10. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK – NADALJEVANJE

PARCIALNI ODVODI

Funkcijo $f(x_1, \ldots, x_n)$ lahko odvajamo na vsako spremenljivko $x_1, \ldots, x_n$ posebej. Ko odvajamo f po spremenljivki x_i, obravnavamo vse ostale spremenljivke $x_j \, (j \neq i)$ kot konstante.

Parcialni odvod funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ po spremenljivki x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Totalni diferencial funkcije f:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

1. naloga: Poišči prve parcialne odvode in totalni diferencial funkcije:

a.) ^{DN} $f(x, y) = (x^3 - y^2)^2$

Izračunajmo vse parcialne odvode (1. reda) funkcije $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x^3 - y^2) \cdot 3x^2 = 6x^2(x^3 - y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2(x^3 - y^2) \cdot (-2y) = -4y(x^3 - y^2) \end{aligned}$$

Sedaj je totalni diferencial funkcije f enak

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 6x^2(x^3 - y^2)\mathrm{d}x - 4y(x^3 - y^2)\mathrm{d}y.$$

Rezultat: $df = 6x^2(x^3 - y^2)\mathrm{d}x - 4y(x^3 - y^2)\mathrm{d}y.$

b.) $f(x, y, z) = y \cdot \sin(x^2 + y^2 + z^2)$

Rezultat: $df = 2xy\cos(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (\sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2y^2\cos(x^2 + y^2 + z^2))\,\mathrm{d}y + 2yz\cos(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}z.$

c.) $f(x,y,z) = \arcsin \frac{xy}{z} + \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Rezultat: $df = \left(\frac{y}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{x}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}y - \frac{xy}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}} \mathrm{d}z.$

2. naloga: S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $\sqrt{2.04^3 + 2.98^2 - 1}$.

Namig: Uporabimo formulo $f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k$.
Rezultat: $f(a+h, b+k) = 4.045$.

3. naloga:^{DN} S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $(-1.99)^3 + \ln 1.03$.

Naj bo $f(x,y) = x^3 + \ln y$. Tedaj dobimo vrednost iskanega izraza kot

$$(-1.99)^3 + \ln 1.03 = f(-1.99, 1.03).$$

Točka, ki je blizu $(-1.99, 1.03)$ in v kateri znamo izračunati vrednost iskanega izraza, je $(a,b) = (-2,1)$. Sedaj uporabimo formulo za približek z diferencialom

$$f(-1.99, 1.03) \approx f(-2,1) + f_x(-2,1)(-1.99 - (-2)) + f_y(-2,1)(1.03 - 1).$$

Izračunajmo parcialne odvode funkcije f v točki $(-2,1)$:

$$\begin{aligned} f_x = 3x^2 &\quad\Rightarrow\quad f_x(-2,1) = 12, \\ f_y = \frac{1}{y} &\quad\Rightarrow\quad f_y(-2,1) = 1. \end{aligned}$$

Sledi $(-1.99)^3 + \ln 1.03 = f(-1.99, 1.03) \approx -8 + 12 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0.03 = -7.85$.

Rezultat: $f(-1.99, 1.03) \approx -7.85$.

4. naloga:* Določi funkcijo $z = z(x,y)$, če veš, da je:

a.) $\begin{aligned} z_x &= \cos xy \cdot y + \tfrac{2x}{y} \\ z(0,1) &= 2 \end{aligned}$

Rezultat: $z(x,y) = \sin xy + \frac{x^2}{y} + 2$.

b.) ^{DN} $\begin{aligned} z_x &= \cos x \cdot \cos y \\ z_y &= -1 - \sin x \cdot \sin y \\ z(0,1) &= -1 \end{aligned}$

Obliko funkcije $z(x,y)$ lahko dobimo, tako da z_x integriramo po spremenljivki x:

$$z(x,y) = \int z_x\, dx = \int \cos x \cdot \cos y\, dx = \cos y \int \cos x\, dx = \cos y \cdot \sin x + C_1(y).$$

Bodimo pazljivi na to, da obravnavamo spremenljivko y pri integriranju po x kot konstanto in je zato konstanta C_1, ki jo dobimo pri nedoločenem integriranju, lahko odvisna od y.

Podobno, obliko funkcije $z(x,y)$ lahko dobimo tudi, tako da z_y integriramo po spremenljivki y:

$$z(x,y) = \int z_y\,dy = \int(-1-\sin x\cdot\sin y)\,dy = -y-\sin x\int\sin y\,dy = -y+\sin x\cdot\cos y+C_2(x).$$

Spet, spremenljivko x obravnavamo pri integriranju po y kot konstanto in je zato konstanta C_2, ki jo dobimo pri nedoločenem integriranju, lahko odvisna od x.

Ko izenačimo obe obliki funkcije $z(x,y)$, dobimo

$$C_1(y) = -y + C_2(x),$$

kar pomeni, da je C_2 konstanta, neodvisna od x, y. Sledi

$$z(x,y) = \cos y\cdot\sin x - y + C_2.$$

Sedaj uporabimo tretjo enakost $z(0,1) = -1$, tj. v $z(x,y)$ vstavimo točko $(0,1)$ in dobimo:

$$z(0,1) = \cos 1\cdot\sin 0 - 1 + C_2 == -1.$$

Sledi $C_2 = 0$ in $z(x,y) = \cos y\cdot\sin x - y$.

Rezultat: $z(x,y) = \sin x\cdot\cos y - y$.

5. naloga:* Izračunaj parcialna odvoda $\frac{\partial z}{\partial u}$ in $\frac{\partial z}{\partial v}$ posredno podane funkcije $z(x,y) = x^3-y^2$, kjer sta $y(u,v) = \ln\frac{u+v}{u-v}$ in $x(u,v) = u\cdot\cos v$.

Namig: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$ in $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$.

Rezultat: $z_u = 3u^2\cos^3 v + \frac{4v}{u^2-v^2}\ln\frac{u+v}{u-v}$, $z_v = -3u^3\sin v\cos v - \frac{4u}{u^2-v^2}\ln\frac{u+v}{u-v}$.

Višji parcialni odvodi

Funkcija $f(x_1,\ldots,x_n)$ ima n prvih parcialnih odvodov (parcialni odvodi 1. reda),

$$f_{x_1},\ldots,f_{x_n},$$

in n^2 drugih parcialnih odvodov (parcialni odvodi 2. reda):

$$f_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\ 1\le i,j\le n.$$

Če drugi mešani odvodi (tj. odvajani po različnih spremenljivkah) obstajajo in so zvezni, vrstni red odvajanja ni pomemben:

$$f_{x_ix_j} = f_{x_jx_i}.$$

6. naloga: Poišči vse parcialne odvode prvega in drugega reda za funkcijo $f(x,y) = \ln(x^2+y)$. Izračunaj tudi $f_{xy}(1,0)$.

Rezultat: $f_x = \frac{2x}{x^2+y}$, $f_y = \frac{1}{x^2+y}$, $f_{xx} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$, $f_{yy} = \frac{-1}{(x^2+y)^2}$, $f_{xy}(1,0) = -2$.

7. naloga:[DN] Izračunaj $f_{yzz}(1,0,1)$ za funkcijo $f(x,y,z) = y\ln(x^2+z^4)$.

Najprej izračunajmo parcialni odvod tretjega reda $f_{yzz}(x,y,z)$, tj. funkcijo $f(x,y,z)$ najprej odvajajmo po spremenljivki y, nato pa dobljen odvod še dvakrat zaporedoma po spremenljivki z:

$$\begin{aligned} f_y &= \ln(x^2+z^4) \\ f_{yz} &= \frac{4z^3}{x^2+z^4} \\ f_{yzz} &= \frac{4z^2(3x^2-z^4)}{(x^2+z^4)^2} \end{aligned}$$

Sedaj izračunamo še vrednost odvoda $f_{yzz}(x,y,z)$ v točki $(1,0,1)$:

$$f_{yzz}(1,0,1) = 2.$$

Rezultat: $f_{yzz}(1,0,1) = 2$.

EKSTREMI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK

Kritične oz. stacionarne točke funkcije $f(x_1,\ldots,x_n)$ so tiste točke, kjer so vsi prvi parcialni odvodi enaki 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Edini kandidati za (globalne) ekstreme so poleg stacionarnih točk še robne točke definicijskega območja in točke, v katerih funkcija ni odvedljiva.

Naj bo $f(x,y)$ funkcija dveh spremenljivk. S pomočjo Hessejeve matrike ugotovimo, ali je v dani kritični točki res lokalni ekstrem funkcije f:

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Za kritično točko (x_0,y_0) funkcije f namreč velja:

1. Če je $\det(H_f(x_0,y_0)) > 0$, potem je v točki (x_0,y_0) lokalni ekstrem.

   a.) Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, potem je v tej točki lokalni minimum.

   b.) Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, potem je v tej točki lokalni maksimum.

   c.) Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati (mi ne bomo).

2. Če je $\det\left(H_f(x_0, y_0)\right) < 0$, potem je v točki (x_0, y_0) sedlo (ni lokalnega ekstrema).

3. Če je $\det\left(H_f(x_0, y_0)\right) = 0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati (mi ne bomo).

8. naloga: Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Rezultat: $T_1(0, 0)$: sedlo, $T_2(1, 1)$: lokalni minimum.

9. naloga:^{DN} Poišči stacionarne točke funkcije treh spremenljivk: $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

Stacionarne točke so tiste točke, v katerih so vsi parcialni odvodi funkcije enaki 0:

$$\begin{aligned} f_x &= 4x - y - z = 0 \\ f_y &= 2y - x = 0 \\ f_z &= 2 - x = 0 \end{aligned}$$

Edina rešitev tega sistema treh enačb za tri neznanke je: $x = 2$, $y = 1$ in $z = 7$. Točka $T(2, 1, 7)$ je zato edina stacionarna točka funkcije f.

Rezultat: $T(2, 1, 7)$.

10. naloga:^{DN} Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = \mathrm{e}^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

Najprej poiščimo stacionarne točke:

$$\begin{aligned} f_x &= 2\mathrm{e}^{2x}(x + y^2 + 2y) + \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0 \\ f_y &= \mathrm{e}^{2x}(2y + 2) = 2\mathrm{e}^{2x}(y + 1) = 0 \end{aligned}$$

Iz druge enačbe sledi $y = -1$. Iz prve $2x + 2y^2 + 4y + 1 = 0$ pa zato $x = \frac{1}{2}$. Dobili smo eno samo stacionarno točko $T(\frac{1}{2}, -1)$. Sedaj moramo ugotoviti še vrsto ekstrema v tej točki. Izračunajmo druge parcialne odvode funkcije f v točki T:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\mathrm{e}^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) + 2\mathrm{e}^{2x} = 4\mathrm{e}^{2x}(x + y^2 + 2y + 1) \;\Rightarrow\; f_{xx}(\frac{1}{2}, -1) = 2\mathrm{e} > 0 \\ f_{xy} &= \mathrm{e}^{2x}(4y + 4) = 4\mathrm{e}^{2x}(y + 1) \;\Rightarrow\; f_{xy}(\frac{1}{2}, -1) = 0 \\ f_{yy} &= 2\mathrm{e}^{2x} \;\Rightarrow\; f_{yy}(\frac{1}{2}, -1) = 2\mathrm{e} > 0 \end{aligned}$$

Hessejeva matrika je zato enaka

$$H_f(\frac{1}{2}, -1) = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e} \end{bmatrix}.$$

Ker je $\det\left(H_f(\frac{1}{2}, -1)\right) = 4\mathrm{e}^2 > 0$, je v stacionarni točki ekstrem. Ker je $f_{xx} > 0$, je to lokalni minimum.

Rezultat: $T(\frac{1}{2}, -1)$: lokalni minimum.

11. naloga: Določi lokalne ekstreme funkcije $z = z(x, y)$, ki je podana implicitno kot $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Rezultat: $T(0, 0), z = -2$: lokalni minimum, in $T(0, 0), z = 2$: lokalni maksimum.

12. naloga:* Poišči premico $y = ax + b$, za katero je vsota kvadratov vertikalnih odmikov od točk $A(0, 1)$, $B(2, 1)$ in $C(4, 3)$ minimalna.

Rezultat: $T(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$: lokalni minimum, premica $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$.