5. vaja iz Matematike 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

MATRIKE-NADALJEVANJE

Rang matrike

1. naloga: Poišči število λ, pri katerem ima matrika $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ najmanjši rang.

Rezultat: $r(A) = 2$ za $\lambda = 0$ in $r(A) = 3$ za $\lambda \neq 0$.

Računanje inverzne matrike z Gaussovo eliminacijo

Razširjeno matriko $[A|I]$ transformiramo z operacijami, ki ohranjajo rang, do oblike $[I|A^{-1}]$, tj. razširjene matrike, ki ima na levi strani identiteto. Na ta način dobimo na desni strani inverzno matriko A^{-1} matrike A.

$$[A|I] \rightsquigarrow^{\text{transformacija}} \rightsquigarrow [I|A^{-1}]$$

Operacije, ki ohranjajo rang matrike:

i.) dve vrstici lahko med seboj zamenjamo,

ii.) vrstico lahko pomnožimo s poljubnim neničelnim številom,

iii.) vrstici lahko prištejemo poljubni večkratnik kake druge vrstice.

2. naloga: Z Gaussovo eliminacijo izračunaj inverz matrik:

a.) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ -8 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

Rezultat: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b.) $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Rezultat: $B^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$.

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Dan je sistem m enačb z n neznankami:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Sistem lahko zapišemo v matrični obliki $Ax = b$, kjer je A matrika koeficientov, b pa vektor vrednosti z desne strani sistema.

Sestavimo razširjeno matriko $R = [A|b]$ in z Gaussovo eliminacijo pretvorimo R v obliko, ki ima pod glavno diagonalo same 0. Tedaj lahko rešitve sistema direktno izrazimo. Pri tej transformaciji uporabljamo operacije, ki ohranjajo rang matrik:

- i.) dve vrstici med seboj zamenjamo,
- ii.) vrstico pomnožimo s poljubnim neničelnim številom,
- iii.) vrstici prištejemo poljubni večkratnik kake druge vrstice.

Za rešljivost sistema linearnih enačb velja naslednje:

1. Sistem $Ax = b$ je rešljiv $\Leftrightarrow r(A) = r(R) =: r$.
2. Če je $r = n \Rightarrow$ rešitev je ena sama.
3. Če je $r < n \Rightarrow$ rešitev je $(n-r)$-parametrična družina (za $n - r$ neznank lahko izberemo poljubne vrednosti).

<u>3. naloga</u>: Reši sisteme linearnih enačb:

a.) ^{DN}

$$\begin{aligned} 2x-3y+z &= 0\\ x-2y+3z &= 0\\ x+y+z &= 13 \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema in delamo ničle pod glavno diagonalo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13\\ 0 & 1 & -5 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -13 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13\\ 0 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -13 & 13 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 1.vr. - 2\times 2.vr.\\ 2.vr. - 3.vr.\\ \text{premešamo vr. 3.} \to 1.\\ \hline 3.vr. + 3\times 2.vr. \end{array}$$

Vidimo, da je rang matrike koeficientov enak 3, rang razširjene matrike je tudi 3. Sledi, da je sistem rešljiv. Ker sta ranga enaka, je rešitev ena sama (sistem zapišemo od spodaj navzgor):

$$\begin{aligned} -13z &= -13,\\ y-5z &= 0,\\ x+y+z &= 13, \end{aligned}$$

torej $z=1$, $y=5$, $x=7$.

Rezultat: $x=7$, $y=5$, $z=1$.

b.) ^{DN}

$$\begin{aligned} 2x+3y+2z &= 9\\ x+2y-3z &= 14\\ 3x+4y+z &= 16 \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema in delamo ničle pod glavno diagonalo:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 9\\ 1 & 2 & -3 & 14\\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right] &\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14\\ 0 & -1 & 8 & -19\\ 0 & -2 & 10 & -26 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 1.vr. - 2\times 2.vr.\\ 3.vr. - 3\times 2.vr.\\ \text{premešamo vr. 2.} \to 1. \end{array}\\ &\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14\\ 0 & -1 & 8 & -19\\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right] \quad 3.vr. - 2\times 2.vr. \end{aligned}$$

Vidimo, da je rang matrike koeficientov enak 3, rang razširjene matrike je tudi 3. Sledi, da je sistem rešljiv. Ker sta ranga enaka, je rešitev ena sama (sistem zapišemo od spodaj navzgor):

$$\begin{aligned} -6z &= 12,\\ -y+8z &= -19,\\ x+2y-3z &= 14, \end{aligned}$$

torej $z=-2$, $y=3$, $x=2$.

Rezultat: $x=2$, $y=3$, $z=-2$.

c.)

$$\begin{aligned} 2x+3y-2z &= 5 \\ x-2y+3z &= 2 \\ 4x-y+4z &= 1 \end{aligned}$$

Rezultat: Sistem ni rešljiv (nima rešitve).

d.)

$$\begin{aligned} 2x+2y-z+t &= 4 \\ 4x+3y-z+2t &= 6 \\ 8x+5y-3z+4t &= 12 \\ 3x+3y-2z+2t &= 6 \end{aligned}$$

Rezultat: $x=1$, $y=1$, $z=-1$, $t=-1$.

e.)

$$\begin{aligned} 2x+3y+2z &= 2 \\ x+2y-3z &= 3 \\ x+y+5z &= -1 \end{aligned}$$

Rezultat: $x=-13z-5$, $y=8z+4$, $z=$ poljuben.

f.)

$$\begin{aligned} x+y+2z+3u-v &= 5 \\ x+2y+z+5u-v &= 5 \\ -x+y-4z+2u &= -3 \\ 2x-y+7z-2u &= 6 \end{aligned}$$

Rezultat: $x=-3z+3$, $y=z-2v-4$, $z=$ poljuben, $u=v+2$, $v=$ poljuben.

4. naloga: Obravnavaj rešljivost sistema:

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 1 \\ \lambda x &= 9 \\ \lambda x+2\lambda y-z &= 2 \end{aligned}$$

Rezultat: $\lambda=0$ ali $\lambda=-1$: sistem nima rešitve; $\lambda\neq 0,-1$: sistem ima eno rešitev, to je $x=\frac{9}{\lambda}$, $y=-\frac{3(2\lambda+3)}{2\lambda(\lambda+1)}$, $z=\frac{\lambda-2}{\lambda+1}$.

5. naloga: Kateremu pogoju morajo zadoščati parametri a, b in c, da bo spodnji sistem enačb rešljiv? Reši sistem za vrednosti parametrov $a=12$, $b=-8$ in $c=-\frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2 &= 4 \\ x_1-4x_2 &= -1 \\ 7x_1+10x_2 &= a \\ 5x_1+6x_2 &= -b \\ 3x_1-16x_2 &= 2c \end{aligned}$$

Rezultat: pogoj: $a = 12$, $b = -8$ in $c = -\frac{5}{2}$; rešitev: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

<u>6. naloga:</u>[DN] Določi parameter k tako, da bo sistem rešljiv:

$$\begin{aligned} -x - y - z &= -1 \\ -y + 3z &= 3 \\ 3x + 2y + kz &= 3 \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema in delamo ničle pod glavno diagonalo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & k & 3 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & k-3 & 0 \end{array}\right] \quad 3.vr. + 3 \times 1.vr.$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & k-6 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 1.vr. \times (-1) \\ 3.vr. - 2.vr. \end{array}$$

Sistem bo rešljiv, če bosta ranga osnovne in razširjene matrike enaka, v tem primeru 3. To bo res, če bo $k - 6 \neq 0$ oz. $k \neq 6$.

Ko je $k \neq 6$, imamo sistem:

$$\begin{aligned} (k-6)z &= -3, \\ -y + 3z &= 3, \\ x + y + z &= 1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $z = \frac{3}{6-k}$, $y = \frac{3(k-3)}{6-k}$ in $x = \frac{4(3-k)}{6-k}$.

Rezultat: $k \neq 6$; $x = \frac{4(3-k)}{6-k}$, $y = \frac{3(k-3)}{6-k}$, $z = \frac{3}{6-k}$.

<u>7. naloga:</u>[DN] Kateremu pogoju morajo zadoščati parametri a, b in c, da bo spodnji sistem enačb rešljiv? Reši sistem za vrednosti parametrov $a = -12$, $b = 7$ in $c = -9$.

$$\begin{aligned} 2x - 7y - 7z &= a \\ -x + 2y + 3z &= b \\ x + y - 2z &= c \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema in delamo ničle pod glavno diagonalo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -7 & -7 & a \\ -1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & 3 & 1 & b+c \\ 0 & -9 & -3 & a-2c \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 2.vr. + 3.vr. \\ 1.vr. - 2 \times 3.vr. \\ \hline \text{premešamo vrstice: } 3. \to 1. \end{array}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & 3 & 1 & b+c \\ 0 & 0 & 0 & a+3b+c \end{array}\right] \quad 3.vr. + 3 \times 2.vr.$$

Sistem bo rešljiv, če bosta ranga osnovne in razširjene matrike enaka, v tem primeru 2. To bo res, če bo $a + 3b + c = 0$.

Ko so $a = -12$, $b = 7$ in $c = -9$, dobimo sistem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ker se ranga osnovne in razširjene matrike razlikujeta za 1, dobimo 1-parametrično rešitev sistema. Iz druge vrstice sledi $3y + z = -2$ oz. $z = -2 - 3y$ in za parameter izberimo y. Iz prve vrstice tedaj sledi še $x + y - 2z = -9$ oz. $x = -9 - y + 2z = -9 - y + 2(-2 - 3y) = -7y - 13$.

Rezultat: $a + 3b + c = 0$; $x = -7y - 13$, $y =$ poljuben, $z = -3y - 2$.

Homogeni sistem linearnih enačb

Homogeni sistem lineranih enačb v matrični obliki: $Ax = 0$.

Velja:

i.) Trivialna rešitev $x = (0, 0, \ldots, 0)^T$ vedno obstaja (ker je $r(A) = r(R)$).

ii.) Kvadratni sistem ima netrivialno rešitev $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$.

iii.) Če je enačb manj kot neznank ($m < n$), netrivialna rešitev vedno obstaja.

iv.) Če sta x in y različni rešitvi homogenega sistema, je tudi $z = \alpha x + \beta y$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) rešitev sistema.

8. naloga: Ali ima homogeni sistem netrivialno rešitev? Če jo ima, jo izračunaj.

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ x - 8y + 8z &= 0 \\ 3x - 2y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

Rezultat: $\det A = 0 \Rightarrow$ sistem ima netrivialno rešitev, to je $x = -\frac{8}{11}z$, $y = \frac{10}{11}z$, $z =$ poljuben.