8. vaja iz Matematike 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

Taylorjeva vrsta (primer potenčne vrste)

Razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = a$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{Taylorjeva vrsta} \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m}_{\text{Taylorjev polinom stopnje } m} + \underbrace{R_m}_{\text{ostanek}} \end{aligned}$$

Taylorjev polinom (stopnje n) je najboljši polinomski približek (stopnje n) dane funkcije!

Razvoj nekaterih elementarnih funkcij okrog točke $x = 0$:

a.) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad |x| < \infty$

b.) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad |x| < \infty$

c.) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad |x| < \infty$

d.) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; \quad |x| < 1$

e.) Binomska formula: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n; \quad |x| < 1$

f.) Geometrijska vrsta: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad |x| < 1$

1. naloga: Razvij funkcijo v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 in določi območje konvergence vrste:

a.) ^{DN} $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 2$

Polinom $p(x)$ je sam svoj najboljši polinomski približek. Taylorjeva vrsta poljubnega polinoma je povsod ($|x| < \infty$) enaka temu polinomu.

Rezultat: $T(x) = p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 2$; $|x| < \infty$.

b.) ^{DN} $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

Uporabimo razvoj funkcije e^x v Taylorjevo vrsto okrog točke 0:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad |x| < \infty.$$

V zgornjo vrsto namesto x vstavimo $-2x$ in dobimo:

$$\mathrm{e}^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n; \quad |-2x| < \infty.$$

Območje konvergence, ki je podano z neenakostjo $|-2x| < \infty$, po deljenju z 2 preide v obliko $|x| < \infty$.

Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n$; $|x| < \infty$.

c.) $g(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$

Rezultat: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n!}$; $|x| < \infty$.

d.) $h(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

Namig: Parcialni ulomki.
Rezultat: $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n$; $|x| < 2$.

e.) $i(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Rezultat: $i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$; $|x| < 1$.

f.) $j(x) = \arcsin x$

Namig: $j(x) + C = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
Rezultat: $j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $|x| < 1$.

2. naloga: Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke x_0. Določi tudi območje konvergence.

a.) ^{DN} $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0 = 1$

Ker je

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} = (1 + (x-1))^{-3},$$

uporabimo binomsko formulo:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n; \quad |x| < 1.$$

V binomsko formulo namesto α vstavimo -3, namesto x pa $x-1$ in dobimo:

$$f(x) = (1 + (x-1))^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (x-1)^n; \quad |x-1| < 1.$$

Območje konvergence, ki je podano z neenakostjo $|x-1|<1$, opisuje interval $(0,2)$. Binomski simbol pa lahko preoblikujemo:

$$\begin{aligned}\binom{-3}{n} &= \frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+2)}{n!} = (-1)^n \frac{\frac{(n+2)!}{2}}{n!} = \\ &= (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)n!}{2 \cdot n!} = (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{2} (x-1)^n$; $|x-1|<1$.

b.) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$, $x_0 = 1$

Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+3}} \binom{-3}{n} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+3}} \frac{(n+1)(n+2)}{2} (x-1)^n$; $|x-1|<4$.

c.) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $x_0 = 2$

Namig: Parcialni ulomki.
Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3^{n+1}+1)}{2 \cdot 3^{n+1}} (x-2)^n$; $|x-2|<1$.

<u>3. naloga</u>: S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj vrednost $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ na tri decimalke natančno.

Taylorjeva vrsta funkcije e^x okrog točke 0 je bila

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad |x| < \infty.$$

Ker je

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},$$

iskani približek dobimo, tako da v zgornjo vrsto namesto x vstavimo $-\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(-\frac{1}{2})^4}{4!} + \frac{(-\frac{1}{2})^5}{5!} + \cdots.$$

Zdaj računamo zaporedje delnih vsot:

$$\begin{aligned}S_0 &= 1, \\ S_1 &= 1 + (-\frac{1}{2}) = 0.5, \\ S_2 &= 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} = 0.625, \\ S_3 &= 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} = 0.60416..., \\ S_4 &= 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(-\frac{1}{2})^4}{4!} = 0.60677..., \\ S_5 &= 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(-\frac{1}{2})^4}{4!} + \frac{(-\frac{1}{2})^5}{5!} = 0.60651...\end{aligned}$$

Ker je vsak naslednji člen zgornje alternirajoče vrste manjši od prejšnjega, se prva tri decimalna mesta ne bodo več spremenila.

Rezultat: $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.606$.

4. naloga: S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{n}}$ do vključno potence x^3 izračunajte približno vrednost korena $\sqrt{198}$.

Rezultat: $(1+\frac{1}{98})^{\frac{1}{2}} = 1.00508909...$, $\sqrt{198} = 14.07124728....$

5. naloga: S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{4x^2}.$$

Rezultat: $\frac{1}{2}$.

6. naloga: Izračunaj približno vrednost števila π.

Namig: $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$

Rezultat: 3.14159....

7. naloga: Z uporabo Taylorjeve vrste izračunaj naslednje integrale na tri decimalke natančno:

a.) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\, dx$,

Rezultat: 1.605.

b.) ^{DN} $\int_0^1 \cos x^2\, dx$.

Funkcijo $\cos x^2$ razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke 0:

$$\cos x^2 = 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} - \frac{(x^2)^6}{6!} + \frac{(x^2)^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}.$$

Sedaj namesto funkcije integriramo njeno Taylorjevo vrsto:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos x^2\, dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1 x^{4n}\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{4n+1}.\end{aligned}$$

Dobili smo točno vrednost integrala, zapisano z vrsto. Zdaj je treba določiti še približno vrednost, ki se bo na prvih treh decimalkah ujemala s točno vrednostjo.

Računamo zaporedje delnih vsot:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1, \\ S_1 &= S_0 - \frac{1}{10} = 0.9, \\ S_2 &= S_1 + \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0.90462..., \\ S_3 &= S_2 - \frac{1}{13 \cdot 6!} = 0.90452... \end{aligned}$$

Ker je vsak naslednji člen zgornje alternirajoče vrste manjši od prejšnjega, se prva tri decimalna mesta ne bodo več spremenila.

Rezultat: 0.904.