11. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

EKSTREMI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK – NADALJEVANJE

VEZANI EKSTREMI FUNKCIJ

Dana je funkcija $f(x,y)$. Zanimajo nas ekstremi nad krivuljo $g(x,y)=0$. Takšni ekstremi, rečemo jim *vezani ekstremi*, lahko nastopajo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije:

$$F(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y).$$

Spremenljivki λ rečemo *Lagrangeov množitelj*, enačbi $g(x,y)=0$ pa *vez*.

1. naloga: Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = x + 2y$ na krivulji $x^2 + y^2 = 5$.

Rezultat: $T_1(-1,-2)$: vezani minimum in $f(-1,-2) = -5$, $T_2(1,2)$: vezani maksimum in $f(1,2) = 5$.

2. naloga:^{DN} Poišči vezane ekstreme funkcije $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, kjer je vez podana z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lagrangeova funkcija je

$$F(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda \cdot g(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Iskani vezani ekstremi lahko nastopijo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} F_x &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y &= -2 + 2\lambda y = 0 \\ F_z &= 2 + 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Iz prvih treh enačb lahko izrazimo neznanke x, y, z in dobimo:

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \; y = \frac{1}{\lambda}, \; z = -\frac{1}{\lambda}.$$

Sledi $y = -2x$ in $z = 2x$, kar lahko vstavimo v zadnjo enačbo:

$$x^2 + 4x^2 + 4x^2 - 1 = 0.$$

Dobimo $x^2 = \frac{1}{9}$ in zato $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Izračunamo še pripadajoče koordinate y in z in dobimo dve stacionarni točki:

$$T_1(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}),$$
$$T_2(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Ker zvezna funkcija na kompaktnem območju (v tem primeru sfera s polmerom 1) zavzame oba ekstrema (vezani minimum in vezani maksimum), moramo le še izračunati obe funkcijski vrednosti v stacionarnih točkah:

$$f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -3,$$
$$f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 3,$$

kar pomeni, da funkcija f zavzame minimum v točki T_1 (manjša funkcijska vrednost) in maksimum v točki T_2 (večja funkcijska vrednost).

Rezultat: $T_1(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$: vezani minimum in $f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -3$, $T_2(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$: vezani maksimum in $f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 3$.

3. naloga: Poišči vezane ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x^2 - 14x + y^2 - 8y + 48 + z^2 - 8z$, kjer je vez podana z neenačbo $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Rezultat: $T_1(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9})$: vezani minimum in $f(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}) = 31$, $T_2(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9})$: vezani maksimum in $f(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}) = 67$.

4. naloga:^{DN**} Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ na območju $|x| + |y| \leq 1$.

Dano območje je kvadrat v ravnini z oglišči $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ in $(1, 0)$. Iščemo najmanjšo in največjo vrednost funkcije na tem kvadratu. Ti dve vrednosti lahko nastopita kot lokalna ekstrema v notranjosti kvadrata ali pa kot vezana ekstrema na robu kvadrata. Najprej poiščimo lokalne ekstreme v notranjosti kvadrata. Stacionarne točke, ki so kandidati za lokalne ekstreme, so točke, v katerih so prvi parcialni odvodi enaki 0:

$$\begin{aligned} z_x &= \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) = 0 \\ z_y &= \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) = 0 \end{aligned}$$

Ker doseže funkcija e^x samo pozitivne vrednosti, iz zgornjih enačb sledi $x = 0$ in $y = 0$. Edina stacionarna točka je zato $T_1(0, 0)$. Ta točka leži v notranjosti kvadrata, zato je kandidat za iskano najmanjšo oz. največjo vrednost. Če ne bi ležala v območju, bi jo iz obravnave izključili, zdaj pa jo moramo obravnavati kot morebitno iskano točko. Ker bo na koncu pomembno samo, kje je največja in kje najmanjša vrednost funkcije (izračunati bo treba funkcijske vrednosti), ni nujno, da zdaj ugotovimo, ali je v tej točki lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Zdaj poiščimo še vezane ekstreme na robu območja, na stranicah kvadrata. Vse štiri stranice opisuje enačba $g(x) = |x| + |y| - 1 = 0$. To je vez Lagrangeove funkcije:

$$Z(x, y; \lambda) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} + \lambda(|x| + |y| - 1).$$

Kandidati za vezane ekstreme so stacionarne točke Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} Z_x &= -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + \lambda|x|'_x = 0 \\ Z_y &= -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + \lambda|y|'_y = 0 \\ Z_\lambda &= |x| + |y| - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pri tem je $|x|'_x$ odvod $|x|$ po spremenljivki x in $|y|'_y$ odvod $|y|$ po spremenljivki y. Bodimo pazljivi na to, da $|x|$ in $|y|$ v točki 0 nista odvedljiva (leva in desna odvoda nista enaka, imamo špico). To pomeni, da moramo kot potencialne kandidate za iskane točke obravnavati tudi točke $T_2(0, 1)$, $T_3(1, 0)$, $T_4(0, -1)$ in $T_5(-1, 0)$, torej ravno oglišča kvadrata. Drugje pa velja:

$$|x|'_x = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases} \qquad |y|'_y = \begin{cases} 1; & y > 0 \\ -1; & y < 0 \end{cases}$$

Iz prvih dveh enačb zgornjega sistema sledi:

$$\begin{aligned} 2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} &= \lambda|x|'_x \\ 2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2} &= \lambda|y|'_y \end{aligned}$$

Če obe enačbi delimo, dobimo zvezo:

$$\frac{x}{y} = \frac{|x|'_x}{|y|'_y} \quad \text{oz.} \quad x|y|'_y = y|x|'_x.$$

Iz tretje enačbe zgornjega sistema za stacionarne točke v vsakem primeru sledi

$$2|x| = 1 \quad \text{oz.} \quad |x| = \frac{1}{2}.$$

Sedaj ločimo dve možnosti:

$$\begin{aligned} x \text{ in } y \text{ sta enako predznačena :} &\quad x = y \;\Rightarrow\; T_6(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), T_7(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), \\ x \text{ in } y \text{ sta različno predznačena :} &\quad x = -y \;\Rightarrow\; T_8(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), T_9(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Zdaj moramo samo še preveriti, kakšne so funkcijske vrednosti v dobljenih devetih točkah:

$f(0, 0) = 1 \;\Rightarrow$ največja vrednost na danem območju v $T_1(0, 0)$,

$f(0, 1) = \mathrm{e}^{-1} \;\Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_2(0, 1)$,

$f(1, 0) = \mathrm{e}^{-1} \;\Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_3(1, 0)$,

$f(0, -1) = \mathrm{e}^{-1} \;\Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_4(0, -1)$,

$f(-1, 0) = \mathrm{e}^{-1} \;\Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_5(-1, 0)$,

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow$ v $T_6(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ni ekstremne vrednosti,

$$f(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \ \Rightarrow \text{v } T_7(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) \text{ ni ekstremne vrednosti,}$$

$$f(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \ \Rightarrow \text{v } T_8(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) \text{ ni ekstremne vrednosti,}$$

$$f(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \ \Rightarrow \text{v } T_9(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ ni ekstremne vrednosti.}$$

Rezultat: $T_1(0,0)$: največja vrednost na danem območju $f(0,0) = 1$; $T_2(1,0)$, $T_3(0,1)$, $T_4(-1,0)$, $T_5(0,-1)$: najmanjša vrednost na danem območju $f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1) = \mathrm{e}^{-1}$.

DIFERENCIALNE ENAČBE

Osnovni pojmi

Diferencialna enačba reda n je zveza med neodvisno spremenljivko x, odvisno spremenljivko y ter njenimi odvodi $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Pri tem je $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Red diferencialne enačbe je stopnja najvišjega odvoda.

Rešitev diferencialne enačbe $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ na intervalu $[a, b]$ je vsaka funkcija $g(x)$, ki je na intervalu $[a, b]$ n-krat odvedljiva in za katero za vsak $x \in [a, b]$ velja $F(x, g(x), g'(x), \ldots, g^{(n)}(x)) = 0$ (zadošča diferencialni enačbi).

Rešitev diferencialne enačbe n-tega reda je n-parametrična družina funkcij.

Cauchyjeva naloga ali *začetni problem* imenujemo diferencialno enačbo skupaj z začetnimi pogoji. Rešitev začetnega problema je ena sama funkcija (parametre iz splošne rešitve začetni pogoji določijo).

5. naloga: Kateri diferencialni enačbi pripada družina krožnic $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$?

Rezultat: $3y'(y'')^2 = (1 + (y')^2)y'''$.

6. naloga:^{DN} Pokaži, da je družina funkcij $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$ rešitev diferencialne enačbe $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Namig: Funkcijo odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo.

Dana 2-parametrična družina funkcij je rešitev diferencialne enačbe 2. reda, če ji zadošča, tj. če funkcijo y vstavimo v levo stran diferencialne enačbe, moramo dobiti 0. Preden lahko to naredimo, moramo izračunati še y' in y'', ki v enačbi nastopata:

$$\begin{aligned} y &= C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}, \\ y' &= C_1\mathrm{e}^x + 2C_2\mathrm{e}^{2x}, \\ y'' &= C_1\mathrm{e}^x + 4C_2\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Funkcije y, y', y'' sedaj vstavimo v levo stran diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= (C_1 e^x + 4C_2 e^{2x}) - 3(C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}) + 2(C_1 e^x + C_2 e^{2x}) \\ &= C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} - 3C_1 e^x - 6C_2 e^{2x} + 2C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sledi, da je podana družina funkcij res splošna rešitev diferencialne enačbe.

DIFERENCIALNE ENAČBE PRVEGA REDA

Začetni problem (Cauchy-jeva naloga) je v primeru diferencialnih enačb 1. reda takšne oblike:

$$F(x, y, y') = 0,$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{oz.} \quad f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y.$$

Navodilo za reševanje: Vstavimo $y' = \frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo.

7. naloga: Reši diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama:

a.) $y' = e^{x+y}$

Rezultat: $y(x) = -\ln(-e^x - C)$

b.) $y' = e^{x+y}$, $y(0) = 1$ (začetni pogoj)

Rezultat: $y(x) = -\ln(-e^x + 1 + e^{-1})$

Homogene diferencialne enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad \text{oz.} \quad F(y', \frac{y}{x}) = 0.$$

Navodilo za reševanje: Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = \frac{y}{x}$, tj. za nastavek vzamemo $y = xu$ (sledi $y' = u + xu'$), dobimo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama.

8. naloga: Reši homogeno diferencialno enačbo $xy' - y = x\mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

Rezultat: $y(x) = x \arcsin{(Dx)}$.

9. naloga: Reši homogeno diferencialno enačbo $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$.

Rezultat: $y(x) = \pm x \sin{(\ln Cx)}$.