6. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

MATRIČNE ENAČBE

<u>1. naloga:</u>[DN] Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Poišči matriko X, za katero velja $4A - 3X = B$!

Iz matrične enačbe lahko izrazimo neznano matriko X:

$$X = \frac{1}{3}(4A - B) = \frac{1}{3}\left(4\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

Rezultat: $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$.

<u>2. naloga:</u>[DN] Reši enačbo $Ax = b$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Matrično enačbo $Ax = b$ lahko interpretiramo kot sistem 3 linearnih enačb za 3 neznanke. Rešimo jo, tako da z operacijami, ki ohranjajo rang, prevedemo: $[A|b] \rightsquigarrow [I|x]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 7 & 5 & -1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 2.vr. + 1.vr. \\ 3.vr. + 2.vr. \end{array}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 3.vr. + 8 \times 2.vr. \\ 2.vr. \times (-1) \\ \hline 1.vr. + 2 \times 2.vr. \\ 3.vr. : (-2) \end{array}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 1.vr. - 3 \times 3.vr. \\ \hline 1.vr. : 2 \end{array}$$

Matrično enačbo $Ax = b$ lahko rešimo tudi, tako da izrazimo $x = A^{-1}b$, izračunamo inverz matrike A in produkt inverza ter vektorja b.

Rezultat: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. naloga: Reši matrično enačbo $AX = B$, kjer sta $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

NAMIG: Matrično enačbo $AX = B$ lahko rešimo, tako da z operacijami, ki ohranjajo rang, prevedemo: $[A|B] \rightsquigarrow [I|X]$.

Rezultat: Enačba nima rešitve ($\det A = 0$).

4. naloga: Reši matrično enačbo $XA = B$, kjer sta $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

NAMIG: Matrično enačbo $XA = B$ najprej transponiramo, da dobimo enačbo $A^T X^T = B^T$.

Rezultat: $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. naloga: Reši matrično enačbo $AXB = C$, kjer so $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ in $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$.

NAMIG: Iz matrične enačbe $AXB = C$ izrazimo $X = A^{-1} C B^{-1}$.

Rezultat: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

VEKTORSKI PROSTORI IN LINEARNE PRESLIKAVE

LINEARNA NEODVISNOST VEKTORJEV

Množica vektorjev $x_1, \ldots, x_n \in V$ je linearno neodvisna, če velja:

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}_{\text{linearna kombinacija}} = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Vidimo, da so vektorji linearno neodvisni, kadar ima dan homogen sistem samo trivialno rešitev, zato sledi:

- če $\det A \neq 0$, so vektorji linearno *neodvisni*,

- če $\det A = 0$, so vektorji linearno *odvisni*,

kjer matriko A dobimo tako, da dane vektorje zložimo v stolpce.

6. naloga: Ali so dani vektorji $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni?

Rezultat: $\det A = 6 \neq 0$: vektorji so linearno neodvisni.

7. naloga: Ali so dani vektorji $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni? Če niso, zapiši drugi vektor kot linearno kombinacijo prvega in tretjega vektorja.

Rezultat: $\det A = 0$: vektorji so linearno odvisni; $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Baza vektorskega prostora

Baza imenujemo vsako največjo množico linearno neodvisnih vektorjev. Število vektorjev v bazi je enako dimenziji vektorskega prostora.
Standardna baza v prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{e_1} = [1, 0, \ldots, 0]^T, \vec{e_2} = [0, 1, 0, \ldots, 0]^T, \ldots, \vec{e_n} = [0, 0, \ldots, 1]^T.$$

Vsak vektor danega vektorskega prostora lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev!

8. naloga: Pokaži, da vektorji $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Nato zapiši vektor $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ kot linearno kombinacijo vektorjev x_1, x_2 in x_3.

Rezultat: $\det A = 9 \neq 0$: vektorji so linearno neodvisni, ker so trije, tvorijo bazo $\mathbb{R}^3$; $y = x_1 + x_2 + x_3$.

Linearne preslikave

Preslikava $\mathcal{T} : U \to V$ imenujemo linearna preslikava med vektorskima prostoroma U in V, če velja:

$$\mathcal{T}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\mathcal{T}(\vec{x}) + \beta\mathcal{T}(\vec{y}).$$

Bazni vektorji $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ prostora U se z linearno preslikavo $\mathcal{T}$ preslikajo v bazne vektorje $\mathcal{T}(\vec{e_1}), \ldots, \mathcal{T}(\vec{e_n})$ prostora V.

Linearno preslikavo $\mathcal{T}$ predstavimo z matriko T, katere stolpci so $\mathcal{T}(\vec{e_1}), \ldots, \mathcal{T}(\vec{e_n})$. Sliko vektorja $\vec{x}$ tedaj dobimo tako, da matriko z njim pomnožimo: $\mathcal{T}(\vec{x}) = T \cdot \vec{x}$.

9. naloga:^{DN} Linearna preslikava preslika standardne bazne vektorje v vektorje $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. V kateri vektor se preslika vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

Matriko linearne preslikave v standardni bazi sestavimo iz slik standardne baze, to je podane vektorje zložimo v stolpce matrike A, ki predstavlja linearno preslikavo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sliko vektorja $\vec{x}$ sedaj dobimo, tako da pomnožimo matriko A in vektor $\vec{x}$:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Rezultat: $\vec{y} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ -6 \end{bmatrix}$.

10. naloga: Poišči matriko linearne preslikave v standardni bazi, ki preslika vektorje $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ v vektorje $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Določi še sliko vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Kateri vektor se preslika v $\begin{bmatrix} -13 \\ -3 \\ -12 \end{bmatrix}$?

Rezultat: $A = \begin{bmatrix} -45 & -32 & 28 \\ -8 & -5 & 5 \\ -37 & -25 & 21 \end{bmatrix}$, $A \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} -58 \\ -11 \\ -49 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

11. naloga: Dan je vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$. Preslikava τ preslika vektor $\vec{v}$ v vektor $\vec{a} \times \vec{v}$. Dokaži, da je preslikava τ linearna in poišči njeno matriko T v standardni bazi. Poišči tudi vektor, ki se preslika v $\vec{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Namig: Da je τ linearna preslikava, dokažemo po definiciji. Matriko T dobimo tako, da pogledamo, kam se slikajo standardni bazni vektorji. Vektor $\vec{x}$, ki se preslika v vektor $\vec{b}$, dobimo tako, da rešimo sistem linearnih enačb $T\vec{x} = \vec{b}$.

Rezultat: $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \vec{x} \in \{ \begin{bmatrix} 7-2z \\ 15-5z \\ z \end{bmatrix}; z \in \mathbb{R}\}$.

12. naloga:[DN⋆] Zapiši matriko linearne transformacije s predpisom $\tau(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$ v nestandardni (!) bazi $\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\vec{b_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Določi tudi sliko vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, ki je zapisan v standardni bazi.

Matriko T linerane transformacije τ v nestandardni bazi $\vec{b_1}$ in $\vec{b_2}$ dobimo tako, da sliki vektorjev $\vec{b_1}$ in $\vec{b_2}$ zložimo v stolpce iskane matrike T. Pri tem moramo tudi sliki vektorjev $\vec{b_1}$ in $\vec{b_2}$ zapisati v bazi $\vec{b_1}$ in $\vec{b_2}$. To je:

$$\tau(\vec{b_1}) = \tau(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{st.\ baza}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}_{st.\ baza} = 5\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}_{baza\ b_1, b_2},$$

$$\tau(\vec{b_2}) = \tau(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{st.\ baza}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}_{st.\ baza} = -\vec{b_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{baza\ b_1, b_2}.$$

Sledi matrika preslikave τ v bazi, sestavljeni iz vektorjev $\vec{b_1}$ in $\vec{b_2}$:

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrika bi v standardni bazi imela obliko

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sliko vektorja $\vec{a}$ dobimo direktno iz predpisa ali tako, da matriko T pomnožimo z vektorjem $\vec{a}$, ki mora biti zapisan v ustrezni bazi:

$$T\vec{a} = T_{baza\ \vec{b_1}, \vec{b_2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}_{st.\ baza} = T_{baza\ \vec{b_1}, \vec{b_2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{baza\ \vec{b_1}, \vec{b_2}} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}_{baza\ \vec{b_1}, \vec{b_2}} = 10\vec{b_1} - \vec{b_2}.$$

Pri tem smo morali vektor $\vec{a}$ še prej zapisati v bazi vektorjev $\vec{b_1}$ in $\vec{b_2}$:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}_{st.\ baza} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{st.\ baza} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{st.\ baza} = 2\vec{b_1} + \vec{b_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{baza\ \vec{b_1}, \vec{b_2}}.$$

Rezultat: $T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, T\vec{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}_{baza\ \vec{b_1}, \vec{b_2}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}_{st.\ baza}.$