = \left(\frac{y}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{xy}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}\mathrm{d}z.$