2. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

VEKTORJI - NADALJEVANJE

Vektorski produkt

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -(a_1 b_3 - a_3 b_1), a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, za katerega velja:

i.) [smer] $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ in pravilo desnega vijaka (vektorski produkt ima smer, v katero bi se pomaknil desni vijak, če bi ga zavrteli od $\vec{a}$ do $\vec{b}$ po najbližji poti),

ii.) [dolžina] dolžina $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$: antikomutativnost

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

Velja: $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$.

1. naloga: Izračunaj vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ in $\vec{b} = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

Rezultat: $\vec{a} \times \vec{b} = (7, -8, 13), \vec{b} \times \vec{a} = (-7, 8, -13)$.

2. naloga:[DN] Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ in $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (14, -42, -21)$$

Ploščina paralelograma je tedaj

$$p = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = \sqrt{2401} = 49.$$

Rezultat: 49.

3. naloga: Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči $A(1,0,1)$, $B(2,2,1)$ in $C(4,-3,-2)$. Določi tudi kot α.

Rezultat: $\frac{3}{2}\sqrt{14}, \alpha = 104°58'$.

4. naloga: Kolikšna je ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja $2\vec{a} + 4\vec{b}$ in $\vec{a} - 3\vec{b}$, če je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\frac{\pi}{6}$?

Rezultat: 20.

5. naloga: Poenostavi izraz $\vec{\imath} \times (\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}) - \vec{\jmath} \times (\vec{\imath} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + \vec{k} \times \vec{\imath}$!

Rezultat: $-2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$.

Mešani produkt

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{c} &= (c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Absolutna vrednost mešanega produkta $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ predstavlja volumen paralelepipeda, ki ga vektorji napenjajo.

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so komplanarni

6. naloga:[DN] Izračunaj volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$ in $\vec{c} = 4\vec{\jmath} + \vec{k}$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -23$$

Rezultat: 23.

7. naloga: Izračunaj prostornino tristrane piramide z oglišči $A(1,-1,2)$, $B(4,3,2)$, $C(4,4,4)$ in $D(1,5,-1)$!

Namig: $V_{piramide} = \frac{1}{6}V_{paralelepipeda}$.
Rezultat: $V = \frac{15}{2}$.

8. naloga: Dani so vektorji $\vec{a} = (\lambda, 1, 4)$, $\vec{b} = (1, -2\lambda, 0)$ in $\vec{c} = (3\lambda, -3, 4)$. Določi parameter λ tako, da bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ komplanarni!

Rezultat: $1, -1$.

9. naloga:^{DN} Pokaži, da vektorji $\vec{a} = (m, 1, 1)$, $\vec{b} = (m+2, 1, 1)$ in $\vec{c} = (-m, 1, -1)$ za nobeno vrednost parametra m ne ležijo v isti ravnini.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m+2 & 1 & 1 \\ -m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Rezultat: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ vektorji so nekomplanarni

Vektorji v ravnini in prostoru

10. naloga: Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$. Označimo $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{BC}$. Izrazi z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorje $\vec{AC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$, $\vec{AE}$, $\vec{BF}$ in $\vec{DF}$!

Rezultat: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{AD} = 2\vec{b}$, $\vec{BE} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$, $\vec{AE} = 2\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{BF} = \vec{b} - 2\vec{a}$, $\vec{DF} = -\vec{a} - \vec{b}$.

11. naloga:^{DN} Izračunaj ploščino in notranje kote trikotnika z oglišči $A(5,4,2)$, $B(0,7,-5)$ in $C(3,-2,1)$.

Vpeljimo oznake:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = (-5, 3, -7), \\ \vec{b} &= \vec{AC} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = (-2, -6, -1), \\ \vec{c} &= \vec{BC} = \vec{r_C} - \vec{r_B} = (3, -9, 6). \end{aligned}$$

Ploščina trikotnika je polovica ploščine paralelograma:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 3 & -7 \\ -2 & -6 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-45,9,36)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-45)^2+9^2+36^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3402} = \frac{9}{2}\sqrt{42}. \end{aligned}$$

Notranje kote trikotnika izračunamo takole:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{83\cdot 41}} \implies \alpha = 90^\circ 59', \\ \cos\beta &= \frac{-\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{84}{\sqrt{126\cdot 83}} \implies \beta = 34^\circ 46', \\ \cos\gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta = 54^\circ 15'. \end{aligned}$$

Rezultat: $p = \frac{9}{2}\sqrt{42}, \alpha = 90^\circ 59', \beta = 34^\circ 46', \gamma = 54^\circ 15'$.

12. naloga:^{DN*} V trikotniku ABC leži točka M na stranici BC, tako da velja $\frac{|\vec{BM}|}{|\vec{MC}|} = \lambda$. Izrazi vektor $\vec{AM}$ z vektorjema $\vec{c} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AC}$.

Naj bo $k = \frac{|\vec{BM}|}{|\vec{BC}|}$. Tedaj velja:

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{c} + k\vec{BC} = \vec{c} + k(\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{c} + k(-\vec{c} + \vec{b}).$$

Ker je

$$k = \frac{|\vec{BM}|}{|\vec{BC}|} = \frac{|\vec{BM}|}{|\vec{BM}| + |\vec{MC}|} = \frac{1}{1 + \frac{|\vec{MC}|}{|\vec{BM}|}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

velja

$$\vec{AM} = \vec{c} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(-\vec{c} + \vec{b}) = \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b} + \frac{1}{1+\lambda}\vec{c}.$$

Rezultat: $\vec{AM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{b} + \frac{1}{\lambda+1}\vec{c}$.

13. naloga: Dokaži, da se diagonali v paralelogramu razpolavljata.

14. naloga: Dokaži, da se težiščnice trikotnika razpolavljajo na $\frac{1}{3}$ svojih dolžin.

15. naloga:^{DN} Dokaži, da daljica, ki povezuje eno oglišče paralelograma z razpoloviščem nasprotne stranice, deli diagonalo v razmerju $1:2$.

Naj bo M razpolovišče stranice CD v paralelogramu $ABCD$, S pa točka, v kateri se sekata daljica AM in diagonala BD. Vpeljimo še oznaki $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{BC}$. Vektor $\vec{BS}$ izrazimo na dva načina:

$$\begin{array}{rcl} \vec{BS} &=& k\vec{BD} = k(\vec{b} - \vec{a}) \\ \vec{BS} &=& \vec{BC} + \vec{CM} + \vec{MS} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + l\vec{MA} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + l(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) \\ \hline k(\vec{b} - \vec{a}) &=& \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + l(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) \\ (-k + \frac{1}{2} + \frac{l}{2})\vec{a} &+& (k - 1 + l)\vec{b} = 0 \quad \text{linearna kombinacija lin. neodv. vekt.} \end{array}$$

Linearna kombinacija linearno neodvisnih vektorjev je enaka 0 natanko tedaj, ko sta oba koeficienta enaka 0:

$$\begin{aligned} -k + \frac{1}{2} + \frac{l}{2} &= 0, \\ k - 1 + l &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev sistema sta $l = \frac{1}{3}$ in $k = \frac{2}{3}$, torej $\vec{BS} = \frac{2}{3}\vec{BD}$.

16. naloga: Dana so tri oglišča paralelograma $ABCD$: $A(1, -2, 0)$, $B(2, 1, 3)$ in $C(-2, 0, 5)$. Izračunaj oglišče D, ploščino paralelograma in dolžino diagonale BD.

Rezultat: $D(-3, -3, 2)$, $p = \sqrt{398}$, $|\vec{BD}| = \sqrt{42}$.

17. naloga:^{DN} Dan je trikotnik z oglišči $A(2, 0, 1)$, $B(1, -2, 3)$ in $C(0, 4, 2)$. Določi težišče T trikotnika, vektor z začetkom v razpolovišču S stranice AB in koncem v težišču ter ploščino trikotnika.

Vpeljimo oznake:

$$\begin{aligned} \vec{r_A} &= (2, 0, 1), \\ \vec{r_B} &= (1, -2, 3), \\ \vec{r_C} &= (0, 4, 2), \\ \vec{a} &= \vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = (-1, -2, 2), \\ \vec{b} &= \vec{AC} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = (-2, 4, 1), \\ \vec{c} &= \vec{BC} = \vec{r_C} - \vec{r_B} = (-1, 6, -1). \end{aligned}$$

Naj bo M razpolovišče stranice AC. Računajmo:

$$\begin{aligned} \vec{r_S} &= \vec{r_B} + \frac{1}{2}\vec{BA} = \frac{1}{2}(\vec{r_A} + \vec{r_B}), \\ \vec{r_T} &= \vec{r_B} + \frac{2}{3}\vec{BM} = \vec{r_B} + \frac{2}{3}(\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}) = \vec{r_B} + \frac{2}{3}(\vec{r_A} - \vec{r_B} + \frac{1}{2}\vec{r_C} - \frac{1}{2}\vec{r_A}) = \frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}), \\ \vec{ST} &= \vec{r_T} - \vec{r_S} = \frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}) - \frac{1}{2}(\vec{r_A} + \vec{r_B}) = \frac{1}{6}(-\vec{r_A} - \vec{r_B} + 2\vec{r_C}). \end{aligned}$$

Torej $T(1, \frac{2}{3}, 2)$, $\vec{ST} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 0)$, ploščina trikotnika pa je enaka

$$p = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(-10, -3, -8)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2 + (-3)^2 + (-8)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{173}.$$

Rezultat: $T(1, \frac{2}{3}, 2)$, $\vec{ST} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 0)$, $p = \frac{\sqrt{173}}{2}$.

<u>18. naloga</u>: Vektorji $\vec{a} = \alpha\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{c} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \alpha\vec{k}$ so robovi paralelepipeda.

a.) Izračunaj prostornino paralelepipeda.

b.) Poišči vektor višine, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

c.) Določi tisto vrednost α, $-2 \leq \alpha \leq 1$, za katero je prostornina paralelepipeda največja, in tisto, za katero je najmanjša. Kakšni so pri najmanjši prostornini vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$?

Rezultat: $V = \alpha^3 - 3\alpha + 2, \vec{v} = \frac{\alpha^2+\alpha-2}{\alpha^2+2\alpha+3}(-1, -1, \alpha + 1)$, prostornina je največja pri $\alpha = -1$ in najmanjša pri $\alpha = 1$, vektorji so komplanarni.