7. vaja iz Matematike 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

VEKTORSKI PROSTORI IN LINEARNE PRESLIKAVE - NADALJEVANJE

LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI

Lastni vektor kvadratne matrike $A^{n\times n}$ je neničelni vektor $x \neq 0$, za katerega velja:

$$Ax = \lambda x,$$

kjer je λ skalar in ga imenujemo *lastna vrednost*. Lastni vektorji so tisti vektorji, katerim preslikava ohranja smer! Njihova dolžina se pri tem lahko spremeni.

Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma matrike A, torej rešitve enačbe

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti λ, dobimo kot netrivialne rešitve homogenega sistema:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

5. naloga:^{DN} Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Najprej izračunajmo lastne vrednosti, ki so ničle karakterističnega polinoma:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0.$$

Lastni vrednosti sta dve: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$. Izračunajmo še pripadajoča lastna vektorja, ki ju dobimo kot netrivialni rešitvi homogenih sistemov:

$$\lambda_1 = 5: \quad \begin{bmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{bmatrix} 1-(-1) & 4 \\ 2 & 3-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -2y \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rezultat: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6. naloga: Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

7. naloga:^{DN*} Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Najprej izračunajmo lastne vrednosti, ki so ničle karakterističnega polinoma:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(1-\lambda)-2(1+\lambda) = -(1+\lambda)(1+\lambda^2) = 0.$$

Lastne vrednosti so tri: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$, $\lambda_3 = -\mathrm{i}$. Imamo torej tudi dve kompleksni lastni vrednosti. Izračunajmo še pripadajoče lastne vektorje, ki jih dobimo kot netrivialne rešitve homogenih sistemov:

$$\lambda_1 = -1 : \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{array}{c} x = 0 \\ z = -y \end{array}} \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \mathrm{i} : \quad \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & -1 & -1 \\ 1 & -1-\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & -1-\mathrm{i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{array}{c} y = z \\ x = (1+\mathrm{i})z \end{array}} \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -\mathrm{i} : \quad \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 & -1 \\ 1 & -1+\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & -1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1+\mathrm{i} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{array}{c} y = z \\ x = (1-\mathrm{i})z \end{array}} \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rezultat: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$, $\lambda_3 = -\mathrm{i}$, $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. naloga: Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = -2$, $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. naloga: Določi parameter a, tako da bo 0 lastna vrednost matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat: $a = -\frac{3}{4}$.

POTENČNE VRSTE

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Konvergenčni radij (polmer) potenčne vrste izračunamo takole:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Potenčna vrsta je

- enakomerno in absolutno konvergentna, če je $|x-a| < R$, in
- divergentna, če je $|x-a| > R$.

Če je $|x-a| = R$, to je v primerih $x = a+R$ in $x = a-R$, konvergenco preverimo kot konvergenco številske vrste.

Spomnimo se kriterijev za konvergenco številske vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

a.) Vrste s pozitivnimi členi:

- Kvocientni kriterij: $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, za $q < 1$ konvergira, za $q > 1$ divergira,
- Korenski kriterij: $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, za $q < 1$ konvergira, za $q > 1$ divergira,
- Primerjalni kriterij: $0 \leq a_n \leq b_n$ od nekje naprej
  - $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira,
  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergira.

b.) Alternirajoče vrste:

- Leibnitzov kriterij: Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira, če zaporedje a_n od nekje naprej monotono pada proti 0.

10. naloga: Določi konvergenčni polmer potenčne vrste in izračunaj vsoto vrste v središču:

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (x-3)^n$

Rezultat: $R = 2$, območje konvergence $(1, 5)$, vsota pri $x = 3$ je 0.

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} x^n$

Rezultat: $R = \infty$, območje konvergence $(-\infty, \infty)$, vsota pri $x = 0$ je 1.

11. naloga: Določi konvergenčno območje potenčnih vrst:

a.) ^{DN} $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+4}$

Najprej izračunajmo konvergenčni polmer potenčne vrste:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+4}}{\frac{1}{n+5}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+5}{n+4} \right| = 1.$$

Sedaj vemo, da vrsta konvergira za $x \in (-2, 0)$ in divergira za $x > 0$ ter $x < -2$. Kaj se dogaja v krajiščih intervala, še ne vemo. Konvergenco v krajiščih $x = -2$ in $x = 0$ preverimo, tako da dano vrednost x vstavimo v potenčno vrsto (dobimo številsko vrsto) in konvergenco preverimo z enim od kriterijev za konvergenco številskih vrst:

- $x = -2$: Dobimo alternirajočo številsko vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2+1)^n}{n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4},$$

  ki je po Leibnitzovem kriteriju konvergentna (zaporedje $a_n = \frac{1}{n+4}$ monotono pada proti 0).

- $x = 0$: Dobimo harmonično številsko vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0+1)^n}{n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4},$$

  za katero vemo, da divergira.

Sledi konvergenčno območje $[-2, 0)$.

Rezultat: $R = 1$, območje konvergence: $[-2, 0)$.

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$

Rezultat: $R = 0$, območje konvergence: $\{0\}$.

c.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-3)^n$

Rezultat: $R = 1$, območje konvergence: $(2, 4]$.