MATEMATIKA II
zapiski z avditornih vaj

Šolsko leto	2007 / 2008
Izvajalec	Melita Hajdinjak
Avtor dokumenta	Aljoša Praznik
Sodelavci	Blaž Potočnik, Aljoša Praznik

UREJANJE DOKUMENTA

VERZIJA	01	**REVIZIJA**	01
DATUM	24. 2. 2009		

ZADNJI POPRAVLJAL /
PREGLEDAL Blaž Potočnik, Aljoša Praznik

OPOMBE

Stran 51 nikoli ni obstajala.

POPRAVKI

FE-UNI

Matematika II. - vaje

2007/2008

18.02.2008

Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

glavna diagonala

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{matrix} = +1+0+0-4-0-0 = -3$$

1. Izračunaj determinanto

a.) $$\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1+a} \end{vmatrix} = \frac{1+a^2}{1-a} \cdot \frac{1+a^2}{1+a} - \frac{2a}{1-a^2} \cdot \frac{2a}{1-a^2} = \frac{(1+a^2)^2}{1-a^2} - \frac{4a^2}{(1-a^2)^2} = \frac{(1-a^2)(1+a^2)^2 - 4a^2}{(1-a^2)^2}$$

$a \in \mathbb{R},\ a \neq 1, -1$

b.) $$\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 0 & 1+2i \\ 2-i & 1-2i & 0 \end{vmatrix} = \qquad R = 2$$

2. Za katere vrednosti t je determinanta enaka 0?

$$\left|\begin{matrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} t-1 & 3 \\ -3 & t+5 \\ -6 & 6 \end{matrix} = (t-1)(t+5)(t-4) + 54 + 54 - 18(t+5) + 18(t-1) + 9(t-4) =$$

$$= (t-1)(t+5)(t-4) + \cancel{108} \cancel{-18t} \cancel{-90} + \cancel{18t} \cancel{-18} + 9t - 36 =$$

$$= (t-1)(t+5)(t-4) + 9(t-4)$$

$$= (t-4)\left(9 + (t-1)(t+5)\right)$$

$$= (t-4)(9 + t^2 + 5t - t - 5) = (t-4)(t^2 + 4t + 4) =$$

$$= (t-4)(t+2)^2 \qquad \underline{t = 4} \qquad \underline{t = -2}$$

3. Za katere vrednosti x je det. enaka 0?

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^4 & x^6 \end{vmatrix}$$

R: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1$

4. $24x^4-22x^3-11x^2+7x+2=0$

R: $x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=-\frac{1}{4},\ x_4=\frac{2}{3}$

Razvoj determinante po vrstici ali stolpcu

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot A_{ij}}_{\text{razvoj po } i\text{-ti vrstici}}$$

poddeterminanta, ki jo dobimo tako, da prečrtamo i-to vrstico in j-ti stolpec. (vr. in st. elementa a_{ij})

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot A_{ij}}_{\text{razvoj po } j\text{-tem stolpcu}}$$

2

Pravila za rač. determinant

- det. je enaka 0, če:

① kakšna vrstica $=0$ ali kakšen stolpec $=0$

② 2 vrstici ali 2 stolpca enaka

③ vrstica je večkratnik kakšne druge vrstice ali stolpec je večkratnik kakšnega drugega stolpca

- det zamenja predznak, če zamenjamo 2 vrstici oz. 2 stolpca

- det se ne spremeni, če:

① če jo transponiramo (= zrcaliti čez glavno diagonalo, zamenjati vlogo vrstic in stolpcev)

② kaki vrstici prištejemo večkratnik kake druge vrstice oz. kakemu stolpcu prištejemo večkratnik kakega drugega stolpca

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ c\,a_{i1} & \cdots & c\,a_{in} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{in} \\ & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ isto velja za stolpce

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ isto velja za stolpce

- $$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_n} \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

bločna det

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

primer bločne det

5. Izračunaj determinante, tako da jih razviješ po stolpcu ali vrstici.

a.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= -2\cdot 14 - 1\cdot(-7) = -21$

b.) $\begin{vmatrix} 15 & 25 & 40 \\ 1 & 3 & 28 \\ 5 & 2 & 24 \end{vmatrix} = 2620$

c.) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1014 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} = 100\cdot\begin{vmatrix} 246 & 1 & 327 \\ 1014 & 1 & 443 \\ -342 & 1 & 621 \end{vmatrix}$

2. stolpcu lahko odštejemo 3. st.

iz 2. st. izpostavimo 100

$= 100\begin{vmatrix} 246 & 1 & 327 \\ 768 & 0 & 116 \\ -588 & 0 & 294 \end{vmatrix} = 100\left(-1\begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -588 & 294 \end{vmatrix}\right) =$

2. vrst − 1. vrs.

3. vrst. − 1. vrst.

razvoj po 2. stolpcu

$= -100\cdot 294\begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -100\cdot 294\,(768+232) = -100\cdot 294\cdot 1000 =$

$= -29.400.000$

iz 2. vrst. izpostavimo 294

4

6. Izračunaj determinante

a.)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 20$$

3.vr. + 2×2 vrstica

4.vr. − 2×3 vrstica

b.)
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 118$$

c.)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Kramerjevo pravilo za reševanje sistemov linearnih enačb

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Če je det. sistema

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$ potem so rešitve sistema

$x_j = \frac{D_j}{D}$, kjer je D_j det., ki jo dobimo tako, da j-ti stolpec v det. D zamenjamo z vektorjem $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

7. Reši sistem s pomočjo Kramerjevega pravila

$$3y + 2x = z + 1 \qquad 2x + 3y - z = 1$$
$$3x + 2z = 8 - 5y \qquad 3x + 5y + 2z = 8$$
$$3z - 1 = x - 2y \qquad -x + 2y + 3z = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -22$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -66 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 22 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -44$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-66}{-22} = 3 \qquad y_1 = \frac{D_2}{D} = \frac{22}{-22} = -1 \qquad z_1 = 2$$

8. Za vezje na sliki poišči tokove I_1, I_2 in I_3 v posameznih tokokrogih.

$R_1 = 1\,\Omega$

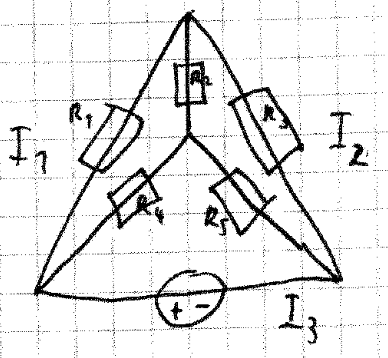
$R_2 = 2\,\Omega$

$R_3 = 2\,\Omega$

$R_4 = 2\,\Omega$

$R_5 = 3\,\Omega$

$U = 1{,}5\,V$



$$U = I \cdot R$$

$I_1 = 0{,}52\,A$

$I_2 = 0{,}49\,A$

$I_3 = 0{,}8\,A$

Skalarni produkt vektorjev

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

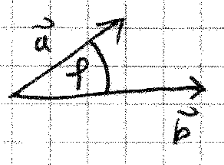
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$

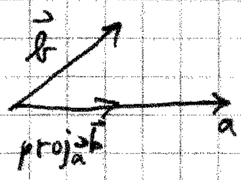
$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

$\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\mathrm{proj}_{\vec{a}} \vec{b}|$



Skalarni produkt komp. vekt.

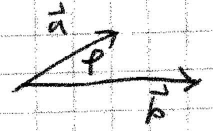
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + a_3 \overline{b_3}$

9. Izračunaj skalarni produkt

$(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$, kjer je $\vec{a}\perp\vec{b}$ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$.

R: 13

10. Izračunaj skalarni produkt



$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})$, kjer je $\varphi=\frac{\pi}{3}$ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$.

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b}) = 15\,\vec{a}\vec{a} - 18\vec{a}\vec{b} - 10\vec{a}\vec{b} + 12\vec{b}\vec{b}$$
$$= 15\cdot 4^2 - 18\cdot 4\cdot 6\cdot\tfrac{1}{2} - 10\cdot 4\cdot 6\cdot\tfrac{1}{2} + 12\cdot 6^2 = 336$$

11. Dana sta vektorja $\vec{u}=2\vec{i}+2\vec{j}$ in $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$
Določi kot med njima ter pravokotni projekciji enega na drugega.

$\vec{u}=(2,2,0)$

$\vec{v}=(2,1,1)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

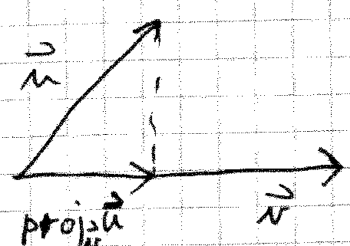
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4+2+0 = 6$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\cos\varphi = \frac{6}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}|$$

$$|\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$|\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = |\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}|\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \leftarrow \text{enotska smer } \vec{v} = \cancel{\sqrt{6}}\,\frac{(2,1,1)}{\cancel{\sqrt{6}}} = (2,1,1)$$

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = |\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}|\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{(2,2,0)}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}(2,2,0) = \frac{3}{2}(1,1,0)$$

12. Dana sta vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$. Izračunaj kot med njima

$(\vec{p}+3\vec{q}) \perp (7\vec{p}-5\vec{q})$

$(\vec{p}-4\vec{q}) \perp (7\vec{p}-2\vec{q})$

R: $\frac{\pi}{3}$

25.02.2008

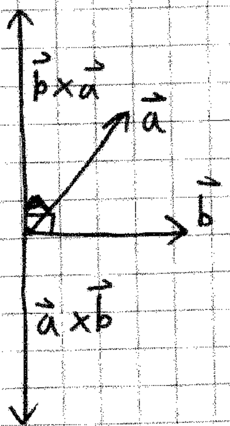
Vektorski produkt

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (a_2 b_3 - b_2 a_3, -(a_1 b_3 - b_1 a_3), a_1 b_2 - b_1 a_2)$$



SMER: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$; desni vijak

DOLŽINA: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je ploščina paralelograma, ki ga $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$: antikomutativnost

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}}$$

1. Izračunaj vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ in $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right) = (7, -8, 13)$$

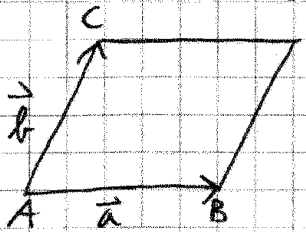
$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = (-7, 8, -13)$$

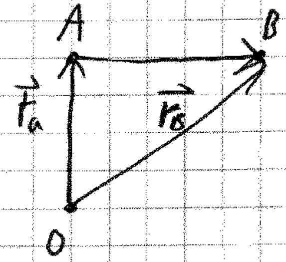
2. Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ in $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$

R: 49

3. Izračunaj ploščino trikotnika z oglijšči $A(1,0,1)$, $B(2,2,1)$, $C(4,-3,-2)$. Določi še kot α.

$$P_\triangle = \frac{1}{2} P_\square$$





$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_a = (2,2,1) - (1,0,1) = (1,2,0)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_a = (4,-3,-2) - (1,0,1) = (3,-3,-3)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \sqrt{36 + 9 + 81} = \sqrt{126} = 3 \cdot \sqrt{14}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-6, 3, -9)$$

$$P_\triangle = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \underline{\underline{\frac{3 \cdot \sqrt{14}}{2}}}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+0^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2+(-3)^2+(-3)^2} = 3\sqrt{3}$

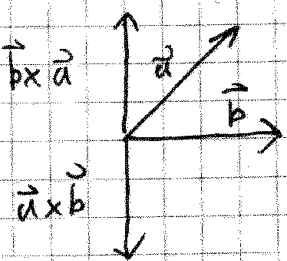
$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$

$3\sqrt{14} = \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{3}\,\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{\cancel{3}\sqrt{14}}{\sqrt{5}\cdot\cancel{3}\sqrt{3}}$

$\alpha = 104°58'$

4. Poišči vektor dolžine 1, ki je pravokoten na vektorja $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ in $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Koliko rešitev ima naloga?



$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2$$

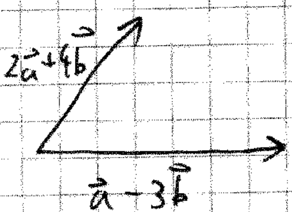
$$\vec{b}\times\vec{a} = (-1, 1, 2)$$

$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{6}$

$\vec{n}_1 = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{(1,-1,-2)}{\sqrt{6}}$

$\vec{n}_2 = \frac{\vec{b}\times\vec{a}}{|\vec{b}\times\vec{a}|} = \frac{(-1,1,2)}{\sqrt{6}}$

5. Kolikšna je ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja $2\vec{a}+4\vec{b}$ in $\vec{a}-3\vec{b}$, če je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\pi/6$?



$p_{\square} = |(2\vec{a}+4\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b})|$

$$(2\vec{a}+4\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b}) = 2\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{0} - 6\vec{a}\times\vec{b} + 4\vec{b}\times\vec{a} - 12\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{0} =$$

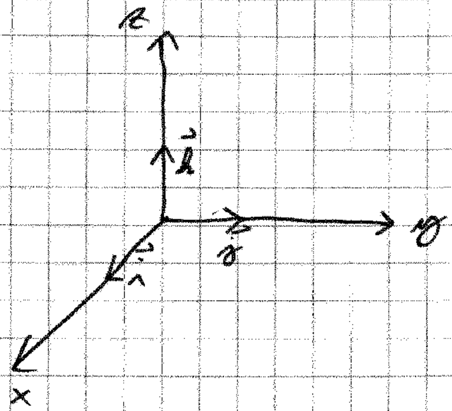
$$= -6\vec{a}\times\vec{b} - 4\vec{a}\times\vec{b} = -10\vec{a}\times\vec{b}$$

$$p_{\square} = |-10\vec{a}\times\vec{b}| = 10|\vec{a}\times\vec{b}| = 10\cdot|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\varphi = 10\cdot 2\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$1\ 2$

$= 20$

6. Poenostavi izraz $\vec{i} \times (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j}) + \vec{k} \times \vec{i}$



$$\underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_{0} - \vec{i} \times 2\vec{j} + \vec{i} \times \vec{k} - \vec{j} \times \vec{i} - \vec{j} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{i} + \vec{k} \times \vec{j} + \vec{k} \times \vec{i} =$$

$$= -\vec{i} \times \vec{k} - 2\vec{j} \times \vec{k} - 2\,\vec{i} \times \vec{j} + \vec{i} \times \vec{j} =$$

$$= \vec{j} - 2\vec{i} - \vec{k}$$

Mešani produkt

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

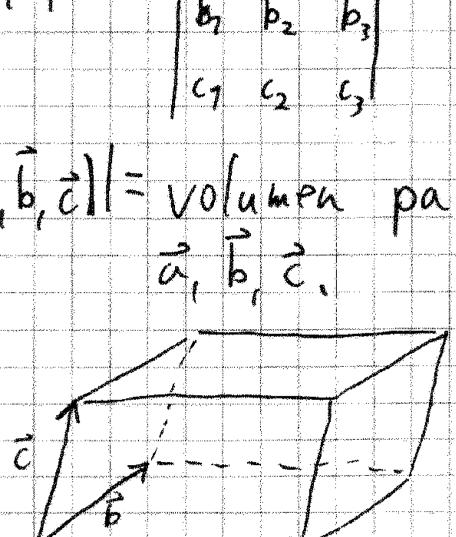
$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$\cdot$ ↑ skalarni produkt $\times$ ↑ vektorski produkt

$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ = volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

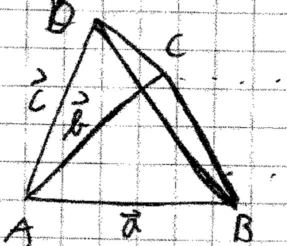
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni (ležijo v isti ravnini)

7. Izračunaj volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ in $\vec{c} = 4\vec{j} + \vec{k}$.

R: 23

8. Izračunaj volumen tristrane piramide z oglišči $A(1,-1,2)$, $B(4,3,2)$, $C(4,4,4)$, $D(1,5,-1)$.

Namig: $V_{piramide} = \frac{1}{6} V_{paralelepipeda}$



$$V_{para.} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{matrix} =$$

$$= -45 - 36 + 36 = |-45| = 45$$

$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (3, 4, 0)$

$\vec{b} = \vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (3, 5, 2)$

$\vec{c} = \vec{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0, 6, -3)$

$$V_{pir} = \frac{1}{6} V_{para} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$

9. Dani so vektorji $\vec{a}=(x, 1, 4)$, $\vec{b}=(1, -2x, 0)$ in $\vec{c}(3x, -3, 4)$. Določi parameter x tako, da bodo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left|\begin{matrix} x & 1 & 4 \\ 1 & -2x & 0 \\ 3x & -3 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x & 1 \\ 1 & -2x \\ 3x & -3 \end{matrix} = 4\cdot(-2x^2-3+6x^2-1) = 4(4x^2-4) =$$

$$= 16(x-1)(x+1) = 0$$

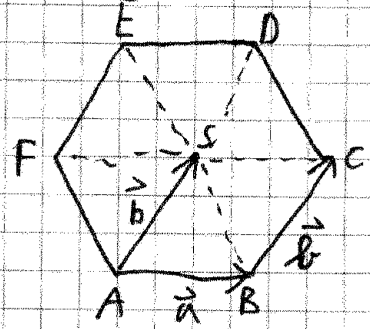
R: $x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

10. Pokaži, da vektorji $\vec{a}=(m, 1, 1)$, $\vec{b}=(m+2, 1, 1)$ in $\vec{c}=(-m, 1, -1)$ za nobeno vrednost parametra m ne ležijo v isti ravnini.

D.N.

Vektorji v ravnini

11. Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Izrazi z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorje $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}$ in $\overrightarrow{DF}$



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$\overrightarrow{CD} = -\vec{a} + \vec{b}$$
$$\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$$
$$\overrightarrow{BE} = 2 \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$
$$\overrightarrow{AE} = \vec{b} + \vec{b} - \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{a}$$
$$\overrightarrow{BF} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a} = \vec{b} - 2\vec{a}$$
$$\overrightarrow{DF} = -\vec{a} - \vec{b}$$

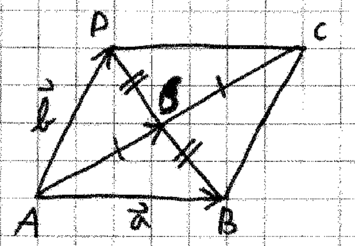
12. Izračunaj ploščino in notranje kote Δ z oglišči $A(5,4,2)$, $B(0,7,-5)$ in $C(3,-2,1)$.

R: $p = \frac{1}{2}\sqrt{3402}$, $\alpha = 90°59'$, $\beta = 34°46'$, $\gamma = 54°15°$

13. V trikotniku ABC leži točka M na stranici BC, tako da velja $\left|\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}}\right| = \lambda$. Izrazi vektor $\overrightarrow{AM}$ z vektorjema $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

R: $\overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{b} + \frac{1}{\lambda+1}\vec{c}$

14. Dokaži, da se diagonali v paralelogramu razpolavljata.



$\bullet\ \overrightarrow{AS} = k \cdot \overrightarrow{AC} = k \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

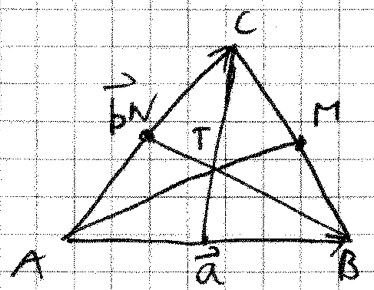
$\bullet\ \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \vec{a} + l \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{a} + l \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

$$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + l(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\underbrace{(k - 1 + l)\vec{a} + (k - l)\vec{b}}_{\text{linearna kombinacija vektorjev } \vec{a} \text{ in } \vec{b}} = 0 \qquad \boxed{t_1\vec{a} + t_2\vec{b}}$$

$$k - 1 + l = 0$$
$$k - l = 0$$
$$2k - 1 = 0$$
$$k = \frac{1}{2}, \quad l = \frac{1}{2}$$

15. Dokaži, da se težiščnice trikotnika razpolavljaja na $\frac{1}{3}$ svojih dolžin.



$\bullet\ \overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AM} = k \cdot (\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) = k \cdot (\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}))$

$\bullet\ \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \vec{a} + l \cdot \overrightarrow{BN} = \vec{a} + l \cdot (-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$

$$k \cdot (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) = \vec{a} + l \cdot (-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$$

$$(\tfrac{1}{2}k - 1 + l)\vec{a} + (\tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{2}l)\vec{b} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}k - 1 + l &= 0 \\ \tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{2}l &= 0 \end{aligned}\right) -$$

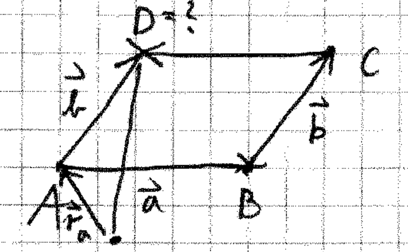
$$l = \frac{2}{3}, \quad k = \frac{2}{3}$$

18

16. Dokaži, da daljica, ki povezuje eno ogljišče paralelograma z razpoloviščem nasprotne stranice deli diagonalo v razmerju 1 : 2.

D.N.

17. Dana so tri ogljišča paralelograma ABCD: A (1, -2, 0), B(2, 1, 3) in C (-2, 0, 5). Izračunaj ogljišče D, ploščino paralelograma in dolžino diagonale BD.



$\vec{AB} = \vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{BC} = \vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{r}_D - \vec{r}_A = \vec{AD} = \vec{BC} = \vec{b}$

$\vec{r}_D = \vec{BC} - \vec{r}_A = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \qquad D(-3, -3, 2)$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = |(9, -14, 11)| = \sqrt{9^2 + (-14)^2 + 11^2} = \sqrt{81 + 196 + 121} =$$

$$= \sqrt{398}$$

18. Dan je $\triangle$ z ogljišči $A(2,0,1)$, $B(1,-2,3)$, $C(0,4,2)$. Določi težišče $T\triangle$, vektor z začetkom v razpolovišču S od AB in koncem v težišču.

R: $\vec{r_T} = \frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C})$

$T\left(1, \frac{2}{3}, 2\right)$

$\vec{ST} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 0\right)$

19. Vektorji $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \alpha\vec{k}$ so robovi paralelepipeda.

a.) Izračunaj prostornino.

b.) Poišči vektor višine, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

c.) Določi tisto vrednost α, $-2 \le \alpha \le 1$, za katero je prostornina največja oz. najmanjša.

a.) $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \left|\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}\right| = |\alpha^3 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - \alpha| =$

$= |\alpha^3 - 3\alpha + 2|$

b.) smer višine: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (1-\alpha, 1-\alpha, \alpha^2 - 1) =$

$= (1-\alpha)(1, 1, -\alpha - 1)$

$\vec{v} = \underbrace{\qquad}_{\text{dolžina}}\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{enotska smer}}$

$\vec{v_1} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{(1-\alpha)(1,1,-\alpha-1)}{\sqrt{(1-\alpha)^2(1+1+(-\alpha-1)^2}} = \frac{(1-\alpha)(1,1,-\alpha-1)}{|1-\alpha|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$

$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \underset{\substack{\| \\ |\vec{a}\times\vec{b}|}}{O} \cdot |\vec{v}|$ $\qquad |\vec{v}| = \frac{V}{|a\times b|} = \frac{|\alpha^3 - 3\alpha + 2|}{|1-\alpha|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$

$\vec{v} = \vec{v_1} \cdot |\vec{v}| = \frac{(1-\alpha)(1,1,-\alpha-1)}{|1-\alpha|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}} \cdot \frac{|\alpha^3-3\alpha+2|}{|1-\alpha|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$

$\vec{v} = \frac{|\alpha^3 - 3\alpha + 2|(1,1,-\alpha-1)}{\ldots}$

03.03.2008

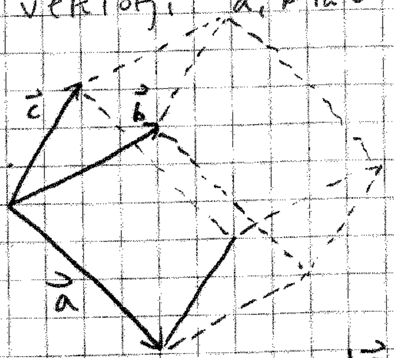
20. Vektorji $\vec{a}=\alpha\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\alpha\vec{j}+\vec{k}$ in $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ so robovi paralelepipeda.

a.) Izračunaj prostornino paralelepipeda.

$$V=\alpha^3-3\alpha+2$$

b.) Poišči vektor višine, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

c.) Določi tisto vrednost $-2\leq\alpha\leq 1$, za katero je prostornina par. največja oz. najmanjša. Kakšni so pri min. prostornini vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$.



b.) • smer $\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\end{vmatrix}=(1-\alpha, 1-\alpha, \alpha^2-1)=(\alpha-1)(-1,-1,\alpha+1)$

~~dolžina~~

$$\boxed{\text{vektor} = \text{enotska smer} \cdot \text{dolžina}}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(\alpha-1)^2(1+1+(\alpha+1)^2)}=\sqrt{(\alpha-1)^2(\alpha^2+2\alpha+3)}=|\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}$$

• enotska smer $\quad \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\dfrac{(\alpha-1)(-1,-1,\alpha+1)}{|\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$

• dolžina $\quad V=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|=\alpha^3-3\alpha+2$

$$\boxed{V=\text{osnovna ploskev}\cdot\text{višina}}=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{v}|$$

$$|\vec{v}|=\frac{\alpha^3-3\alpha+2}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{\alpha^3-3\alpha+2}{|\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$$

$$\vec{v}=\text{enotska smer}\cdot|\vec{v}|=\frac{(\alpha-1)(-1,-1,\alpha+1)}{|\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}\cdot\frac{\alpha^3-3\alpha+2}{|\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}=$$

$$\vec{v}=\frac{(\alpha-1)(\alpha^3-3\alpha+2)(-1,-1,\alpha+1)}{(\alpha-1)^2(\alpha^2+2\alpha+3)}=\frac{\cancel{(\alpha-1)}\cdot(\alpha^2+\alpha-2)(-1,-1,\alpha+1)}{\cancel{(\alpha-1)}(\alpha^2+2\alpha+3)}$$

$$\vec{v}=\frac{\alpha^2+\alpha-2}{\ldots}(-1,-1,\alpha+1)$$

c.) $V'(\alpha) = 3\alpha^2 - 3 = 0$

$3(\alpha-1)(\alpha+1) = 0$

stacionarne točke

$\boxed{\alpha_1 = 1}$ $\alpha_2 = -1$

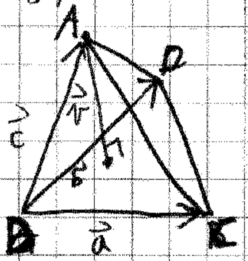
$V''(\alpha) = 6\alpha$

$V''(1) = 6 > 0$ lokalni min.

$V''(-1) = -6 < 0$ lokalni max.

$V = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so komplanarni

21. Dana so oglišča tristrane piramide $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$ $C(6,2,3)$ in $D(3,7,2)$. Izračunaj vektor višine skozi oglišče A.



• smer: $\vec{a} = \vec{BC} = (4,-1,-2)$ $\vec{c} = (-2,-3,-4)$

$\vec{b} = \vec{BD} = (1,4,-3)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (11,10,17)$$

enotski smer $\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \dfrac{(11,10,17)}{\sqrt{121+100+289}} = \dfrac{(11,10,17)}{\sqrt{510}}$

• dolžina $V = \frac{1}{3}$ osn.pl. • višina $= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{v}|$

$V = \frac{1}{6} V_{paral.} = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -120$$

$\vec{v} = \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\cdot|\vec{v}| = \dfrac{(11,10,17)}{\sqrt{510}}\cdot\dfrac{120}{\sqrt{510}}$

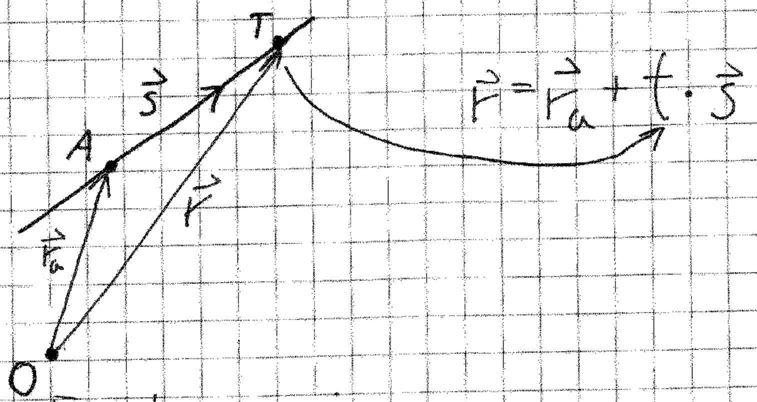
$|\vec{v}| = \dfrac{|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \dfrac{120}{\sqrt{510}} = \dfrac{120}{\sqrt{510}}$

$\vec{v} = \dfrac{12\cancel{0}}{51\cancel{0}}(11,10,17)$

$\boxed{\vec{v} = \dfrac{4}{17}(11,10,17)}$

Analitična geometrija

Premica v prostoru (točka, smernik)



Enačba premice

• vektorska oblika $\vec{r}=\vec{r_a}+t\cdot\vec{s}$

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+t\,(s_1,s_2,s_3)$$

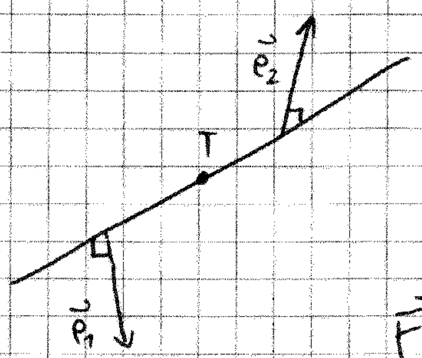
• parametrična oblika
$$x=a_1+ts_1$$
$$y=a_2+ts_2$$
$$z=a_3+ts_3$$

• kanonična oblika $t=\dfrac{x-a_1}{s_1}=\dfrac{y-a_2}{s_2}=\dfrac{z-a_3}{s_3}$

1. Zapiši enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1,0,-1)$ in je vzporedna vektorju $\vec{e}=(2,1,-5)$. Enačbo premice zapiši v vseh treh oblikah.

D.N.

2. Zapiši enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1,1,1)$ in je pravokotna na vektorje $\vec{e}_1=(2,1,1)$ in $\vec{e}_2=(3,3,0)$.

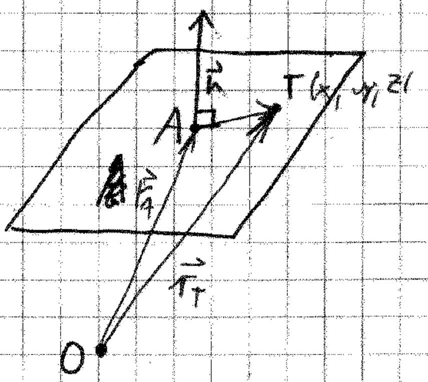


$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&1\\3&3&0\end{vmatrix}=(-3,+3,+3)$$

$$\vec{r}=\vec{r}_T+t\vec{s}$$

$$\vec{r}=(1,1,1)+t(-3,3,3)$$

Ravnina v prostoru (točka, normala)



$$\vec{AT}\perp\vec{n}:\ \vec{AT}\cdot\vec{n}=0$$

Enačba ravnine

- vektorska oblika

$$(\vec{r}_T-\vec{r}_A)\cdot\vec{n}=0$$

$$((x,y,z)-(a_1,a_2,a_3))\cdot(n_1,n_2,n_3)=0$$

- implicitna oz. splošna oblika

$$(x,y,z)\cdot(n_1,n_2,n_3)=(a_1,a_2,a_3)(n_1,n_2,n_3)$$

$$n_1x+n_2y+n_3z=d\qquad d=\vec{r}_A\cdot\vec{n}$$

3. Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(2,-3,5)$ in je pravokotna na vektor $\vec{n}=(1,-3,2)$. To enačbo tudi normiraj

$(\vec{r}-\vec{r}_A)\vec{n}=0$

$\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{r}_A\cdot\vec{n}$

$n_1x+n_2y+n_3z=d$

$x-3y+2z=21$

$d=\vec{r}_A\cdot\vec{n}$

$d=2+9+10=21$

$|\vec{n}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$

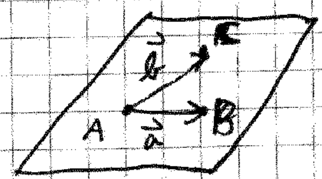
$$\frac{x-3y+2z}{\sqrt{14}}=\frac{21}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{14}}-\frac{3y}{\sqrt{14}}+\frac{2z}{\sqrt{14}}=\frac{21}{\sqrt{14}}$$

4. Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(2,3,-1)$ in je vzporedna ravnini $x-3y-2z=9$.

$R: x-3y-2z=-5$

5. Zapiši enačbo ravnine skozi točke $A(0,0,0)$, $B(4,-2,1)$ in $C(2,4,-3)$.



$\vec{AB}=\vec{a}=(4,-2,1)$

$\vec{AC}=\vec{b}=(2,4,-3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}=(2,14,20)=2(1,7,10)$$

$x_A n_1+y n_2+z n_3=\vec{r}_A\cdot\vec{n}$

$d=\vec{r}_A\cdot\vec{n}$

$d=0$

$1x+7y+10z=d$

$x+7y+10z=0$

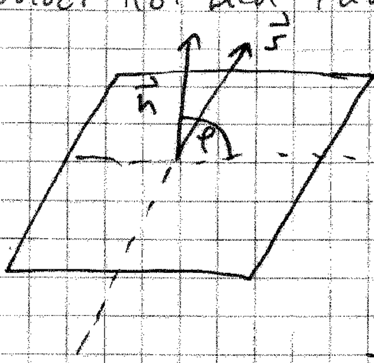
6. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko $T(0,1,2)$ in je vzporedna premicama $x = y-2 = z+3$ in $x+1 = y = z+2$.

R: $-x+y=1$

7. Določi kot med ravninama (normalama) $x-4y+8z=8$ in $x+z=6$.

R: $\pi/4$

8. Določi kot med ravnino $x-z=5$ in premico $x-z=y-1,\ z=3$.



$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{kot}(\vec{n},\vec{s})$$

$$\vec{n} = (1,0,-1)$$

$$\vec{s} = (1,1,0)$$

$$\vec{n}\cdot\vec{s} = |\vec{n}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

9. Določi presečišče ravnin $x+y+z=3$, $x+2y+3z=6$ in $2x-y+z=2$.

R: $T(1,1,1)$

10. Določi presečišče ravnin $x-3y+5z=1$ in $2x+y-z=2$.

$$\left.\begin{aligned} x-3y+5z&=1 \ /\cdot 2\\ 2x+y-z&=2 \end{aligned}\right) -$$

$$-7y+11z=0 \Rightarrow z = \frac{7}{11}y$$

prevzame vlogo t parametra

$$y = y$$

$$x =$$

$$x = 1+3y-5z$$

$$x = 1+3y-5\left(\frac{7}{11}y\right)$$

$$x = 1+3y-\frac{35}{11}y$$

$$x = 1-\frac{2}{11}y$$

$$x = a_1 + ts_1$$
$$y = a_2 + ts_2$$
$$z = a_3 + ts_3$$

Enačba premice ($y \to t$)

$$z = \frac{7}{11}t$$
$$y = t$$
$$x = 1-\frac{2}{11}t$$

11. Katera ~~točka~~ ravnina gre skozi točko $T(1,2,-1)$ in skozi presečišče ravnin $2x-z=-1$ in $4y+2z=2$.

$$\begin{aligned} 2x - z &= 1 \quad /\cdot 2 \\ 4y + 2z &= 2 \\ \hline 4x + 4y &= 0 \\ x &= -y \\ z &= 1-2y \end{aligned}$$

$x = -y$

$y = y$

$z = 1-2y$

Premica:

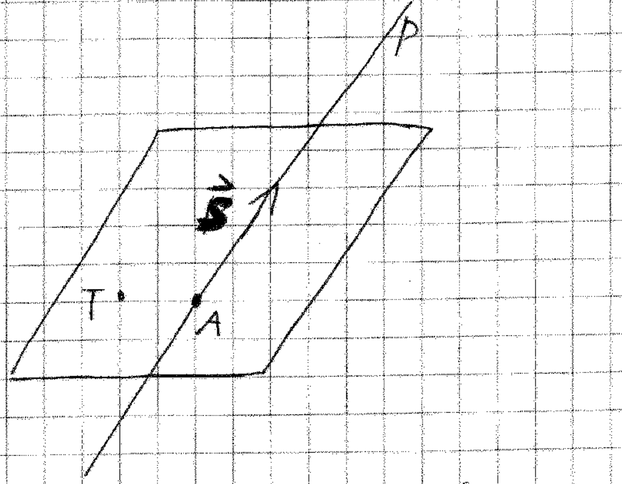
$x = -t$

$y = t$

$z = 1-2t$

$A(0,0,1)$

$s(-1,1,-2)$



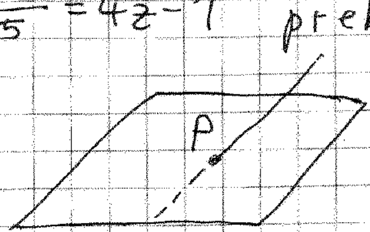
$\vec{AT} = (1,2,-1) - (0,0,1) = (1,2,-2)$

$$\vec{n} = \vec{AT} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2,4,3)$$

$-2x+4y+3z = d \qquad d = \vec{r}_T \cdot \vec{n} = (1,2,-1)\cdot(-2,4,3) = 3$

$$\boxed{-2x+4y+3z=3}$$

12. Določi točko v kateri premica $2x = \frac{3y+3}{5} = 4z-1$ prebode ravnino $2x+3y+4z=14$.



$$t = \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y+1}{\frac{5}{3}} = \frac{z-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$$

PARAM. OBLIKA

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{5}{3}t - 1 \\ z = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \end{cases}$$

DOBIMO TOČKO

$$2\cdot\overset{x}{\left(\frac{1}{2}t\right)} + 3\cdot\overset{y}{\left(\frac{5}{3}t-1\right)} + 4\overset{z}{\left(\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\right)} = 14$$

$t + 5t - 3 + t + 1 = 14$

$7t = 16$

$t = \frac{16}{7}$

$P\left(\frac{8}{7}, \frac{59}{21}, \frac{23}{28}\right)$

13. Določi presečišče premic $\vec{r}_1 = (1,2,0) + t(1,1,1)$ in $\vec{r}_2 = (2,3,1) + s(0,3,-1)$.

$$p_1: \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = t \end{array} \qquad p_2: \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3+3s \\ z = 1-s \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1+t = 2 \\ y = 2+t = 3+3s \\ z = t = 1-s \end{array}} \quad \begin{array}{l} t = 1 \\ \\ s = 0 \end{array}$$

Ali zadošča tudi 2 enačbi?

$2+1 = 3+3\cdot 0$ ✓

$P(2,3,1)$

14. Kolikšen mora biti parameter λ, da se premici $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{\lambda}$ in $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{4}$ sekata? Določi presečišče!

R: $\lambda = 1$ $T\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Razdalje

a.) Razdalje med točko in ravnino

$T(x_0, y_0, z_0)$, $\Pi: ax+by+cz=d$

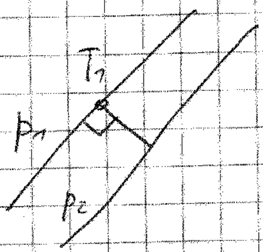
$$d(T,\Pi) = \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

b.) Razdalja med točko in premico

T točka, p premica, s točko T_0 in smernim vektorjem $\vec{s}$

$$d(T,p) = \frac{|\vec{s}\times\vec{T_0T}|}{|\vec{s}|}$$ višina!

c.) Razdalja med vzporednima premicama (p_1, p_2 premici, T_1 točka na p_1)



$$d(p_1,p_2)=d(T_1,p_2)$$

d.) Razdalja med nevzporednima premicama (p_1,p_2 premici, $\vec{r}=\vec{T_1T_2}$; T_1 točka na p_1, T_2 točka na p_2)

$$d(p_1,p_2)=\frac{|(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\vec{r})|}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}$$

15. Izračunaj oddaljenost točk $A(0,0,0)$, $B(1,-1,0)$ in $C(3,5,4)$ od ravnine $\pi: 2x+3y+4z=-1$.

R: $d(A,\pi)=\frac{1}{\sqrt{29}}$ $\quad d(B,\pi)=0$ $\quad d(C,\pi)=\frac{38}{\sqrt{29}}$

16. Dani sta ravnini $\Pi_1: 12x+9y-20z=19$ in $\Pi_2: 16x-12y+15z+9=0$. Določi točko, ki leži na osi y in je enako oddaljena od ravnin Π_1 in Π_2.

$T(0,y,0)$ $\qquad d(T,\Pi_1)=d(T,\Pi_2)$

$$\frac{|9y-19|}{\sqrt{144+81+400}}=\frac{|-12y+9|}{\sqrt{256+144+225}}$$

$$\frac{|9y-19|}{\cancel{25}}=\frac{|-12y+9|}{\cancel{25}}$$

$$|9y-19|-|-12y+9|=0$$

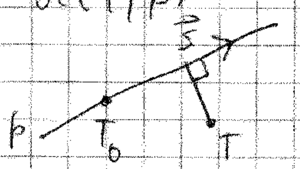
R: $T_1\left(0,\frac{4}{3},0\right)$

$T_2\left(0,-\frac{10}{3},0\right)$

17. Izračunaj oddaljenost točk $A(0,0,0)$ in $B(2,2,0)$ od premice $p: \frac{x-1}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{5}$.

$\vec{s}=(4,3,5)$

$$d(T,p)=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{T_0T}|}{|\vec{s}|}$$



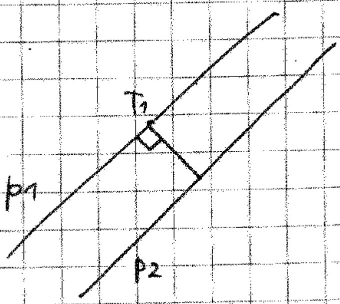
$$d(A,p)=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{T_0A}|}{|\vec{s}|}=\frac{|(-6,3,3)|}{|(4,3,5)|}=\frac{\sqrt{36+9+9}}{\sqrt{16+9+25}}=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{50}}=\frac{3\sqrt{6}}{5\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{5}$$

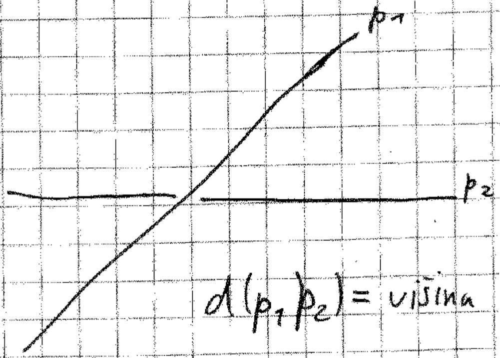
$$\overrightarrow{T_0A}=(0,0,0)-(1,0,2)=(-1,0,-2)$$

$$\vec{s}\times\overrightarrow{T_0A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 3 & 5\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=(-6,3,3)$$

11.03.2008

Razdalje



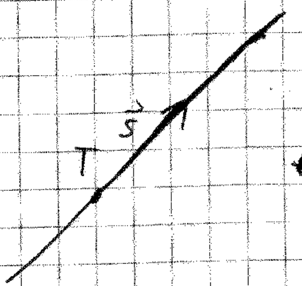


$d(p_1, p_2) =$ višina paralelepipeda

13. Izračunaj razdaljo med premicama.

a) $p_1: \; x-2 = 2y = z+1$
$p_2: \; x+1 = 2y = z-2$

b) $p_1: \; x = 2y = z$
$p_2: \; \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{3}$

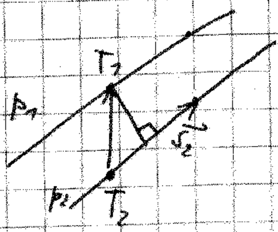


$(1,2,3)$
$(-2,-4,-6)$ $\Big\} (-2)$
vzporedni

a) $\vec{s}_1 = (1, \frac{1}{2}, 1) \qquad \vec{s}_2 = (1, \frac{1}{2}, 1)$
$T_1(2,0,-1) \qquad T_2 = (-1,0,2)$

$$\frac{x-a_1}{s_1} = \frac{y-a_2}{s_2} = \frac{z-a_3}{s_3}$$

$d(p_1, p_2) = d(T_1, p_2)$



$d(T_1, p_2) =$ višina paralelograma
$pl = |\vec{s}_2| \cdot d(T_1, p_2) = |\vec{s}_2 \times \overrightarrow{T_2T_1}|$

$$d(T_1, p_2) = \frac{|\vec{s}_2 \times \overrightarrow{T_2T_1}|}{|\vec{s}_2|}$$

$|\vec{s}_2| = \sqrt{1+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$\overrightarrow{T_2T_1} = (2,0,-1) - (-1,0,2) = (3,0,-3)$

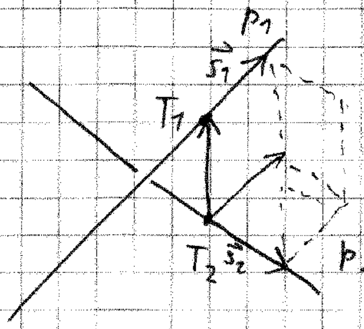
$$\vec{s}_2 \times \overrightarrow{T_2T_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{2}, 6, -\frac{3}{2}\right)$$

$$d(T_1, p_2) = \frac{|(-\frac{3}{2}, 6, -\frac{3}{2})|}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}+36+\frac{9}{4}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{162}{4}}}{\frac{3}{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}$$

b) $\vec{s}_1 = (1, \frac{1}{2}, 1)$ $\quad \vec{s}_2 = (2, 1, 3)$

nista vzporedni

$d(p_1, p_2) =$ višina paralelepipeda



$$V = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| \cdot d(p_1, p_2) = |(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{T_2T_1})|$$

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{T_2T_1})|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

$T_1(0,0,0)$ $\quad T_2(1, 0, -1)$

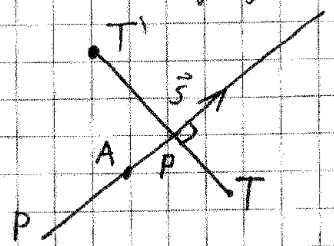
$\overrightarrow{T_2T_1} = (-1, 0, 1)$

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{T_2T_1}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \qquad \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (\tfrac{1}{2}, -1, 0)$$

$$d(p_1, p_2) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 0}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

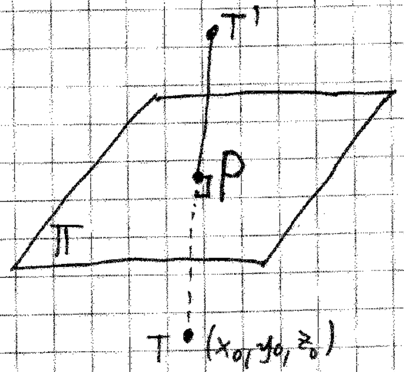
Zrcaljenje

a.) zrcaljenje točke čez premico



$$\vec{r}_{T'} = \vec{r}_T + \overrightarrow{TT'} = \vec{r}_T + 2\overrightarrow{TP} = \vec{r}_T + 2\cdot\underbrace{\left(\frac{\overrightarrow{AT}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|^2}\cdot\vec{s} - \overrightarrow{AT}\right)}_{\overrightarrow{TP}}$$

b.) zrcaljenje točke čez ravnino

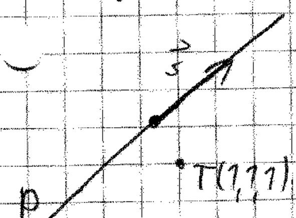


$$\vec{r}_{T'} = \vec{r}_T + \overrightarrow{TT'} = \vec{r}_T + 2\overrightarrow{TP} =$$

$$\vec{r}_{T'} = \vec{r}_T + 2\tilde{d}(T,\pi)\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\tilde{d}(T,\pi) = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

19. Določi zrcalno točko k točki $T(1,1,1)$ glede na premico, ki je presečišče ravnin: $x+y+z=2$ in $x+y-z=2$



$$\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ x+y-z&=2 \\ \hline 2z&=0 \\ z&=0 \end{aligned}$$

$x+y=2$

$x=2-y$

$$\begin{aligned} x&=2-y \\ y&=y \\ z&=0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=2-t \\ y&=t \\ z&=0 \end{aligned}}$$

$A(2,0,0)$

$\vec{s}=(-1,1,0)$

$$\overrightarrow{AT} = \vec{r}_T - \vec{r}_A = (-1,1,1)$$

$$\overrightarrow{AT}\cdot\vec{s} = (-1,1,1)\cdot(-1,1,0) = 2$$

$$\vec{r}_{T'} = (1,1,1) + 2\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{2}^2}(-1,1,0) - (-1,1,1)\right) = (1,1,1) + 2\left((-1,1,0)-(-1,1,1)\right) =$$

$$\vec{r}_{T'} = (1,1,1) + 2\cdot(0,0,-1) = \underline{\underline{(1,1,-1)}}$$

20. Poišči simetrično točko k točki $T(4,2,4)$ glede na ravnino $\Pi: 2x+y+2z=9$. Izračunaj še projekcijo P točke T na ravnino Π.

$$\vec{r}_{T'} = \vec{r}_T + 2\underbrace{\tilde{d}(T,\Pi)}_{\text{predznačena razdalja } T \text{ do ravnine}} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (4,2,4) + \frac{18}{9}(2,1,2) =$$

$2x+y+2z=9 \Rightarrow \vec{n} = (2,1,2)$

$$\tilde{d}(T,\Pi) = \frac{2\cdot 4 + 2 + 2\cdot 4 - 9}{|\vec{n}|} = \frac{9}{|\vec{n}|}$$

$$(4,2,4) + (4,2,4) = \underline{\underline{(8,2,8)}}$$

$$\vec{r}_P = \vec{OP} = \vec{OT} + \vec{TP} = (4,2,4) + (2,1,2) = (6,3,6)$$

$$\tilde{d}(T,\Pi) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{9}{|\vec{n}|} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (2,1,2)$$

21. Zapiši enačbo premice, ki je simetrična premici $\frac{x-1}{2} = \frac{2y-4}{2} = z$ glede na ravnino $x-2y+2z=7$.

Matrike

$$\overset{m\times n}{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

$\underset{\text{vrstice}}{\overset{\uparrow}{m}} \times \underset{\text{stolpci}}{\overset{\uparrow}{n}}$

Operacije na matrikah

a.) Množenje s skalarjem

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & & \alpha a_{1n} \\ & & \\ \alpha a_{m1} & & \alpha a_{mn}\end{bmatrix}$$

b.) Seštevanje po komponentah (pogoj: matriki morata biti enakih dimenzij)

c.) Transponiranje (zamenjamo vrstice in stolpce = zrcalimo čez glavno diagonalo)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

d.) Konjugiranje (za kompleksne matrike)

$A^* = \overline{A^T}$ konjugiranje kompleksnih števil

e.) Množenje matrik

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}=\underset{m\times k}{C}$$ število stolpcev 1. matrike = številu vrstic 2. matrike

C_{ij} = skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B.

f.) Sled (kvadratne) matrike (vsota diagonalnih elem.)

$$tr(A)=tr\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ & \\ a_{m1} & a_{mn}\end{bmatrix}=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{nn}$$

1. Dana je kompleksna matrika. Zapiši A^T in A^*!

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -3i & -4+i \\ -2-i & 6 & 7 & 2+6i\end{bmatrix}$$

2. Dani sta matriki $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2\end{bmatrix}$ in $B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 6\end{bmatrix}$

Izračunaj $4A-B^T$ in $2A^T+3B$

$$4A-B^T=\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 16 & -4 \\ 20 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 17 & -2 \\ 18 & 2\end{bmatrix}$$

$$2A^T+3B=\begin{bmatrix} -4 & 8 & 10 \\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 6 & -6 & 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & 5 & 16 \\ 6 & -8 & 22\end{bmatrix}$$

3. Dani sta matriki $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -5 & 0\\ 3 & 4 & 0 & -2\end{bmatrix}$

Izračunaj $A\cdot B$ in $B\cdot A$.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2 & -5 & 0\\ 3 & 4 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -8 & -10 & 2\\ 1 & -2 & -5 & 0\\ 9 & 22 & 15 & -8\\ -4 & -2 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

4. ~~Izra~~čunaj produkta vrstičnega vektorja $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ in stolpičnega vektorja $B=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$.

R: $A\cdot B=6$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

5. Izračunaj $f(A)$, če je $f(x)=x^5-2x^4-x^3+4x^2+7$ in $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$f(A)=\cancel{A^5}-\cancel{2A^4}-\cancel{A^3}+4A^2+7I$$

3×3

identiteta $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=A^4=A^5$$

$$f(A)=4\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+7\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0 & 4\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

6. Ali lahko določimo parametra a in b, tako, da bosta matriki

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix}$ in $B=\begin{bmatrix} b & a & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{bmatrix}$ komutirali?

Komutirata $A \cdot B = B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & a & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+18-a & 3a-8 & 5+a \\ 9+3a & a+24 & 4a \\ ab+18+4a & a^2+2a+32 & 11a \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} b+5a & 2b+a+10 & 3a-b+20 \\ a^2+9 & 3a+18 & 7a-9 \\ a^2+a & 4a+8 & 3a+24 \end{bmatrix}$$

$\cancel{b}+18-a=\cancel{b}+5a$

$18=6a$

$a=3$

$3a-8=2b+a+10$

$9-8=2b+13$

$-12=2b$

$b=-6$

$$AB \neq BA$$

OBRNLJIVE MATRIKE IN INVERZI

Kvadratna matrika A je obrnljiva (= nesingularna = ima inverz) če obstaja matrika A^{-1}, tako da velja $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

Če matrika ni obrnljiva pravimo, da je singularna.

Matriko A^{-1} imenujemo inverz matrike A.

Velja:

1. Identiteta je enota za matrično množenje: $A\cdot I=I\cdot A=A$.
2. Matrika A je singularna $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0$
3. Izračun inverzne matrike (metoda kofaktorjev):

$$A^{-1}=\frac{1}{\underset{\neq 0}{\det A}}\cdot\tilde{A}^T,\qquad \tilde{A}=\text{matrika kofaktorjev}$$

$$\tilde{A}_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$$

A_{ij} poddeterminanta k elementu a_{ij}.

7. Poišči inverze danim matrikam.

a) $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}^T=\frac{1}{ad-bc}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}+d&-c\\-b&+a\end{bmatrix}}_{=\tilde{A}}^{T}=\boxed{\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}}$$

b) D.W.

$$B=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}\qquad R:\begin{bmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\ -\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$$

c)

$$C=\begin{bmatrix}5&8&4\\3&2&5\\7&6&10\end{bmatrix}\qquad C^{-1}=\frac{1}{\det C}\cdot\tilde{C}^T$$

$\det C = 6$

$$C^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} +(-10) & -(5) & +4 \\ -56 & +22 & -(26) \\ +32 & -13 & +(-14) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -10 & -56 & 32 \\ 5 & 22 & -13 \\ 4 & 26 & -14 \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$ $\quad$ $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$

Rang matrike

Rang $r(A)$ matrike $A^{m\times n}$ je enak številu linearno neodvisnih stolpcev oz. vrstic.

Velja $r(A) \leq \min\{m,n\}$.

Rang matrike se ne spremeni, če:

a) dve vrstici med seboj zamenjamo

b) vrstico pomnožimo s poljubnim neničelnim skalarjem

c) če vrstici prištejemo poljubni večkratnik kake druge vrstice

8. Določi rang matrik.

a.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ vse vrstice z različnim številom 0 na začetku

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

2.vrs. − 3vrs. $\quad$ 3×3vr. − 1vr. $\quad$ 3vr. + 4×2vr.

$r(A) = 3$

ima poln rank

17.03.2008

Rang matrike

1. zamenjava vrstic
2. vrtico pomnožimo z neničelnim številom
3. vrstici prištejemo večkratnik kakšne druge vrstice

c.)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -9 & 13 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2vr-1vr \\ 3vr-2\times 1 \\ 4vr+1v \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -9 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} 3vr.-2\times 2vr. \\ \\ 4vr.-2vr. \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 4vr.-2\times 3vr \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

rang = št. neničelnih vrstic !

rang = 4.

g.) Poišči λ pri katerem ima matrika A najmanjši rang.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

R: $\lambda = 0$ $\quad r(A) = 2$

Gaussova eliminacija - računanje inverza

$$\left[A \;\middle|\; I \right] \xrightarrow[\text{operacije, ki ohranjajo rang}]{\text{transformacija}} \left[I \;\middle|\; A^{-1} \right]$$

npr. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

I. 0 pod diagonalo
II. 0 nad diagonalo
III. 1 po diagonali

1.) Z Gaussovo eliminacijo izračunaj inverz matrike.

a.)

$$A=\begin{bmatrix}-3&1&5\\-3&1&4\\-8&3&10\end{bmatrix}\quad \left[\begin{array}{ccc|ccc}-3&1&5&1&0&0\\-3&1&4&0&1&0\\-8&3&10&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ 2v-1v\\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3&1&5&1&0&0\\0&0&-1&-1&1&0\\0&-1&10&8&0&-3\end{array}\right]\sim$$

I. ničle pod diagonalo $8\times1v-3\times3v$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3&1&5&1&0&0\\0&-1&10&8&0&-3\\0&0&-1&-1&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3&1&0&-4&5&0\\0&-1&0&-2&10&-3\\0&0&-1&-1&1&0\end{array}\right]\sim\quad 1vr.+2vr.$$

II. ničle nad diagonalo $2vr.+10\times3vr.$ $1vr.+5\times3vr.$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3&0&0&-6&15&-3\\0&-1&0&-2&10&-3\\0&0&-1&-1&1&0\end{array}\right]\begin{array}{l}:(-3)\\ \cdot(-1)\\ \cdot(-1)\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-5&1\\0&1&0&2&-10&3\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right]\quad A^{-1}$$

III. enice nad diagonalo

$$R:\ A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-5&1\\2&-10&3\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

b.)

$$B=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-3&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}\quad\left[\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&1&1&0&0\\0&-3&-2&0&1&0\\1&-2&1&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ 2\times3vr+1vr.\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&1&1&0&0\\0&-3&-2&0&1&0\\0&-4&3&1&0&2\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ 3\times3vr.-4\times2vr.\end{array}\sim$$

I. ničle pod diagonalo

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&1&1&0&0\\0&-3&-2&0&1&0\\0&0&17&3&-4&6\end{array}\right]\begin{array}{l}17\times1v\pm3vr\\ 17\times2+2\times3\\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-34&0&0&14&4&-6\\0&-51&0&6&9&12\\0&0&17&3&-4&6\end{array}\right]\begin{array}{l}:(-34)\\ :(-51)\\ :(17)\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{14}{34}&-\frac{4}{34}&\frac{6}{34}\\0&1&0&-\frac{6}{51}&-\frac{9}{51}&-\frac{12}{51}\\0&0&1&\frac{3}{17}&-\frac{4}{17}&\frac{6}{17}\end{array}\right]=B^{-1}$$

Sistemi linearnih enačb

Cramerjevo pravilo: samo za kvadratne sisteme

m enačb za n neznank:

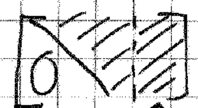
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$Ax = b$$

matrika koeficientov — vektor neznank — vektor desne strani

Gaussova eliminacija

$$R = [A \mid b] \xrightarrow[\text{operacije, ki ohranjajo rang}]{\text{transponiramo}}$$



$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & x \end{array}\right]$$

rešitve direktno izrazimo

Rešljivost

1. $Ax = b$ je rešljiv $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(R) = r$
2. Če je $r = n =$ št. neznank $\Longrightarrow$ 1 rešitev
3. Če je $r < n =$ št. neznank $\Longrightarrow$ neskončno rešitev
   $(n-r)$ – parametrična rešitev

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 + z \\ y &= 2 \\ \mathbb{R} \ni z &= \text{poljuben} \end{aligned}}$$

2. Reši sisteme linearnih enačb:

a) D.N.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 13 \end{aligned}$$

R: $x = 7$, $y = 5$, $z = 1$

b.)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 5 \\ x - 2y + 3z &= 2 \\ 4x - y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{2\times 2vr. - 1vr. \\ 3vr - 2\times 1vr.}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -1 \\ 0 & -7 & 8 & -9 \end{array}\right] \underset{3vr. - 2vr.}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right] \end{array}$$

$0 \neq -8$

ni rešljiv!

$r(A) = 2$

$r(R) = 3$

sistem nima rešitve $\quad r(A) \neq r(R)$

c.)

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z + t &= 4 \\ 4x + 3y - z + 2t &= 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t &= 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t &= 6 \end{aligned}$$

$$R = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 2vr - 2\times 1vr \\ 3vr - 4\times 1vr \\ 2\times 4vr - 3\times 1vr \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{3vr - 3\times 2vr}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] 2\times 4vr - 3vr$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} r(A) = 4 \\ r(R) = 4 \\ \text{sistem je rešljiv} \end{array}\right\} n = 4 = r : 1 \text{ rešitev}$

Poenostavljen sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z + t &= 4 \\ -y + z &= -2 \\ -2z &= 2 \\ 2t &= -2 \end{aligned}$$

R: $t = -1$, $z = -1$, $y = 1$, $x = 1$

d.) $$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 3 \\ x + y + 5z &= -1 \end{aligned}$$

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right] \underset{2\times 2vr. - 1vr.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & -4 \end{array}\right] \underset{3vr. + 2vr.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(A) = 2$
$r(R) = 2$
rešljiv sistem

$r = 2$
$n = 3$
1-parametrična rešitev

Poenostavljen sistem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 2 \\ y - 8z &= 4 \end{aligned}$$

$y = 4 + 8z$ — parameter
z = poljuben
$x = \frac{1}{2}(2 - 3y + 2z) = \frac{1}{2}(2 - 12 - 24z - 2z)$
$= \frac{1}{2}(-10 - 26z)$

$$R: \boxed{\begin{aligned} x &= -5 - 13z \\ y &= 4 + 8z \\ z &= \text{poljuben} \end{aligned}}$$

1-param. rešitev

e.) $$\begin{aligned} x + y + 2z + 3u - v &= 5 \\ x + 2y + z + 5u - v &= 5 \\ -x + y - 4z + 2u &= -3 \\ 2x - y + 7z - 2u &= 6 \end{aligned}$$

$$R = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & 2 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 3vr. - 2\times 2vr. \\ 4vr. + 3\times 2vr. \end{array} \sim$$

2vr. − 1vr.
3vr. + 1vr.
4vr. − 2×1vr.

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \underset{4vr. + 2\times 3vr.}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(A) = 3$
$r(R) = 3$
rešljiv

$r = 3$
$n = 5$
2-parametrična rešitev

Poenostavljene enačbe:

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3u - v &= 5 \\ y - z + 2u &= 0 \\ u - v &= 2 \end{aligned}$$

$u = 2 + v$ — parameter
v = poljuben
$y = z - 2u = z - 4 - 2v$ — parameter
z = poljuben
$x = 5 - y - 2z - 3u + v = 5 - z + 4 + \cancel{2v} - 2z + 6 - \cancel{3v} + v = -3z + 3$

$$\boxed{\begin{aligned} R:\ x &= 3-3z \\ y &= -4+z+2v \\ z &= \text{poljuben} \\ u &= 2+v \\ v &= \text{poljuben} \end{aligned}}$$

2-parametrična rešitev

3. Obravnavaj rešljivost sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ \lambda x &= 9 \\ \lambda x + 2\lambda y - z &= 2 \end{aligned}$$

λ: ni rešljiv
λ: 1 rešitev
λ: para. rešitev

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 9 \\ \lambda & 2\lambda & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{3vr-2vr}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2\lambda & 1 & 7 \\ \lambda & 2\lambda & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{3vr-\lambda\cdot 1vr}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2\lambda & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2-\lambda \end{array}\right]$$

1) $-1-\lambda = 0$
$\lambda = -1$
$[0 \quad 0 \quad 0 \mid 3]$
sistem nima rešitve $r(A)=2 \neq 3 = r(R)$

2.) $\lambda \neq -1$; $\lambda \neq 0 \Longrightarrow$ rešljiv sistem: $r=3$, $n=3 \Rightarrow 1$ rešitev

$\lambda = 0 \Rightarrow$ različni rangi $\Rightarrow$ ni rešljiv sistem

R: $\lambda = 0$, $\lambda = -1 \Rightarrow$ ni rešitve
$\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1 \Rightarrow 1$ rešitev

Izrazi rešitev sistema pri $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -2\lambda y + z &= 7 \\ (-1-\lambda) z &= 2-\lambda \end{aligned}$$

$$z = \frac{2-\lambda}{-1-\lambda}, \quad \lambda \neq -1$$

$$y = \frac{z-7}{2\lambda} = \frac{\frac{\lambda-2}{\lambda+1} - 7}{2\lambda} = \frac{-6\lambda-9}{2\lambda(\lambda+1)}, \quad \lambda \neq 0,\ \lambda \neq -1$$

$$x = \frac{\cancel{\lambda^2} + \lambda + 6\lambda + 9 - \cancel{\lambda^2} + 2\lambda}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{9(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{9}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0$$

46

4. Katerema pogoju morajo zadoščati parametri a, b in c, da bo spodnji sistem enačb rešljiv? Reši sistem za vrednosti parametrov $a=12$, $b=-8$ in $c=-\frac{5}{2}$

$$3x_1+2x_2=4$$
$$x_1-4x_2=-1$$
$$7x_1+10x_2=a$$
$$5x_1+6x_2=-b$$
$$3x_1-16x_2=2c$$

$$R=\left[\begin{array}{cc|c}3&2&4\\1&-4&-1\\7&10&a\\5&6&-b\\3&-16&2c\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&-4&-1\\3&2&4\\7&10&a\\5&6&-b\\3&-16&2c\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&-4&-1\\0&14&7\\0&38&a+7\\0&26&-b+5\\0&-4&2c+3\end{array}\right]:7\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&-4&-1\\0&2&1\\0&38&a+7\\0&26&-b+5\\0&-4&2c+3\end{array}\right]\sim$$

2 vr. − 3×1 vr.
3 vr. − 7×1 vr.
4 vr. − 5×1 vr.
5 vr. − 3×1 vr.

3. vr. − 19×2 vr.
4. vr. − 13×2 vr.
5 vr. + 2×2 vr.

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&-4&-1\\0&2&1\\0&0&a-12\\0&0&-b-8\\0&0&5+2c\end{array}\right]$$

$r(A)=2$
$r(R)=2$
$a-12=0$
$-b-8=0$
$5+2c=0$

$$\boxed{\begin{array}{l}a=12\\b=-8\\c=-\frac{5}{2}\end{array}}=R$$

D.N. Reši: $x_1=1$ $x_2=\frac{1}{2}$

5. Določi parameter k, tako da bo sistem rešljiv

$$-x-y-z=-1$$
$$-y+3z=3$$
$$3x+2y+kz=3$$

R: $k\neq 6$

6. Katerema pogoju morajo zadoščati parametri a, b, c, da bo spodnji sistem rešljiv? Reši sistem za vrednosti $a=-12$, $b=7$ in $c=-9$.

$$2x-7y-7z=a$$
$$-x+2y+3z=b$$
$$x+y-2z=c$$

R: $a+3b+c=0$
$x=-7y-13$
$y=$ poljuben
$z=-3y-2$

7. Homogeni sistem linearnih enačb

$$Ax = b \Rightarrow Ax = 0$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\end{array}\right] \quad r(A) = r(R)$$

sistem je vedno rešljiv

Velja:

1. Trivialna rešitev $(0, 0, 0 \ldots, 0)$ vedno obstaja
2. Kvadratni sistem ima netrivialno rešitev $\Leftrightarrow \det A = 0$
3. Če je enačb manj kot neznank (poddoločeni sistem), netrivialna rešitev vedno obstaja
4. Če sta x in y različni rešitvi $\Rightarrow z = \alpha x + \beta y$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ rešitev sistema

---

(7) Preveri, ali ima sistem netrivialno rešitev in jo izračunaj

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ x - 8y + 8z &= 0 \\ 3x - 2y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

$\det A = 0 \Leftarrow \exists$ netrivialna rešitev

$$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & -8 \\ 3 & -2 \end{matrix} = -32 - 48 + 4 + 72 + 16 - 12 = \underline{0}$$

ima netrivialno rešitev

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -8 & 8 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{2-1. \\ 3-3\times 1.\text{va}}}{\sim} \left[\begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & -11 & 10 \end{matrix}\right] \underset{2-3}{\sim} \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline \end{array}\left[\begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]$$

vedno ostanejo, izpustimo

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ -11y + 10z &= 0 \end{aligned}$$

1 parametrična rešitev:

$$z = \frac{11}{10} y$$

trivialna, če $y = 0$, drugače netrivialna

y = poljuben

$$x = 2z - 3y = \frac{11}{5} y - 3y \quad x = -\frac{4}{5} y$$

MATRIČNE ENAČBE

① DN: Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Poišči matriko

X, za katero velja $4A - 3X = B$

R: $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \frac{-1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$

② DN: Reši enačbo $\underbrace{Ax = b}$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Interpretiramo kot sistem lin enačb.

$R = [A \mid b] \sim [\ldots]$

R: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

③
Reši matrično enačbo $AX = B$, kjer sta $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ in

$B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

$\underset{3\times3}{A}\,\underset{3\times3}{X} = \underset{3\times3}{B}$

$$\boxed{[A \mid B] \underset{\text{op, ki ohranjajo rang.}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, X\right]}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 3 & 9 & 7 \\ 4 & -3 & 3 & 1 & 11 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & -10 & 2 & -18 & -6 & -14 \end{array}\right] \sim$$

4×1va $- 3 \times 2$ga
$1. - 3 \times 3$ja

2×2ga $+ 3$ja

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

rešitev ne obstaja, ne moremo pridelat ničel po diagonali

deljenje = množenje z inverzom

$A^{-1} \cdot / \; AX = B$

$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad : \quad \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

$\boxed{\text{ni inverza kadar } \det A = 0}$

④ Poišči matrično enačbo $XA = B$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$AX = B$

$XA = B \leftarrow ?$

$XA = B \quad / A^{-1}$

$X = B \cdot A^{-1}$

$XA = B \quad /()^T \rightarrow (XA)^T = B^T$

! $A^T X^T = B^T$ → transponiranje obrne vrstni red

$$\left[A^T \,\middle|\, B^T \right] \rightsquigarrow \left[I \,\middle|\, X^T \right]$$

Nič pod diagonalo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 14 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 16 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{2\cdot 2ga - 1va \\ 3ja - 3x2ga}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 19 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -26 & -18 & 0 \end{array}\right] \underset{3ja + 2x2ga}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 19 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & 0 & 0 \end{array}\right] /:6 \rightsquigarrow$$

Nič nad diagonalo

$$\underset{\substack{1x3ja - 2ga \\ 2x3ja + 1va}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{3x2ga + 1va}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & -22 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} /:2 \\ /:(-1) \\ /:(-1) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & -11 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{matrix}}^{\,X^T} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

$$\boxed{X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

⑤ Reši matrično enačbo $AXB = C$, kjer so

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} / \; AXB = C$

$XB = A^{-1}C \quad /B^{-1}$

$X = \underbrace{A^{-1}C B^{-1}}_{\text{D.N.}}$

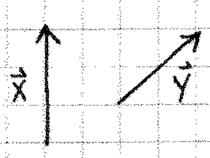
R: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

VEKTORSKI PROSTORI IN LINEARNE PRESLIKAVE

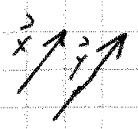
- linearna neodvisnost vektorja

Množica vektorjev $x_1, \dots x_n \in V$ je <u>linearno neodvisna</u>, če velja

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}_{\text{linearna kombinacija}} = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_n = 0$$



$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = 0$



⑥ Ali so dani vektorji $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni.

lin. komb: $\alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0$$ homogen sistem v matrični obliki

$$\underbrace{\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0}_{\text{samo trivialna rešitev hom. sist.}} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{matrix} = 100 + 280 + 72 - 56 - 150 - 240 = 6 \neq 0$$

Sledi: vektorji so linearno neodvisni.

(7) Ali so vektorji $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni.

Če so, zapiši drugi vektor kot linearno kombinacijo 1ga in tretjega vektorja.

$\alpha = -1/2$ $\quad\beta = 1/2$ $\quad$ D.N.

Baza vektorskega prostora

To je vsaka največja množica linearno neodvisnih vektorjev.

Št. vektorjev v bazi = dimenzija prostora.

Standardna baza v $\mathbb{R}^n$

$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \dots \vec{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

(8) Pokaži, da vektorji $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Nato zapiši vektor $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ kot linearno komb. vektorjev x_1, x_2, x_3.

- dovolj = dimenzija prostora = 3 ✓
- lin. neodvisni $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ lin. neodvisni → tvorijo bazo

$y = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$ sistem lin. enačb.

rešimo

$y = x_1 + x_2 + x_3$

...

31.03.2008

Linearne preslikave

Preslikavo $\mathcal{T}: U \to V$ imenujemo linealna preslikava med vektorskima prostoroma U in V če velja:

$$\mathcal{T}(\underbrace{\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}}_{\text{linearna kombinacija}}) = \underbrace{\alpha\cdot\mathcal{T}(\vec{x})+\beta\,\mathcal{T}(\vec{y})}_{\text{linearna kombinacija slik}}$$

npr: $\mathcal{T}(x,y,z)=(y,z)$

$$\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

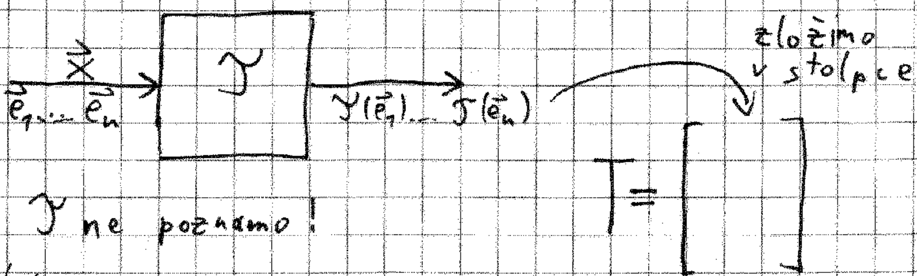
npr: $\mathcal{T}(\vec{x}) = 2\vec{x}$
$\mathcal{T}(\vec{x}) = -\vec{x}$

Standardna baza $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

$$\downarrow \mathcal{T}$$

slike $\mathcal{T}(\vec{e}_1), \dots \mathcal{T}(\vec{e}_n)$

$\mathcal{T}$ pripada matrika $T = \begin{bmatrix} \mathcal{T}(\vec{e}_1) & \dots & \mathcal{T}(\vec{e}_n) \end{bmatrix}$, ki ima v stolpcih slike standardne baze.



$\mathcal{T}$ ne poznamo!

Velja: Sliko vektorja s $\mathcal{T}$ dobimo tako, da matriko T pomnožimo z $\vec{x}$!

$$\mathcal{T}(\vec{x}) = T\cdot\vec{x}$$

1. Linearna preslikava preslika standardne bazne vektorje v vektorje $\begin{bmatrix}1\\4\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}4\\3\\-2\end{bmatrix}$. V kateri vektor se preslika $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$?

$$T=\begin{bmatrix}1&2&4\\4&-3&3\\-1&1&-2\end{bmatrix}$$ matrika lineane preslikave

$$T\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4\\4&-3&3\\-1&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\13\\-6\end{bmatrix}$$

2. Poišči matriko linearne preslikave v standardni bazi, ki preslika vektorje $\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}-1\\4\\3\end{bmatrix}$ v vektorje $\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$. Določi še sliko vektorja $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$!

$$A\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix},\quad A\cdot\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix},\quad A\cdot\begin{bmatrix}-1\\4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$$

matrično množenje ne meša stolpcev

$$A\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&3&4\\3&2&3\end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix}7&5&1\\2&3&3\\1&4&0\end{bmatrix}}_{C}$$ matrična enačba

neznana

$$A\cdot B=C \quad /\cdot B^{-1}$$
$$A\cdot B\cdot B^{-1}=C\cdot B^{-1}$$
$$A=C\cdot B^{-1}$$

Izračun B^{-1}!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\1&3&4&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\2v-1v\\3v-3\cdot1v\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&4&5&-1&1&0\\0&5&6&-3&0&1\end{array}\right]\sim\begin{array}{l}\\\\4\cdot3v-5\cdot2v\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&4&5&-1&1&0\\0&0&-1&-7&-5&4\end{array}\right]\sim$$

$$\begin{array}{l}1v-3v\\2v+5\cdot3v\\\\\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&8&5&-4\\0&4&0&-36&-24&20\\0&0&-1&-7&-5&4\end{array}\right]\overset{4\cdot1v+2v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&0&0&-4&-4&4\\0&4&0&-36&-24&20\\0&0&-1&-7&-5&4\end{array}\right]\begin{array}{l}:(4)\\:(4)\\:(-1)\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1&1\\0&1&0&-9&-6&5\\0&0&1&7&5&-4\end{array}\right]$$

$$A=C\cdot B^{-1}=\begin{bmatrix}7&5&1\\2&3&3\\1&4&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-9&-6&5\\7&5&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-45&-32&28\\-8&-5&5\\-37&-25&21\end{bmatrix}$$

$$A\cdot\vec{a}\overset{O.N.}{=}\begin{bmatrix}-58\\-11\\-45\end{bmatrix}$$

3. Dan je vektor $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\end{bmatrix}$. Preslikava T preslika vektor $\vec{v}$ v vektor $\vec{a}\times\vec{v}$. Dokaži, da je preslikava T linearna in poišči njeno matriko v standardni bazi. Kateri vektor se preslika v $\begin{bmatrix}15\\-7\\-5\end{bmatrix}$?

$\mathcal{T}(\vec{v})=\vec{a}\times\vec{v}$; $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

T linearna preslikava

- $\mathcal{T}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\vec{a}\times(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\vec{a}\times\alpha\vec{x}+\vec{a}\times\beta\vec{y}$
- $\alpha\mathcal{T}(\vec{x})+\beta\mathcal{T}(\vec{y})=\alpha\cdot(\vec{a}\times\vec{x})+\beta(\vec{a}\times\vec{y})$

preslikava je linearna

$\vec{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \vec{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \vec{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \mathcal{T}(\vec{i})=\vec{a}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & 5 & -1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,-1,-5)$

$\mathcal{T}(\vec{j})=\vec{a}\times\vec{j}=(1,0,2)$

$\mathcal{T}(\vec{k})=\vec{a}\times\vec{k}=$

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 5\\-1 & 0 & -2\\-5 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$Tx=\begin{bmatrix}15\\-7\\-5\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 1 & 5\\-1 & 0 & -2\\-5 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\-7\\-5\end{bmatrix}$$ linearni sistem v matrični obliki

$$R=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 5 & 15\\-1 & 0 & -2 & -7\\-5 & 2 & 0 & -5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & -2 & -7\\0 & 1 & 5 & 15\\-5 & 2 & 0 & -5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & -2 & -7\\0 & 1 & 5 & 15\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$r(A)=2$
$r(R)=2$
rešljiv
$n=3 \Rightarrow 1$ parametrična rešitev

$-x_1-2x_3=-7$
$x_2+5x_3=15$

$$\boxed{\begin{aligned}x_2&=15-5x_3\\x_3&=\text{poljuben}\\x_1&=7-2x_3\end{aligned}}$$

$$R\cdot x=\begin{bmatrix}7-2x_3\\15-5x_3\\x_3\end{bmatrix}, x_3\in\mathbb{R}$$

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Lastni vektor kvadratne matrike $A^{n\times n}$ je $\boxed{x \neq 0}$ netrivialen za katerega velja:

$$Ax = \lambda x \quad \text{(ohranijo smer)} \rightarrow (A-\lambda I)x = 0$$

kjer je λ skalar in ga imenujemo lastna vrednost.
Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma matrike A:

$$\underbrace{\det(A-\lambda I)}_{A \text{ po diagonali odštejeno } \lambda.} = 0$$

Lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti λ, dobimo kot netrivialne rešitve homogenega sistema:

$$(A-\lambda I)x = 0.$$

4\. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1,\ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

5\. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Lastne vrednosti

$$\det(A-\lambda I) = 0 \quad = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 - (1+\lambda) - (1+\lambda) =$$

$$= (1+\lambda)(1-\lambda^2-2) = (1+\lambda)(-1-\lambda^2) = -(1+\lambda)(1+i)(1-i)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -i \\ \lambda_3 &= i \end{aligned}}$$

Lastne vrednosti so lahko tudi kompleksne.

Lastni vektorji $(A-\lambda I)x = 0$

$\boxed{\lambda_1 = -1}$: $\begin{bmatrix} 1+1 & -1 & -1 \\ 1 & -1+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ homogeni sistem

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Iščemo netrivialne rešitve

$$\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ \hline \end{array}$$

$x_2 = -x_3$

x_3 = parameter

$x_1 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 0$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x_3 = 1$

lastni vektor za $\lambda_1 = -1$

$\boxed{\lambda_2 = -i}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1+i & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -1+i & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{r} x_1 + (-1+i)x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ \hline \end{array}$$

$x_2 = x_3$

x_3 = poljuben

$x_1 = (1-i)x_2 = (1-i)x_3$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\lambda_3 = i}$ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

Lastne vrednosti

$$\det(A - \lambda I) = 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda+2)^2$$

$\lambda_1 = 4$

$\lambda_{2,3} = -2$

Lastni vektorji

$\boxed{\lambda_1 = 4}$ $\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{3} \\ \cancel{3} & \cancel{-5} & \cancel{3} \\ \cancel{6} & \cancel{-6} & \cancel{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 & -3 & 3 \\ 3 & -5-4 & 3 \\ 6 & -6 & 4-4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$$
$$-12x_2 + 6x_3 = 0$$

$x_3 = 2x_2$
$x_2 =$ poljuben
$x_1 = \cancel{1}x_2 - \cancel{x_2} = x_2$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\lambda_{2,3} = -2}$ $\quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2v - 1v \\ 3v - 2 \cdot 1v \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$$

$r = 1, n = 3 \Rightarrow$ 2-param. rešitev

$\boxed{\begin{matrix} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_2 = \text{poljuben} \\ x_3 = \text{poljuben} \end{matrix}}$ $\quad \vec{v}_2 = (1, 1, 0)$
$\quad \vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$

$\begin{matrix} x_2 = 1 & x_2 = 0 \\ x_3 = 0 & x_3 = 1 \end{matrix}$ } 2 lin. neodvisna vektorja, ki določata linearni podprostor za $\lambda_{2,3} = -2$.

8. Določi parameter a, tako da bo 0 lastna vrednost matrike $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & 4 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 4a \cdot (2-\lambda) - 0 =$$
$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) - 4a(2-\lambda) =$$
$$= (2-\lambda)((3-\lambda)(-1-\lambda) - 4a) = (2-\lambda)(-3-3\lambda+\lambda+\lambda^2-4a) =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3 - 4a)$$

$\lambda = 0$ $\quad 2 \cdot (-3 - 4a) = 0$
$$-6 - 8a = 0$$
$$8a = -6$$
$$a = -6/8 = -\frac{3}{4}$$

Potenčne vrste

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike:

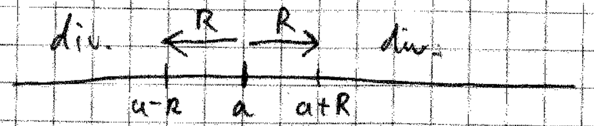
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$$

$\uparrow$ središče vrste

npr. $\sum x^n$, $a_n = 1$, $a = 0$

Konvergenčni radij potenčne vrste izračunamo takole:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$



Velja:

1.) Potenčna vrsta konvergira za $x \in (a-R, a+R)$
2.) Potenčna vrsta divergira za $x < a-R$ in $x > a+R$.
3.) V krajiščih $x = a-R$ in $x = a+R$ določimo konv. tako kot konvergenco številskih vrst.

Spomnimo se kriterijev za konv. številskih vrst.

a.) vrste s pozitivnimi členi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$

- kvocientni $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
- korenski $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

$q < 1$: konv.
$q > 1$: diver.
$q = 0$; odpove

- primerjalni kriterij $0 \leq a_n \leq b_n$ od nekje naprej
  $\rightarrow \sum b_n$ konv. $\rightarrow \sum a_n$ konv.
  $\rightarrow \sum a_n$ dive. $\rightarrow \sum b_n$ dive.

b.) alternirajoče vrste: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$; $a_n \geq 0$

- Liebnitzev kriterij: Alt. vrsta $\sum (-1)^n a_n$ konvergira, če zaporedje a_n od nekje naprej monotono pada proti 0

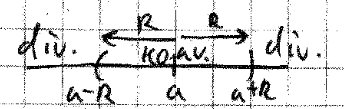
07.04.2008

Potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

a — središče vrste

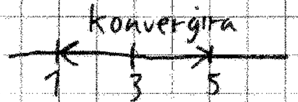
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow \text{konvergenčni polmer}$$



1. Določi konvergenčni polmer potenčne vrste in izračunaj vsoto vrste v središču.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{a_n}(x-3)^n \qquad a=3 \quad a_n = \frac{n^2}{2^n}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n^2}{2^n}}{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 \;:n^2}{n^2+2n+1 \;:n^2} = 2$$



$x=3$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(3-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\cdot 0^n =$ $\qquad \boxed{0^0 = 1;\ 0^x = 0,\ x\neq 0}$

$$= \frac{0^2}{2^0}\cdot \underbrace{0^0}_{1} + 0 + 0 \ldots = 0$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^n}{n!}x^n \qquad a=0 \quad a_n = \frac{10^n}{n!}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{10^n}{n!}}{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{10^n (n+1)!}{10^{n+1}\, n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10} = \infty$$

vrsta konvergira povsod

$x=0$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^n}{n!}0^n = \frac{10^0}{0!}0^0 = 1$

2. Določi konvergenčno območje potenčnih vrst.

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+4}$ R: $[-2,0)$

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$ $a=0,\ a_n = \frac{n!}{100^n}$

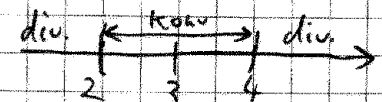
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n!}{100^n}}{\frac{(n+1)!}{100^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to 0} \frac{n! \cdot \cancel{100}^{n+1}}{(n+1)!\, \cancel{100^n}} = \lim_{n\to 0} \frac{100}{n+1} = 0$$

$x=0$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} 0^n = \frac{0!}{100^0} \cdot 0^0 + 0 + 0 + 0\ldots = \underline{1}$ konvergira (vsota = končna)

R: konv. območje $\{0\}$

c.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-3)^n$ $a=3$ $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n (n+2)}{(-1)^{n+1} (n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$



Vemo: vrsta konv. za $x \in (2,4)$
vrsta div. za $x < 2$ in $x > 4$
Za krajišči intervala $(2,4)$ preverimo posebej!

$x=2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ harmonična vrsta

$\sum \frac{1}{an+b}$ harmonična vrsta, ki divergira

$x=4$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (4-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ alternirajoča vrsta

Leibnitzov kriterij

- $\frac{1}{n+1}$ pada ✓
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ✓

$\Rightarrow$ konvergira

R: konv. območje: $[2,4]$

Ponavljanje

① $$\begin{vmatrix}2&1&3&4\\0&5&5&1\\1&1&3&3\\-2&-2&6&2\end{vmatrix} \underset{1-3vr.}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&5&5&1\\1&1&3&3\\-2&-2&6&2\end{vmatrix} \underset{4st-1st.}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&5&5&1\\1&1&3&2\\-2&-2&6&4\end{vmatrix} \underset{\text{razvoj po 1. vrstici}}{=} 1\cdot\begin{vmatrix}5&5&1\\1&3&2\\-2&6&4\end{vmatrix} =$$

- vrstica + k*druga vrstica
- zamenjano vrstici → spremeni predznak
  - sosednji !
- vrstico pomnožimo z neničelnim številom ⇒ determinanta se pomnoži z m

$$\underset{\substack{1vr.-5\times 2vr.\\ vr.+2\times 2vr.}}{=} \begin{vmatrix}0&-10&-9\\1&3&2\\0&12&8\end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix}-10&-9\\12&8\end{vmatrix} = -(-80+108) = \underline{\underline{-28}}$$

② Reši matrično enačbo $XA^T=B$, kjer sta $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&5&5\\1&1&3\end{bmatrix}$ in $B=\begin{bmatrix}6&10&5\\12&20&10\end{bmatrix}$

Operacije, ki ohranjajo rang (sistemi, matr. enačbe, inverz, rang)
- vrstico množimo z neničelnim št.
- vrstice lahko premešamo
- vrstici lahko prištejemo večkratnik druge

$$Ax=b \quad [A \,\vdots\, b] \longrightarrow [\triangle \,\vdots\, \ ] \sim [I \,\vdots\, x]$$

$$AX=B \quad [A \,\vdots\, B] \longrightarrow [I \,\vdots\, X]$$

$$XA^T=B \quad /()^T$$

$$AX^T=B^T \longrightarrow [A \,\vdots\, B^T] \rightsquigarrow [I \,\vdots\, X^T]$$

$$[A \,\vdots\, B^T] = \left[\begin{array}{ccc|cc}2&1&3&6&12\\0&5&5&10&20\\1&1&3&5&10\end{array}\right] \begin{matrix}\\:5\\\\\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|cc}2&1&3&6&12\\0&1&1&2&4\\0&1&3&4&8\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc}2&1&3&6&12\\0&1&1&2&4\\0&0&2&2&4\end{array}\right]$$

① 0 pod diagonalo
2×3vr. − 1vr.

3vr. − 2vr.

② 0 nad diagonalo
2×2vr. − 3vr.
1vr. − 3×2vr.

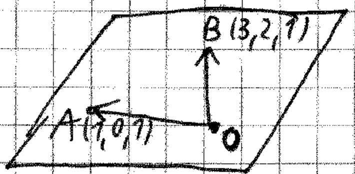
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc}-2&-2&0&0&0\\0&2&0&2&4\\0&0&2&2&4\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc}2&0&0&2&4\\0&2&0&2&4\\0&0&2&2&4\end{array}\right] \begin{matrix}:2\\:2\\:2\end{matrix}$$

1vr. + 2vr.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&2\\0&1&0&1&2\\0&0&1&1&2\end{array}\right] \qquad X^T=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\\1&2\end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{bmatrix}$$

1. kol. iz mat 2, 2003

① Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točki (1,0,1), (3,2,1), če veš da poteka skozi koordinatno izhodišče.



$\vec{a} = \vec{OA} = (1,0,1)$
$\vec{b} = \vec{OB} = (3,2,1)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2,2,2) = 2(-1,1,1) \Rightarrow \vec{n} = (-1,1,1)$$

ravnina: $ax+by+cz=d$ $\quad \vec{n}=(a,b,c)$ $\quad d=\vec{n}\cdot\vec{r}_A$

$$-x+y+z=d, \quad d=\vec{n}\cdot(0,0,0)=0$$

$$R: -x+y+z=0$$

premica $\frac{x-a}{s_1}=\frac{y-b}{s_2}=\frac{z-c}{s_3}$ $\quad \vec{s}=(s_1,s_2,s_3)$ $\quad A(a,b,c)$

② Kateremu pogoju morajo ustrezati parametri a, b in c, da bo sistem
$x+2y+z=a$
$2x+z=b$
$-x-6y-2z=c$
rešljiv za izbiro a=1, b=1, c=-2.

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ -1 & -6 & -2 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -4 & -1 & b-2a \\ 0 & -4 & -1 & a+c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -4 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 3a+c-b \end{array}\right]$$

2vr. − 2·1vr. $\quad$ 3vr. − 2. vr.
3vr. + 1vr.

Pogoj: $\underline{\underline{3a+c-b=0}}$ (ranga enaka = sistem je rešljiv)

1 − 2 − 1

$a=1, b=1, c=-2$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x+2y+z=1$
$-4y-z=-1$

1-parametrična rešitev

$\left.\begin{array}{l} r=2 \\ n=3 \end{array}\right\}$ 1 par.

$$\boxed{\begin{array}{l} z=1-4y \\ y = \text{poljuben} \\ x=1-2y-z \Rightarrow x=2y \end{array}}$$

Aleta®

③ Določi parameter a tako, da bosta -3 in 5 lastni vrednosti matrike $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix}$. Za ta izbor par. a. poišči vse lastne vrednosti in vektorje zg. matrike.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & a & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ a & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot\left((-1-\lambda)(3-\lambda)-a\right)=$$

razvoj po prvem stolpcu

$$=(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\lambda-3-a)=0$$

$\lambda=-3$
$\lambda=5$

$\lambda=-3: \quad 9+6-3-a=0 \Rightarrow a=12$
$\lambda=5: \quad 25-10-3-a=0 \Rightarrow a=12$

Lastne vrednosti: $\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-3 \quad \lambda_3=5.$

Lastni vektorji:

$\boxed{\lambda_1=1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3vr. + 6×2vr. 2vr. + 1vr. 3vr. + 8×2vr.

$2y-2z=0$
$-z=0$

$z=0$
$y=0$
$x=$ poljuben

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2=-3}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} :2 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

3vr. − 6×2vr.

$2x+y-z=0$
$2y+z=0$

$z=-2y$
$y=$ poljuben
$x=\frac{1}{2}(z-y)=-\frac{3}{2}y$

$$\vec{v}_2=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3=5}$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 12 & -2 \end{bmatrix} :2 \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3vr + 2×2v

$-2x+y-z=0$
$-6y+z=0$

$z=6y$
$y=$ poljuben
$x=\frac{1}{2}(y-z)=-\frac{5}{2}y$

$$\vec{v}_3=\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

④ Določi konvergenčni polmer vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n n^4}{2^{2n}}$.

$a = 1 \qquad a_n = \frac{n^4}{2^{2n}}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{n^4}{2^{2n}}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^4}=1}{\sqrt[n]{4^n}=4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

1. Kolokvij Mat II, 2002

④ Poišči matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Preslikava $\mathcal{A}$ je določena s predpisom $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{x} \times (1,-1,1)$.

slike stan. baze

$$A = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & \end{bmatrix} \qquad \mathbb{R}^3: \underbrace{\vec{i} = (1,0,0)\ \vec{j} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1)}_{\text{stand. baza}}$$

$$\mathcal{A}(\vec{i}) = \vec{i} \times (1,-1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,-1)$$

$$\mathcal{A}(\vec{j}) = \vec{j} \times (1,-1,1) = (1,0,-1) \qquad \mathcal{A}(\vec{k}) = \vec{k} \times (1,-1,1) = (-1,1,0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

kateri vektor se preslika v vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{z}$? — takšen $\vec{y}$ ne obstaja

$$A \cdot \vec{y} = \vec{z}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$ sistem lin. enačb (matrični zapis)

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

3vr. − 1 vr. $\qquad$ 3vr. + 2vr.

ni rešitve

1. kol. iz MAT 2, 2006

② Izračunaj kot med premico $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$ in ravnino

$\pi: x+2y-z=9$.

$\vec{n}=(1,2,-1)$

$\vec{s}=(2,1,1)$

$A(1,-2,3)$

$\varphi = \frac{\pi}{2} - kot(\vec{n},\vec{s})$

$\cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

14.04.2008

Taylorjeva vrsta (primer potenčne vrste)

Razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = a$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ostanek

$$\underbrace{f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Taylorjev polinom stopnje } n} + R_n$$

Taylorjev polinom (stopnje n) je najboljši polinomski približek (stopnji n) dane funkcije.

Razvoj nekaterih elementarnih funkcij okrog točke $x=0$.

a.) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $|x| < \infty$ – konvergira povsod

b.) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $|x| < \infty$

c.) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $|x| < \infty$

d.) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$; $|x| < 1$

e.) Binomska formula: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$; $|x| < 1$

binomski simbol

f.) Geometrijska vrsta: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $|x| < 1$

1. Razvij funkcijo v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 in določi območje konvergence vrste:

a) $f(x)=e^{-2x}$

1. način: po definiciji $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots$

$$f(x)=e^{-2x} \rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=e^{-2x}(-2) \rightarrow f'(0)=-2$$
$$f''(x)=e^{-2x}(-2)^2 \rightarrow f''(0)=(-2)^2$$
$$f'''(x)=e^{-2x}(-2)^3 \rightarrow f'''(0)=(-2)^3$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=e^{-2x}(-2)^n \rightarrow f^{(n)}(0)=(-2)^n$$

Taylorjeva vrsta okrog ničle

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-2)^n}{n!}}_{a_n}x^n$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^n}{n!}}{\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{-2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty$$

Konv. območje: $|x|<\infty$

2. način: pomagamo si z znanim razvojem

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\quad |x|<\infty$$

$$e^{-2x}=1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n!},\quad |-2x|<\infty \;/:2$$
$$|x|<\infty$$

b) $g(x)=x^2e^{-x^2}$

$$x^2e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{a_{2n+2}}x^{2n+2}\qquad \sum a_n x^n$$

Konv. območje: $|-x^2|<\infty$
$$|x|^2<\infty \;/\sqrt{\ }$$
$$|x|<\infty$$

Parcialni ulomki

c.) $h(x)=\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{A\cdot(x-3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

Binomska: $(1+x)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{n} x^n \,;\ |x|<1$

Geometrijska: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,;\ |x|<1$

$1 = Ax-3A+Bx-2B$

$x:\ 0 = A+B$

konst: $1 = -3A-2B$

$1 = 3B-2B \Rightarrow B=1 \quad A=-1$

$h(x)=\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3} = \frac{1}{2-x}-\frac{1}{3-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}-\frac{1}{3(1-\frac{x}{3})}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^n}{2^n}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^n}{2^n}\right) = *$

$\left|\frac{x}{2}\right|<1 \qquad \left|\frac{x}{3}\right|<1$

$\boxed{|x|<2 \qquad |x|<3}$ PRESEK

Konv. območje: $|x|<2$

$* = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}_{a_n} x^n$

d.) $i(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad R: i(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n} \,;\ |x|<1$

e.) $j(x)=\arcsin x \quad$ namig: $\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$j(x)=\int i(x)\,dx = \int \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}}_{\text{Taylorjeva vrsta } i(x)}\,dx =$ ← zamenjamo integral in vsoto

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}\,dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\int x^{2n}\,dx =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}_{a_n} \qquad |x|<1$

2. Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylor-jevo vrsto okoli točke x_0. Določi tudi območje konvergence.

a.) $f(x)=\frac{1}{x^3}$; $x_0=1$

$$R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}(x-1)^n; \quad |x-1|<1$$

b.) $f(x)=\frac{1}{(x+3)^3}$; $x_0=1$ $\qquad \sum a_n(x-1)^n$

$$f(x)=\frac{1}{(x+3)^3}=(x+3)^{-3}=(4+(x-1))^{-3}=\left(4\cdot\left(1+\frac{x-1}{4}\right)\right)^{-3}=\frac{1}{4^3}\boxed{\left(1+\frac{x-1}{4}\right)^{-3}}=$$

Binomska formula

$\alpha \Rightarrow -3$

$x \Rightarrow \frac{x-1}{4}$

$$=\frac{1}{4^3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n = *$$

$$\left|\frac{x-1}{4}\right|<1 \Rightarrow |x-1|<4$$

$$* = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\binom{-3}{n}\frac{1}{4^{n+3}}}_{a_n}(x-1)^n$$

$\binom{-3}{n}=$

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$

$\binom{20}{3}=$ št. različnih trojk iz množice 20 tekačev

Binomski simboli

$$m,n\in\mathbb{N}: \binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)\cancel{(m-n)!}}{n!\cancel{(m-n)!}}$$

$$\alpha\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}: \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\binom{\alpha}{0}=1$$

$$\binom{\alpha}{1}=\alpha$$

$$\binom{-3}{n}=\frac{-3\cdot(-4)\cdot\ldots\cdot(-2-n)}{n!}=\frac{(-1)^n\,3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n+2)}{n!}=\frac{(-1)^n\frac{(n+2)!}{2}}{n!}=$$

$$=\frac{(-1)^n\cdot(n+2)(n+1)}{2}$$

c.) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$; $x_0 = 2$

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax - A + Bx + B}{x^2-1}$$

x: $A+B=1$
kon.: $-A+B=0$
$A=B$
$A=\frac{1}{2}$
$B=\frac{1}{2}$

$$= f(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} = *$$

geo: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $|x|<1$

$$* = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{((x-2)+3)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-2)+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3(1+\frac{x-2}{3})} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(x-2)} =$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-(-\frac{x-2}{3})} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(-(x-2))} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-(x-2))^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\,\frac{(-1)^n(x-2)^n}{3^n} + \frac{1}{2}(-1)^n(x-2)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n \underbrace{\left(\frac{1}{6\cdot 3^n} + \frac{1}{2}\right)}_{= a_n}$$

$\left|\frac{-(x-2)}{3}\right| < 1$ $\quad$ $|-(x-2)| < 1$

$|-(x-2)| < 3$ $\quad$ $|(x-2)| < 1$

$|x-2| < 3$

PRESEK

Območje konv: $|x-2| < 1$

3. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj vrednost $\frac{1}{\sqrt{e}}$ na tri decimalke natančno.

$\| e^{-\frac{1}{2}}$

$f(x) = e^x$ ← Taylorjeva vrsta okrog $a=0$
$f(-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad |x| < \infty$$

$$e^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-\tfrac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} + \ldots$$

Računanje približkov

$s_1 = 1$
$s_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$
$s_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} = 0{,}625$
$s_4 = s_3 + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} = 0{,}60416$
$s_5 = s_4 + \frac{(-\frac{1}{2})^4}{4!} = 0{,}60677$
$s_6 = s_5 + a_6 = 0{,}60651$

R: $\frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0{,}606$

4. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{n}}$ do vključno potence x^3 izračunaj približno vrednost korena $\sqrt{198}$.

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{n}=\alpha} \underset{\substack{\text{binomska}\\ \text{vrsta}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{n}}{k}x^k \quad ; \quad |x|<1$$

$$=\binom{\frac{1}{n}}{0}+\binom{\frac{1}{n}}{1}x+\binom{\frac{1}{n}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{n}}{3}+x^3 = 1+\frac{1}{n}x+\binom{\frac{1}{n}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{n}}{3}x^3$$

$$\sqrt{198}=198^{\frac{1}{2}}=(1+197)^{\frac{1}{2}}$$

$n=2$

$x=197 \leftarrow$ ne leži v konv. območju!

$$\sqrt{198}=(2+196)^{\frac{1}{2}}=\left(196\left(\frac{2}{196}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}=14\cdot\left(1+\frac{1}{98}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$x=\frac{1}{98}$ leži v konv. območju

$n=2$

$$\doteq 14\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{98}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{98^2}+\binom{\frac{1}{2}}{3}\frac{1}{98^3}\right)$$

$$\doteq 14\cdot\left(1+\frac{1}{196}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\cdot\frac{1}{98^2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\frac{1}{98^3}\right)=14{,}071247\ldots$$

5. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{4x^2}$$

$$e^x=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\cancel{1}+\cancel{2x}+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots\right)-\cancel{1}-\cancel{2x}}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\ldots\right):x^2}{4x^2\ :x^2}$$

$x\to\infty$ največja potenca

$x\to 0$ najmanjša potenca

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\frac{8x}{3!}+\frac{16x^2}{4!}+\ldots}{4}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

6. Z uporabo T. vrste izračunaj naslednje integrale na tri decimalke natančno.

a.) $$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^2 \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x}\,dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \dots\right]_0^2 =$$

$$= 2 - \frac{8}{3\cdot 3!} + \frac{32}{5\cdot 5!} - \frac{2^7}{7\cdot 7!} + \dots$$

$s_1 = 2$

$s_2 = 2 - \frac{8}{3\cdot 3!} = 1{,}555\dots$

$s_3 = s_2 + \frac{32}{5\cdot 5!} = 1{,}60888\dots$

$s_4 = s_3 - \frac{2^7}{7\cdot 7!} = 1{,}60526$

$s_5 = s_4 + \frac{2^9}{9\cdot 9!} = 1{,}60541\dots$

R: $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx \doteq 1{,}605$

b.) $\int_0^1 \cos x^2\,dx$ R: $0{,}904$

21.04.2008

Fourierjeva vrsta

Razvoj funkcije $f(x)$, ki je periodična s periodo T (ali podana na intervalu (t_0, t_0+T)):

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n w_0 x) + b_n \sin(n w_0 x)\right)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

T … perioda ali dolžina intervala

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\cos(n w_0 x)\,dx \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\sin(n w_0 x)\,dx$$

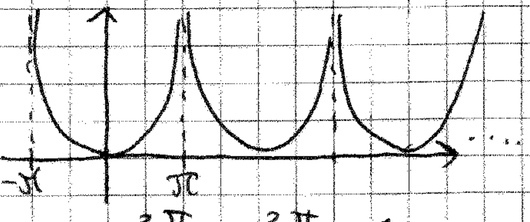
Velja: + če je funkcija $f(x)$ soda, je njena Fourierjeva vrsta sestavljena samo iz kosinusov in konstante ($b_n = 0$)

+ če je funkcija $f(x)$ liha, je njena Fourierjeva vrsta sestavljena samo iz sinusov ($a_0 = 0$, $a_n = 0$)

Če je funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $(0, a)$, jo lahko razvijemo v Fourierjevo vrsto kot:

- funkcijo s periodo a – navadna Fourierjeva vrsta
- sodo funkcijo s periodo $2a$ – sodo nadaljevanje (kosinusna F. vrsta)
- liho funkcijo s periodo $2a$ – liho nadaljevanje (sinusna F. vrsta)

1. Razvij funkcijo $f(x) = x^2$ v Fourierjevo vrsto na intervalu $(-\pi, \pi)$



$f(x)$ soda: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n w_0 x)$

$T = 2\pi$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6\pi}\left(\pi^3 + \pi^3\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2\cos(n w_0 x)}_{\text{soda}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos(n x)\,dx =$$

per partes: $u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$
$dv = \cos(nx)dx \rightarrow v = \frac{1}{n}\sin(nx)$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\sin(nx)2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}\sin(n\pi) - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)dx\right) =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin n\pi = 0\\ \cos n\pi = (-1)^n\end{array}}$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(-x\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_0^\pi + \int \frac{1}{n}\cos(nx)dx\right) =$$

p.p.: $u = x \rightarrow du = dx$
$dv = \sin(nx)dx \rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos(nx)$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{\pi}{n}\overbrace{\cos n\pi}^{(-1)^n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^\pi\right) = -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right) =$$

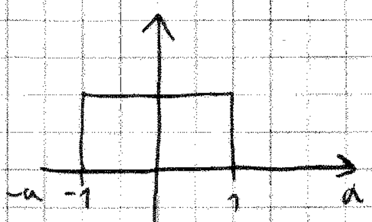
$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$R: f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx)$$

2. Razvij funkcijo $f(x) = \begin{cases} x; & 0<x<\pi \\ 0; & -\pi<x\le 0\end{cases}$ v Fourierjevo vrsto na intervalu $(-\pi,\pi)$.

$$R: f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

3. Razvij funkcijo $f(x) = \begin{cases} 0 & ; -a\le x<-1 \\ 1 & ; -1\le x<1, \\ 0 & ; 1\le x\le a\end{cases}$ v Fourierjevo vrsto na intervalu $[-a,a]$, kjer je $a\in\mathbb{R}^+$, $a>1$



soda: $b_n = 0$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2a}\int_{-1}^{1}1\,dx = \frac{1}{2a}\cdot 2 = \frac{1}{a}$$

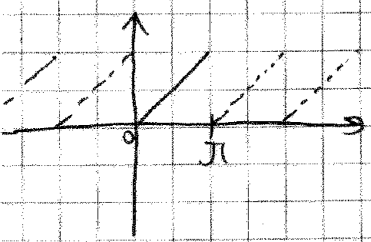
$$a_n = \frac{2}{2a}\int_{-1}^{1}1\cos\left(n\frac{\pi}{a}x\right)dx = \frac{1}{\cancel{a}}\frac{\cancel{a}}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\int_{-a}^{a} = \int_{-a}^{-1}0 + \int_{-1}^{1}1 + \int_{1}^{a}0$$

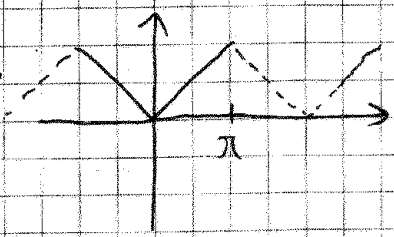
$$= \frac{1}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{a}\right) + \frac{1}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{a}\right) = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)$$

$$R: \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$$

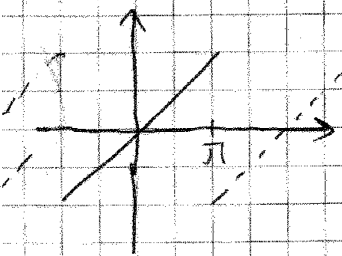
4. Razvij funkcijo $f(x)=x$, ki je dana na intervalu $[0,\pi]$ najprej v sinusno, nato v kosinusno, potem pa še v navadno Fourierjevo vrsto.



navadna Fou. vrsta
$f(x)=x$ na $[0,\pi]$



Kosinusna F. vrsta
$f(x)=\begin{cases} x; & 0\le x\le \pi \\ -x; & -\pi\le x\le 0 \end{cases}$
na $[-\pi,\pi]$



sinusna F. vrsta
$f(x)=x$ na $[-\pi,\pi]$

A) Sinusna F. vrsta: $f(x)=x$ na $[-\pi,\pi]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 x);\ a_0=0,\ a_n=0 \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{\text{liha}} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{liha}}dx=\frac{1}{\pi}\cdot 2\cdot\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx=$$

soda

per partes $u=x \rightarrow du=dx$
$dv=\sin(nx)dx \rightarrow v=-\cos(nx)\frac{1}{n}$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos(nx)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nx)dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right)=$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n$$

R: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)(-1)^n\sin(nx)$

B) cosinusna

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad f(x)=\begin{cases}-x & ; -\pi \le x \le 0\\ x & ; 0\le x\le \pi\end{cases} \quad \text{na } [\pi,\pi]$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{1}{\cancel{\pi}}\frac{\pi^{\cancel{2}}}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

$$u=x \Rightarrow du=dx$$
$$dv=\cos(nx)dx \Rightarrow v=-\frac{1}{n}\sin(nx)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

$$R: f(x)\approx\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos nx$$

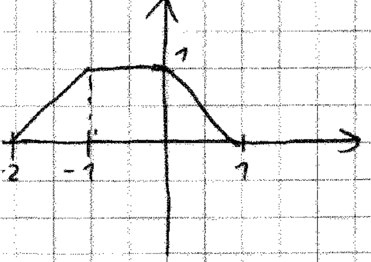
C) NAVADNA (D.N)

$$R: \frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2nx$$

5. Razvij funkcijo $f(x)=\sin x$ na intervalu $[0,\pi]$ v cosinusno Fourierjevo vrsto.

$$R: f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(1-4n^2)\pi}\cos(2nx)$$

6. Razvij funkcijo $f(t)$ v Fourierjevo vrsto na intervalu $[-2,2]$.



$$R: f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right)$$

Funkcije več spremenljivk

Funkcija n spremenljivk je funkcija $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x_1, \dots x_n) = y$

7. Poišči in nariši def. območje funkcije 2 spremenljivk.

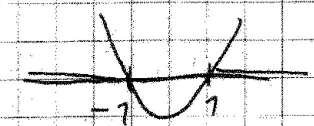
a.) $f(x,y) = \frac{x-5xy}{3\sqrt{y-x^2}}$ R: $Df = \{(x,y);\ y > x^2\}$

b.) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$

$Df = \{(x,y);\ 1-x^2 \geq 0 \text{ in } y^2-1 \geq 0\}$

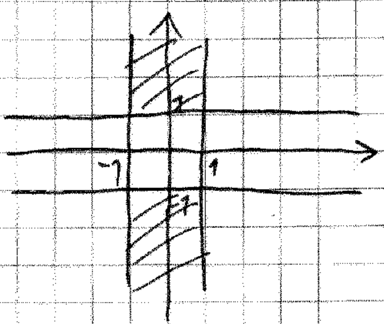
pogoji $1-x^2 \geq 0$ $x \in [-1,1]$

$y-1 \geq 0$ $(y-1)(y+1)$



$y \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

$Df = \{(x,y);\ x \in [-1,1] \text{ in } y \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)\}$



Nivojske krivulje ali nivojnice

Nivojske krivulje funkcije $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $z = f(x,y)$, so krivulje $f(x,y) = C$ v def. območju funkcije f, na katerih zavzame f konstantno vrednost C.

8. Izračunaj in nariši nivojske krivulje funkcije dveh spremenljivk

a.) $f(x,y) = x\cdot y$

$f(x,y) = C$

$C=0$: $xy = 0$

$\underbrace{x=0}_{y\ os}$ ali $\underbrace{y=0}_{x\ os}$ } koordinatni križ

$C=1$: $xy=1$

$y=\frac{1}{x}$ hiperbola

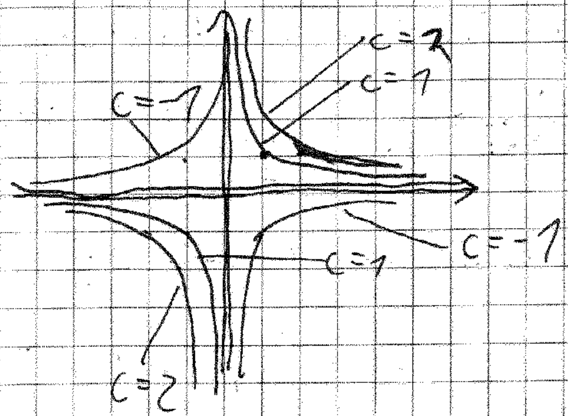
$C=2$: $xy=2$

$y=\frac{2}{x}$

itd.

$C=-1$: $xy=-1$

$y=-1/x$



b.) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

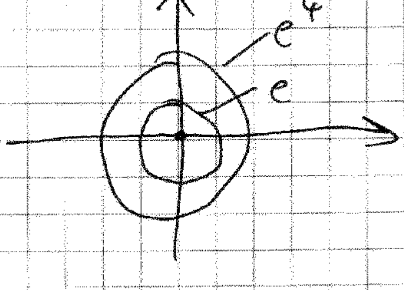
$C=0$: $e^{x^2+y^2}=0$ prazna

$C=1$: $e^{x^2+y^2}=1$

$x^2+y^2=0 \Rightarrow x=0 \wedge y=0$ koor. izh.

$c=e$: $x^2+y^2=1$ krožnica s polmerom 1

$c=e^4$: $\cancel{x}^2+y^2=4$ $R=2$



Aleta®

Parcialni odvodi

Funkcijo $f(x_1, \dots x_n)$ lahko odvajamo na vsako spremenljivko $x_1 \dots x_n$ posebej. Ko odvajamo f po spremenljivki x_i, obravnavamo vse ostale spremenljivke x_j $(j \neq i)$ kot konstante.

Parcialni odvod funkcije $f(x_1, \dots, \dots, x_n)$ po spremenljivki x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 \dots x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots x_n) - f(x_1, \dots x_i, \dots x_n)}{h}$$

Totalni dif. funkcije f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

9. Poišči ~~vse~~ parcialne odvode in totalni dif. funkcije:

a.) $f(x,y) = (x^3 - y^2)^2$

R: $df = 6x^2(x^3 - y^2)dx - 4y(x^3 - y^2)dy$

b.) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2) \cdot y$

$f_x' = y \cdot \cos(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (2x) = 2xy \cdot \cos(x^2 + y^2 + z^2)$

$f_y' = \cos(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2y \cdot y + \sin(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 1 = 2y^2 \cos(x^2 + y^2 + z^2) + \sin(x^2 + y^2 + z^2)$

$f_z' = y \cos(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2z$

R: $df = f_x' dx + f_y' dy + f_z' dz = \cancel{2xy \cos(x^2 + y^2 + z^2) dx + (\sin(x^2 + y^2 + z^2}$

$df = 2xy \cos(x^2 + y^2 + z^2) dx + (\sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2y^2 \cos(x^2 + y^2 + z^2)) dy + 2yz \cos(x^2 + y^2 + z^2) dz$

05.05.2008

Poišči prve parcialne odvode in totalni diferencial.

c.) $f(x,y,z)=\arcsin \frac{xy}{z} + \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \arcsin \frac{xy}{z} + \ln (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_x' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{xy}{z})^2}}\cdot\frac{y}{z} + \sqrt{x^2+y^2}\cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot \cancel{2}x}_{\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \frac{x\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)}$$

$$f_y' = \frac{x}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$f_z' = \frac{z}{(z^2+x^2y^2)}\cdot\left(-z^{-2}xy\right) + 0 = -\frac{xy}{z\cdot\sqrt{z^2-x^2y^2}}$$

$$df = f_x'dx + f_y'dy + f_z'dz$$

$$df = \left(\frac{y}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dy - \frac{xy}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}dz$$

1. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $\sqrt{\underbrace{2.04}_{x}{}^3+\underbrace{2.98}_{y}{}^2-1}$.

majhni spremembi koordinat

Približek z diferencialom: $f(a+h,b+k)\approx f(a,b)+\underbrace{f_x'(a,b)\cdot h+f_y'(a,b)\cdot k}_{\text{diferencial}}$

$f(x,y)=\sqrt{x^3+y^2-1} = (x^2+y^2-1)^{\frac{1}{2}}$

$(a,b)=(2,3)$

$h=0{,}04$
$k=-0{,}02$

$$f_x' = \frac{1}{2}(x^3+y^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2$$

$$f_y' = \frac{1}{\cancel{2}}(x^3+y^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot \cancel{2}y$$

$$f(2,3)=4$$

$$f_x'(2,3)=\frac{3}{2}$$

$$f_y'(2,3)=\frac{3}{4}$$

$$\sqrt{2.04^3+2{,}98^2-1} \approx f(2,3)+f_x'(2,3)\cdot 0{,}04+f_y'(2,3)\cdot(-0{,}02)$$
$$= 4+\frac{3}{2}\cdot 0{,}04+\frac{3}{4}\cdot(-0{,}02)$$
$$= 4+0{,}06-0{,}015 = \underline{\underline{4{,}045}}$$

2. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $(-1,99)^3 + \ln 1,03$

R: $-7,09$

3. Določi funkcijo $z = z(x, y)$, če veš, da je:

a.) $z_x = \cos(xy) \cdot y + \frac{2x}{y} \Rightarrow z(x,y) = \int z_x \, dx = \int \left(\cos(xy) \cdot y + \frac{2x}{y}\right) dx =$

$\underline{z(0,1) = 2}$

$$= \cancel{y} \sin(xy) \frac{1}{\cancel{y}} + \frac{\cancel{2}}{y} \frac{x^2}{\cancel{2}} + c(y)$$

$$z(x,y) = \sin(xy) + \frac{x^2}{y} + C(y)$$

$$z(0,1) = c(1) = 2$$

$$R: z(x,y) = \sin(x,y) + \frac{x^2}{y} + 2$$

b.) $z_x = \cos x \cdot \cos y$

$z_y = -1 - \sin x \sin y$

$\underline{z(0,1) = -1}$

R: $z(x,y) = \sin x \cos y - y$

4. Izračunaj parcialna odvoda $\frac{\partial z}{\partial u}$ in $\frac{\partial z}{\partial v}$ posredno podane funkcije $z(x,y) = x^3 - y^2$, kjer sta $x(u,v) = u \cos v$ in $y(u,v) = \ln \frac{u+v}{u-v}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = z_x' \cdot x_u' + z_y' \cdot y_u'$$

$\underline{z(x,y)}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dz}{dv}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3x^2 \cdot \cos v - 2y \cdot \frac{u-v}{u+v} \cdot \frac{1(u-v) - (u+v) \cdot 1}{(u-v)^2} = 3x^2 \cdot \cos v + \frac{4yv}{u^2 - v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 3x^2 \cdot (-u \sin v) - 2y \cdot \frac{u-v}{u+v} \cdot \frac{v - \cancel{v} + u + \cancel{v}}{(u-v)^2} = -3x^2 u \sin v - \frac{4uy}{u^2 - v^2}$$

Višji parcialni odvodi

$f(x_1, \dots, x_n) \Longrightarrow$ n različnih parcialnih odvodov 1. reda: $f_{x_1}', \dots, f_{x_n}'$

n^2 (različnih) parcialnih odvodov 2. reda: $f_{x_i x_j}''$

$f''_{\sqcup\sqcup}$, $n \cdot n = n^2$

$$f_{x_i x_j}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Vrstni red odvajanja pri mešanih odvodih 2. reda ni pomemben, če odvodi obstajajo in so zvezne funkcije:

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

$$f_{xxyyy} = f_{yxyxy} = f_{yyxxy} = \dots$$

5. Poišči vse parcialne odvode 1. in 2. reda za funkcijo $f(x,y) = \ln(x^2+y)$. Izračunaj tudi $f_{xy}(1,0)$.

$f_x' = \frac{1}{x^2+y} 2x$

$f_y' = \frac{1}{x^2+y}$

$f_{xy}'' = \frac{-2x \cdot 2x}{(x^2+y)^2} + \frac{1}{x^2+y} 2 = \frac{-4x^2 + 2x^2 + y}{(x^2+y)^2}$

$f_{yy}'' = \frac{-1}{(x^2+y)^2}$

$f_{yx}'' = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$

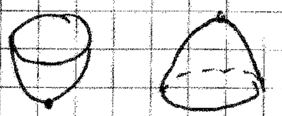
$f_{xy}''(1,0) = -2$

6. Izračunaj $f_{yzz}(1,0,1)$ za funkcijo $f(x,y,z) = y \ln(x^2+z^4)$.

R: $f_{yzz}(1,0,1) = \frac{1}{2}$

Ekstremi funkcij več spremenljivk

$f(x,y)$



Edini kandidati za lokalne ekstreme so stacionarne ali kritične točke funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$. To so tiste točke, kjer so vsi prvi parcialni odvodi enaki 0.

$$f_{x_1}' = 0,\ f_{x_2}' = 0, \dots\ f_{x_n}' = 0$$

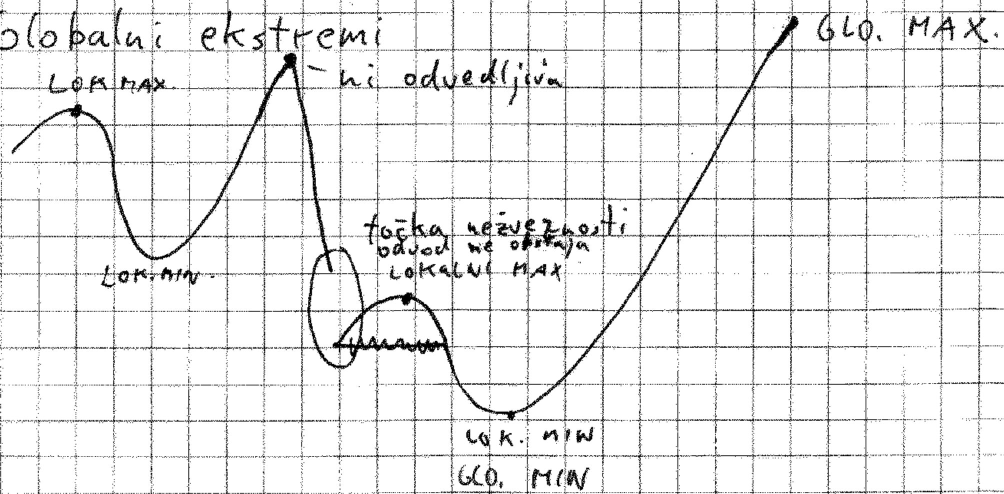
Naj bo $f(x,y)$ funkcija dveh spremenljivk. S pomočjo Hessejeve matrike (matrika 2. odvoda) ugotovimo, ali je v dani stacionarni točki res lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$

$$H_f = Hess_f = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{bmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{bmatrix} \end{array}$$

Za stacionarno točko (a,b) tedaj velja:

1. Če je $\det H_f(a,b) > 0$, je v (a,b) lokalni ekstrem.
   a.) če je $f_{xx}''(a,b) > 0$, je v (a,b) lokalni minimum
   b.) če je $f_{xx}''(a,b) < 0$, je v (a,b) lokalni maksimum
   c.) če je $f_{xx}''(a,b) = 0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati
2. če je $\det H_f(a,b) < 0$, v (a,b) ni ekstrema ampak je sedlo
3. če je $\det H_f(a,b) = 0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati

Globalni ekstremi



Kandidati za globalne ekstreme:

- stacionarne točke
- točke neodvedljivosti
- robne točke definicijskega območja

7. Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

stacionarne točke:

$f_x' = 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2$

$f_y' = 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - x = 0$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x(x-1)(x^2+x+1)$

$a^3 - b^3 = (a-b)\boxed{(a^2+ab+b^2)}$

$a^3 + b^3 = (\quad)(\quad)$

nerazcepno

$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$

$x_2 = 1 \quad x_2 = 1$

$\left.\begin{matrix} T(0,0) \\ T(1,1) \end{matrix}\right\}$ 2 stacionarni točki

Hessejeva matrika:

$f_{xx}'' = 6x$

$f_{xy}'' = -3$

$f_{yy}'' = 6y$

$$H_f = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

Karakterizacija ekstremov:

$T_1(0,0)$: $\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$

$\Rightarrow$ v T_1 ni lok. ekstrema

$T_2(1,1)$: $\det H_f(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$

$\Rightarrow$ v T_2 je lok. ekstrem

$f_{xx}''(1,1) = 6 > 0$

$\Rightarrow$ v T_2 je lok. minimum

8. Poišči stacionarne točke funkcije treh spremenljivk
$f(x,y,z)=2x^2+y^2+2z-xy-xz$.

R: $T(2,1,7)$

9. Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$

R: $T_1(\frac{1}{2},-1)$ lok. min

10. Določi lokalne ekstreme funkcije $z=z(x,y)$, ki je podana implicitno kot $\underbrace{x^2+y^2+z^2=4}_{\text{krogla}}$.

eksplicitno: $z(x,y)=$

stacionarne točke:

$z_x' = 2x+2z\cdot z_x'=0 \Rightarrow z_x'=-\frac{x}{z}$

$z_y' = 2y+2z\cdot z_y'=0 \Rightarrow z_y'=-\frac{y}{z}$

$z_x'=0,\ z_y'=0$

$2x=0$
$2y=0$ $\quad T(0,0)$

Hessejeva matrika

$z_{xx}' = 2+2(z_x'z_x'+z\,z_{xx}'')=0 \Rightarrow z_{xx}''=\frac{-1-z_x'^2}{z}$

$z_{xy}' = 2\cdot(z_y'z_x'+z\cdot z_{xy}'')=0 \Rightarrow z_{xy}''=\frac{-z_x'\cdot z_y'}{z}$

$z_{yy}'' = 2+2\cdot(z_y'z_y'+z\,z_{yy}'')=0 \Rightarrow z_{yy}''=\frac{-1-z_y'^2}{z}$

$$H_f=\begin{bmatrix}\frac{-1-z_x'^2}{z} & \frac{-z_x'\cdot z_y'}{z}\\ \frac{-z_x'\cdot z_y'}{z} & \frac{-1-z_y'^2}{z}\end{bmatrix}$$

Karak. stac. točk:

$T(0,0)$ $\quad \det H_f(0,0)=\begin{vmatrix}\frac{-1}{z(0,0)} & 0\\ 0 & \frac{-1}{z(0,0)}\end{vmatrix}=$

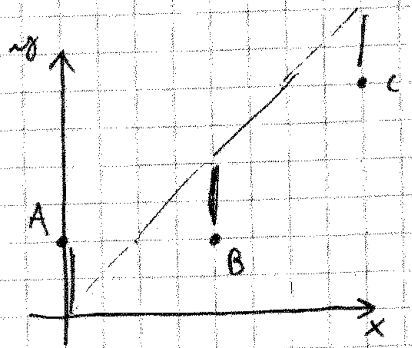
$=\frac{1}{z^2(0,0)}>0$

$\Rightarrow T(0,0)$ je lok. ekstrem

$z(0,0)$ $\quad z^2(0,0)=4$ $\quad z(0,0)=\pm 2$

$z_{xx}''(0,0)=\frac{1}{z(0,0)}=\begin{cases}-\frac{1}{2}<0 & \text{lokalni max.}\\ \frac{1}{2}>0 & \text{lok. min.}\end{cases}$

11. Poišči premico $y=ax+b$, za katero je vsota kvadratov vertikalnih odmikov od točk $A(0,1)$, $B(2,1)$ in $C(4,3)$ minimalna



$$\sum(\underbrace{a x_i + b}_{\text{vrednost na premici}} - y_i)^2$$

y_i – 2. koordinata točke (x_i, y_i)

$$f(a,b) = \underbrace{(a\cdot 0+b-1)^2}_{A} + \underbrace{(a\cdot 2+b-1)^2}_{B} + \underbrace{(a\cdot 4+b-3)^2}_{C} = (b-1)^2+(2a+b-1)^2+(4a+b-3)^2$$

$$= b^2-2b+1+4a^2+b^2-2b+1+4a(b-1)+16a^2+b^2-6b+9+8a(b-3)$$

$$= 20a^2+3b^2+12ab-28a-10b+11$$

$$f_a' = 40a+12b-28=0 \quad /:4$$

$$f_b' = 6b+12a-10=0 \quad /:2$$

$$\left.\begin{array}{l} 10a+3b-7=0 \\ 3b+6a-5=0 \end{array}\right\} - \quad 4a-2=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \quad b=\frac{2}{3}$$

$T\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ edina stac. točka $\Rightarrow$ lok. min

R: $y = \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$

Vezani ekstremi

Dana je funkcija $f(x,y)$. Zanimajo nas ekstremi nad krivuljo $g(x,y)=0$. Takšni ekstremi, rečemo jim vezani ekstremi, lahko nastopijo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije:

$$F(x,y,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lagrangeov multiplikator}}}{\lambda}) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) \qquad \underbrace{g(x,y)=0}_{\text{vez ali pogoj}}$$

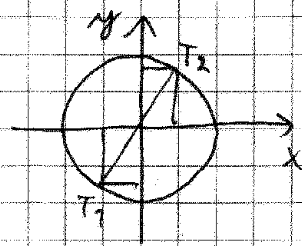
12. Poišči najmanjšo vrednost funkcije $\underbrace{f(x,y)=x+2y}_{\text{ravnina v pro.}}$ na krivulji $\underbrace{x^2+y^2=5}_{\text{krožnica}} \rightarrow \underbrace{x^2+y^2-5=0}_{g(x,y)\text{ vez}}$

Lagrangeova funkcija

$$F(x,y,\lambda) = x+2y+\lambda(x^2+y^2-5)$$

$$F_x' = 1+\lambda 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}$$
$$F_y' = 2+\lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda}$$
$$F_\lambda' = x^2+y^2-5=0 \quad \text{vez}$$

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2-5=0$$
$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}-5=0 \quad / \cdot 4\lambda^2$$
$$1+4-20\lambda^2=0$$
$$5=20\lambda^2$$
$$\lambda^2=\frac{1}{4} \quad \lambda=\pm\frac{1}{2}$$



$T_1(-1,-2),\ \lambda_1=\frac{1}{2}$ $\qquad f(T_2)=5$ max

$T_2(1,2),\ \lambda_2=-\frac{1}{2}$ $\qquad f(T_1)=-5$ min

2. stacionarni točki

DELOVNI LISTI Z ~~[illegible]~~ AVDITORNIH VAJ - GLES PO POGLAVJIH

12. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2008

VEZANI EKSTREMI FUNKCIJ – NADALJEVANJE

1. naloga:[DN] Poišči vezane ekstreme funkcije $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, kjer je vez podana z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lagrangeova funkcija je

$$F(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda \cdot g(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Iskani vezani ekstremi lahko nastopijo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} F_x &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y &= -2 + 2\lambda y = 0 \\ F_z &= 2 + 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Iz prvih treh enačb lahko izrazimo neznanke x, y, z in dobimo:

$$x = -\frac{1}{2\lambda},\ y = \frac{1}{\lambda},\ z = -\frac{1}{\lambda}.$$

Sledi $y = -2x$ in $z = 2x$, kar lahko vstavimo v zadnjo enačbo:

$$x^2 + 4x^2 + 4x^2 - 1 = 0.$$

Dobimo $x^2 = \frac{1}{9}$ in zato $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Izračunamo še pripadajoče koordinate y in z in dobimo dve stacionarni točki:

$$T_1(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}),$$
$$T_2(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Ker zvezna funkcija na kompaktnem območju (v tem primeru sfera s polmerom 1) zavzame oba ekstrema (vezani minimum in vezani maksimum), moramo le še izračunati obe funkcijski vrednosti v stacionarnih točkah:

$$f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -3,$$
$$f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 3,$$

kar pomeni, da funkcija f zavzame minimum v točki T_1 (manjša funkcijska vrednost) in maksimum v točki T_2 (večja funkcijska vrednost).

Rezultat: $T_1(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$: vezani minimum in $f(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}) = -3$, $T_2(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$: vezani maksimum in $f(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = 3$.

2. naloga: Poišči vezane ekstreme funkcije $f(x,y,z) = x^2 - 14x + y^2 - 8y + 48 + z^2 - 8z$, kjer je vez podana z neenačbo $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Ker je vez (ki je v tem primeru krogla) podana z neenačbo, jo moramo razdeliti na dva dela:

a.) $x^2 + y^2 + z^2 < 1$: notranjost krogle,

b.) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: plašč krogle (sfera).

Kandidati za vezane ekstreme funkcije $f(x,y,z)$ so zato:

a.) Stacionarne točke funkcije $f(x,y,z)$, ki ležijo v notranjosti krogle (tj. zadoščajo neenačbi $x^2 + y^2 + z^2 < 1$).

Stacionarne točke funkcije $f(x,y,z)$ so rešitev sistema enačb:

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x - 14 = 0, \\ f'_y &= 2y - 8 = 0, \\ f'_z &= 2z - 8 = 0. \end{aligned}$$

Dobimo eno samo stacionarno točko $T_0(7,4,4)$. Ker ta točka ne leži v notranjosti krogle, tj. ne zadošča neenačbi $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, ni kandidat za iskane vezane ekstreme. V tem koraku tokrat nismo našli nobene točke, v kateri bi funkcija $f(x,y,z)$ ob dani vezi lahko zavzela maksimalno ali minimalno vrednost.

b.) Stacionarne točke Lagrangeove funkcije

$$F(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z),$$

kjer je $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ vez, ki se nanaša na sfero s polmerom 1.

Poiščimo torej stacionarne točke Lagrangeove funkcije

$$F(x,y,z;\lambda) = x^2 - 14x + y^2 - 8y + 48 + z^2 - 8z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

ki jih dobimo kot rešitev sistema enačb:

$$\begin{aligned} F'_x &= 2x - 14 + \lambda \cdot 2x = 0, \\ F'_y &= 2y - 8 + \lambda \cdot 2y = 0, \\ F'_z &= 2z - 8 + \lambda \cdot 2z = 0, \\ F'_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Sistem lahko npr. rešimo, tako da iz prvih treh enačb izrazimo spremenljivke x, y, z in dobljene izraze (odvisne samo od λ) vstavimo v zadnjo enačbo:

$$x = \frac{7}{1+\lambda},$$
$$y = \frac{4}{1+\lambda},$$
$$z = \frac{4}{1+\lambda},$$
$$(\frac{7}{1+\lambda})^2 + (\frac{4}{1+\lambda})^2 + (\frac{4}{1+\lambda})^2 - 1 = 0.$$

Iz zadnje enačbe dobimo dve vrednosti: $\lambda_1 = 8$ in $\lambda_2 = -10$. Sledita stacionarni točki:

$$T_1(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}),$$
$$T_2(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}).$$

Dobili smo torej dva kandidata, v katerih funkcija $f(x, y, z)$ lahko doseže vezana ekstrema. To sta točki T_1 in T_2. Ker zvezna funkcija na kompaktnem območju (v tem primeru krogla s polmerom 1) zavzame oba ekstrema (vezani minimum in vezani maksimum), moramo le še izračunati obe funkcijski vrednosti v stacionarnih točkah:

$$\begin{aligned} T_1: \quad & f(\tfrac{7}{9}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{4}{9}) && = 31, \\ T_2: \quad & f(-\tfrac{7}{9}, -\tfrac{4}{9}, -\tfrac{4}{9}) && = 67. \end{aligned}$$

Sledi, da funkcija f zavzame minimum v točki T_1 (manjša funkcijska vrednost) in maksimum v točki T_2 (večja funkcijska vrednost).

Rezultat: $T_1(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9})$: vezani minimum in $f(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}) = 31$, $T_2(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9})$: vezani maksimum in $f(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}) = 67$.

3. naloga:^{DN**} Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije $z = e^{-x^2-y^2}$ na območju $|x| + |y| \leq 1$.

Dano območje je kvadrat v ravnini z oglišči $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ in $(1,0)$. Iščemo najmanjšo in največjo vrednost funkcije na tem kvadratu. Ti dve vrednosti lahko nastopita kot lokalna ekstrema v notranjosti kvadrata ali pa kot vezana ekstrema na robu kvadrata. Najprej poiščimo lokalne ekstreme v notranjosti kvadrata. Stacionarne točke, ki so kandidati za lokalne ekstreme, so točke, v katerih so prvi parcialni odvodi enaki 0:

$$\begin{aligned} z_x &= e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) = 0 \\ z_y &= e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) = 0 \end{aligned}$$

Ker doseže funkcija e^x samo pozitivne vrednosti, iz zgornjih enačb sledi $x = 0$ in $y = 0$. Edina stacionarna točka je zato $T_1(0,0)$. Ta točka leži v notranjosti kvadrata, zato je kandidat za iskano najmanjšo oz. največjo vrednost. Če ne bi ležala v območju, bi jo iz obravnave izključili, zdaj pa jo moramo obravnavati kot morebitno iskano točko. Ker bo na koncu pomembno samo, kje je največja in kje najmanjša vrednost funkcije (izračunati bo treba funkcijske vrednosti), ni nujno, da zdaj ugotovimo, ali je v tej točki lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Zdaj poiščimo še vezane ekstreme na robu območja, na stranicah kvadrata. Vse štiri stranice opisuje enačba $g(x) = |x| + |y| - 1 = 0$. To je vez Lagrangeove funkcije:

$$Z(x, y; \lambda) = e^{-x^2-y^2} + \lambda(|x| + |y| - 1).$$

Kandidati za vezane ekstreme so stacionarne točke Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} Z_x &= -2xe^{-x^2-y^2} + \lambda|x|'_x = 0 \\ Z_y &= -2ye^{-x^2-y^2} + \lambda|y|'_y = 0 \\ Z_\lambda &= |x| + |y| - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pri tem je $|x|'_x$ odvod $|x|$ po spremenljivki x in $|y|'_y$ odvod $|y|$ po spremenljivki y. Bodimo pazljivi na to, da $|x|$ in $|y|$ v točki 0 nista odvedljiva (leva in desna odvoda nista enaka, imamo špico). To pomeni, da moramo kot potencialne kandidate za iskane točke obravnavati tudi točke $T_2(0, 1)$, $T_3(1, 0)$, $T_4(0, -1)$ in $T_5(-1, 0)$, torej ravno oglišča kvadrata. Drugje pa velja:

$$|x|'_x = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases} \qquad |y|'_y = \begin{cases} 1; & y > 0 \\ -1; & y < 0 \end{cases}$$

Iz prvih dveh enačb zgornjega sistema sledi:

$$\begin{aligned} 2xe^{-x^2-y^2} &= \lambda|x|'_x \\ 2ye^{-x^2-y^2} &= \lambda|y|'_y \end{aligned}$$

Če obe enačbi delimo, dobimo zvezo:

$$\frac{x}{y} = \frac{|x|'_x}{|y|'_y} \quad \text{oz.} \quad x|y|'_y = y|x|'_x.$$

Iz tretje enačbe zgornjega sistema za stacionarne točke v vsakem primeru sledi

$$2|x| = 1 \quad \text{oz.} \quad |x| = \frac{1}{2}.$$

Sedaj ločimo dve možnosti:

$$\begin{aligned} x \text{ in } y \text{ sta enako predznačena}: &\quad x = y \;\Rightarrow\; T_6(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), T_7(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), \\ x \text{ in } y \text{ sta različno predznačena}: &\quad x = -y \;\Rightarrow\; T_8(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), T_9(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Zdaj moramo samo še preveriti, kakšne so funkcijske vrednosti v dobljenih devetih točkah:

$f(0, 0) = 1 \;\Rightarrow$ največja vrednost na danem območju v $T_1(0, 0)$,

$f(0, 1) = e^{-1} \;\Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_2(0, 1)$,

$f(1,0) = e^{-1} \Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_3(1,0)$,

$f(0,-1) = e^{-1} \Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_4(0,-1)$,

$f(-1,0) = e^{-1} \Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_5(-1,0)$,

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ v $T_6(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ni ekstremne vrednosti,

$f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ v $T_7(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ ni ekstremne vrednosti,

$f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ v $T_8(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ ni ekstremne vrednosti,

$f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ v $T_9(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ni ekstremne vrednosti.

Rezultat: $T_1(0,0)$: največja vrednost na danem območju $f(0,0) = 1$; $T_2(1,0)$, $T_3(0,1)$, $T_4(-1,0)$, $T_5(0,-1)$: najmanjša vrednost na danem območju $f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1) = e^{-1}$.

DIFERENCIALNE ENAČBE

OSNOVNI POJMI

Diferencialna enačba reda n je zveza med neodvisno spremenljivko x, odvisno spremenljivko y ter njenimi odvodi $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Pri tem je $y' = \frac{dy}{dx}$.

Red diferencialne enačbe je stopnja najvišjega odvoda.

Rešitev diferencialne enačbe $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ na intervalu $[a, b]$ je vsaka funkcija $g(x)$, ki je na intervalu $[a, b]$ n-krat odvedljiva in za katero za vsak $x \in [a, b]$ velja $F(x, g(x), g'(x), \ldots, g^{(n)}(x)) = 0$ (zadošča diferencialni enačbi).

Rešitev diferencialne enačbe n-tega reda je n-parametrična družina funkcij.

Cauchyjeva naloga ali *začetni problem* imenujemo diferencialno enačbo skupaj z začetnimi pogoji. Rešitev začetnega problema je ena sama funkcija (parametre iz splošne rešitve začetni pogoji določijo).

4. naloga: Kateri diferencialni enačbi pripada družina krožnic $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$?

Podana je 3-parametrična družina funkcij. Parametri so a, b in r, torej obe koordinati središča in polmer. Diferencialna enačba, katere splošna rešitev bo dana družina krožnic, bo zato 3. reda, kar pomeni, da bo stopnja najvišjega odvoda, ki ga bo vsebovala, enaka 3.

Do iskane diferencialne enačbe pridemo, tako da dano enačbo odvajamo po edini neodvisni spremenljivki x (implicitno!) in se pri tem znebimo vseh treh parametrov. Ko jo odvajamo prvič, dobimo:

$$2(x-a)+2(y-b)y'=0 \quad \text{oz.} \quad x-a+(y-b)y'=0.$$

Zdaj odvajamo še drugič (bodimo pazljivi na zadnji člen v vsoti, ki ga moramo odvajati kot produkt dveh funkcij), da dobimo:

$$1+y'y'+(y-b)y''=0.$$

Ostal nam je le še en parameter b. Če enačbo ponovno odvajamo v tej obliki, se ga ne bomo znebili. Treba je enačbo zapisati tako, da b ne bo nastopal v produktu z y,y' ali y''. Na primer tako, da $y-b$ iz enačbe izrazimo:

$$y-b=-\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Odvajajmo še zadnjič:

$$y'=-\frac{2y'y''y''-(1+y'^2)y'''}{y''^2}.$$

Dobljena diferencialna enačba je brez parametrov, samo še poenostavimo jo:

$$3y'y''^2=(1+y'^2)y'''.$$

Rezultat: $3y'(y'')^2=(1+(y')^2)y'''$.

5. naloga:[DN] Pokaži, da je družina funkcij $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$ rešitev diferencialne enačbe $y''-3y'+2y=0$.

Namig: Funkcijo odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo.

Dana 2-parametrična družina funkcij je rešitev diferencialne enačbe 2. reda, če ji zadošča, tj. če funkcijo y vstavimo v levo stran diferencialne enačbe, moramo dobiti 0. Preden lahko to naredimo, moramo izračunati še y' in y'', ki v enačbi nastopata:

$$\begin{aligned} y &= C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}, \\ y' &= C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x}, \\ y'' &= C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Funkcije y, y', y'' sedaj vstavimo v levo stran diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} y''-3y'+2y &= (C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{2x})-3(C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x})+2(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}) \\ &= C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{2x}-3C_1\mathrm{e}^x-6C_2\mathrm{e}^{2x}+2C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sledi, da je podana družina funkcij res splošna rešitev diferencialne enačbe.

DIFERENCIALNE ENAČBE PRVEGA REDA

Začetni problem (Cauchy-jeva naloga) je v primeru diferencialnih enačb 1. reda takšne oblike:

$$F(x, y, y') = 0,$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{oz.} \quad f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y.$$

Navodilo za reševanje: Vstavimo $y' = \frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo.

6. naloga: Reši diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama:

a.) $y' = \mathrm{e}^{x+y}$

Najprej se prepričajmo v to, ali ima dana diferencialna enačba res ločljivi spremenljivki, tj. ali lahko desno stran zapišemo kot produkt funkcije spremenljivke x in funkcije spremenljivke y:

$$y' = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y.$$

Sedaj namesto y' vstavimo $\frac{dy}{dx}$ in dobimo:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y.$$

V naslednjem koraku ločimo spremenljivki, tj. enačbo preoblikujemo v obliko $f(x)dx = g(y)\mathrm{d}y$:

$$\begin{aligned}
dy &= \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y dx && [\text{množimo z } dx] \\
\mathrm{e}^{-y} dy &= \mathrm{e}^x dx && [\text{množimo z } \mathrm{e}^{-y}] \\
\int \mathrm{e}^{-y} dy &= \int \mathrm{e}^x dx && [\text{integriramo enačbo}] \\
-\mathrm{e}^{-y} &= \mathrm{e}^x + C && [\text{konstanto je treba dodati le na eni strani}]
\end{aligned}$$

Rešiti diferencialno enačbo pomeni poiskati funkcijo y, če se le da, v eksplicitni obliki. Zato zgornjo enačbo pomnožimo z -1 in jo logaritmirajmo:

$$\ln \mathrm{e}^{-y} = \ln(-\mathrm{e}^x - C) \implies y = -\ln(-\mathrm{e}^x - C).$$

Rezultat: $y(x) = -\ln(-\mathrm{e}^x - C)$

b.) $y' = e^{x+y}$, $y(0) = 1$ (začetni pogoj)

Dan je začetni problem ali Cauchyjeva naloga. Ker je diferencialna enačba enaka tisti iz naloge 6 a.), lahko splošno rešitev kar prepišemo:

$$y(x) = -\ln(-e^x - C).$$

Rešitev začetnega problema dobimo, tako da v splošni rešitvi upoštevamo še začetni pogoj $y(0) = 1$. Torej:

$$1 = -\ln(-e^0 - C) = -\ln(-1 - C).$$

Sedaj sledi

$$-1 - C = e^{-1} \quad \text{oz.} \quad C = -1 - e^{-1}.$$

Rešitev začetnega problema je sedaj funkcija $y(x) = -\ln(-e^x + 1 + e^{-1})$.

Rezultat: $y(x) = -\ln(-e^x + 1 + e^{-1})$

Homogene diferencialne enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad \text{oz.} \quad F(y', \frac{y}{x}) = 0.$$

Navodilo za reševanje: Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = \frac{y}{x}$, tj. za nastavek vzamemo $y = xu$ (sledi $y' = u + xu'$), dobimo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama.

7. naloga: Reši homogeno diferencialno enačbo $xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

Najprej se prepričajmo v to, ali je dana diferencialna enačba res homogena, tj. ali lahko, ko izrazimo y', desno stran zapišemo tako, da se spremenljivki x, y pojavljata samo v kvocientu $\frac{y}{x}$:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

Diferencialna enačba je torej homogena, zato (namesto y) uvedemo novo neodvisno spremenljivko:

$$u = \frac{y}{x}.$$

Sledi $y = xu$ in $y' = u + xu'$ (u je zdaj funkcija spremenljivke x, zato je njen odvod enak u'). Po zamenjavi dobimo:

$$u + xu' = u + \operatorname{tg}u \quad \text{oz.} \quad xu' = \operatorname{tg}u.$$

Vemo, da je to diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Iščemo funkcijo $u(x)$. Dif. enačbe tega tipa rešujemo, tako da namesto odvoda u' vstavimo $\frac{du}{dx}$:

$$x\frac{du}{dx} = \operatorname{tg}u.$$

Ločimo spremenljivki:

$$\begin{aligned} x du &= \mathrm{tg} u dx \quad [\text{množimo z } dx] \\ \frac{du}{\mathrm{tg} u} &= \frac{dx}{x} \quad [\text{delimo z } x \text{ in s } \mathrm{tg} u] \\ \int \frac{du}{\mathrm{tg} u} &= \int \frac{dx}{x} \quad [\text{integriramo enačbo}] \end{aligned}$$

Posebej integrirajmo levo stran, saj integral ni elementaren:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\mathrm{tg} u} &= \int \frac{\cos u \, du}{\sin u} = \quad [\text{namesto } \mathrm{tg} u \text{ smo napisali } \frac{\sin u}{\cos u}] \\ &= \int \frac{dt}{t} = \quad [\text{vpeljali smo novo spremenljivko } t = \sin u \;\Rightarrow\; dt = \cos u du] \\ &= \ln t + C = \ln \sin u + C \end{aligned}$$

Vrnimo se na reševanje diferencialne enačbe (enakost nedoločenih integralov):

$$\ln \sin u = \ln x + \ln D.$$

Pri tem smo namesto dveh konstant pisali samo eno in še to v obliki $\ln D$, ki je bolj primerna takrat, ko imamo opravka z logaritmi (če pri integriranju vsaj enkrat dobimo logaritem). Ta zapis bo včasih ključnega pomena na poti do rešitve!
Sledi

$$\ln \sin u = \ln Dx \quad \text{oz.} \quad \sin u = Dx \quad \text{in} \quad u = \arcsin Dx.$$

To je rešitev diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama, rešitev začetne diferencialne enačbe je tedaj:

$$y = xu = x \arcsin Dx.$$

Rezultat: $y(x) = x \arcsin(Dx)$.

8. naloga: Reši homogeno diferencialno enačbo $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$.

Najprej se prepričajmo v to, ali je dana diferencialna enačba res homogena, tj. ali lahko, ko izrazimo y', desno stran zapišemo tako, da se spremenljivki x, y pojavljata samo v kvocientu $\frac{y}{x}$:

$$\begin{aligned} xy' - y &= \pm\sqrt{x^2 - y^2}, \\ y' &= \frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}, \\ y' &= \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 - (\tfrac{y}{x})^2}. \end{aligned}$$

Diferencialna enačba je torej homogena, zato (namesto y) uvedemo novo neodvisno spremenljivko:

$$u = \frac{y}{x}.$$

Sledi $y = xu$ in $y' = u + xu'$ (u je zdaj funkcija spremenljivke x, zato je njen odvod enak u'). Po zamenjavi dobimo:

$$u + xu' = u \pm \sqrt{1 - u^2} \quad \text{oz.} \quad xu' = \pm\sqrt{1 - u^2}.$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama (iščemo funkcijo $u(x)$). Dif. enačbe tega tipa rešujemo, tako da namesto odvoda u' vstavimo $\frac{du}{dx}$:

$$x\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{1-u^2}.$$

Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned}
xdu &= \pm\sqrt{1-u^2}dx \quad \text{[množimo z } dx\text{]}\\
\pm\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \frac{dx}{x} \quad \text{[delimo z } \pm\sqrt{1-u^2} \text{ in z } x\text{]}\\
\pm\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \int\frac{dx}{x} \quad \text{[integriramo enačbo]}\\
\pm\arcsin u &= \ln x + \ln C \quad \text{[konstanto spet napišemo v obliki } \ln C\text{]}\\
\arcsin u &= \pm\ln Cx\\
u &= \pm\sin(\ln Cx)
\end{aligned}$$

To je rešitev diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama, rešitev začetne diferencialne enačbe je tedaj:

$$y = xu = \pm x\sin(\ln Cx).$$

Rezultat: $y(x) = \pm x\sin(\ln Cx)$.

LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE 1. REDA

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne enačbe, y_p pa neka partikularna rešitev (zadošča diferencialni enačbi).

A. Homogeni del (dobimo y_h):

$$p(x)y' + q(x)y = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Dobimo rešitev $y_h = Cg(x)$.

B. Nehomogeni del (dobimo y_p):

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Rešujemo z metodo *variacija konstante:* Za nastavek vzamemo $y_p = C(x)g(x)$ (konstanto iz rešitve homogenega dela variiramo), ga odvajamo $y' = C'(x)g(x) + C(x)g'(x)$ in vstavimo v diferencialno enačbo. Iz dobljene enačbe izračunamo $C(x)$.

9. naloga: Reši linearno diferencialno enačbo $xy' - 2y = 2x^4$ z začetnim pogojem $y(1) = 2$.

Vemo, da je splošna rešitev linearne diferencialne enačbe oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne enačbe, y_p pa partikularna rešitev.

A. Homogeni del (računamo y_h):

$$xy' - 2y = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Namesto odvoda y' torej vstavimo $\frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} &= 2y \\ xdy &= 2ydx \\ \frac{dy}{y} &= 2\frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= 2\int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= 2\ln x + \ln C \\ \ln y &= \ln x^2 + \ln C \\ \ln y &= \ln Cx^2 \\ y &= Cx^2 \end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je torej $y_h = Cx^2$.

B. Nehomogeni del (računamo y_p):

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Rešujemo z metodo variacija konstante. Ker je rešitev homogenega dela $y_h = Cx^2$, za nastavek vzamemo $y_p = C(x)x^2$ (konstanto iz y_h variiramo). Nastavek odvajamo:

$$\begin{aligned} y &= C(x)x^2, \\ y' &= C'(x)x^2 + C(x) \cdot 2x. \end{aligned}$$

Sedaj y in y' vstavimo v dif. enačbo in izračunamo $C(x)$:

$$x(C'(x)x^2 + C(x) \cdot 2x) - 2C(x)x^2 = 2x^4,$$

$$C'(x)x^3 = 2x^4,$$

$$C'(x) = 2x,$$

$$C(x) = \int 2xdx = x^2 + D.$$

Ker iščemo samo eno (partikularno) rešitev, lahko vzamemo $D = 0$ in dobimo $C(x) = x^2$. Iz nastavka sedaj dobimo partikularno rešitev $y_p = C(x)x^2 = x^4$.

Splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$y = y_h + y_p = Cx^2 + x^4.$$

Poiščimo še rešitev začetnega problema. Upoštevajmo začetni pogoj $y(1) = 2$:

$$2 = C + 1 \implies C = 1 \implies y = x^2 + x^4.$$

Rezultat: $y(x) = x^4 + x^2$.

10. naloga: Reši linearno diferencialno enačbo $x^2y' + xy + 1 = 0$.

Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne enačbe, y_p pa partikularna rešitev. Enačbo najprej uredimo, tj. zapišimo jo v obliki $p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$x^2y' + xy = -1.$$

A. Homogeni del (računamo y_h):

$$x^2y' + xy = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Namesto odvoda y' torej vstavimo $\frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned}
x^2\frac{dy}{dx} &= -xy \\
x^2dy &= -xydx \\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\
\int\frac{dy}{y} &= -\int\frac{dx}{x} \\
\ln y &= -\ln x + \ln C \\
\ln y &= \ln\frac{C}{x} \\
y &= \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je torej $y_h = \frac{C}{x}$.

B. Nehomogeni del (računamo y_p):

$$x^2y' + xy = -1.$$

Rešujemo z metodo variacija konstante. Ker je rešitev homogenega dela $y_h = \frac{C}{x}$, za nastavek vzamemo $y_p = \frac{C(x)}{x}$ (konstanto iz y_h variiramo). Nastavek odvajamo:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{C(x)}{x}, \\
y' &= \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.
\end{aligned}$$

Sedaj y in y' vstavimo v dif. enačbo in izračunamo $C(x)$:

$$x^2\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + x\frac{C(x)}{x} = -1,$$

$$C'(x)x - C(x) + C(x) = -1,$$

$$C'(x) = -\frac{1}{x},$$

$$C(x) = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln x + D.$$

Ker iščemo samo eno (partikularno) rešitev, lahko vzamemo $D = 0$ in dobimo $C(x) = -\ln x$. Iz nastavka sedaj dobimo partikularno rešitev $y_p = \frac{C(x)}{x} = -\frac{\ln x}{x}$.

Splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$y = y_h + y_p = \frac{C}{x} - \frac{\ln x}{x}.$$

Rezultat: $y(x) = \frac{C}{x} - \frac{\ln x}{x}$.

BERNOULLIJEVE DIFERENCIALNE ENAČBE

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)y^{\alpha}.$$

Navodilo za reševanje: Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = y^{1-\alpha}$, jo odvajamo $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, vstavimo v enačbo in dobimo linearno diferencialno enačbo 1. reda.

11. naloga: Reši Bernoullijevo diferencialno enačbo $(x+1)(yy'-1) = y^2$.

Preverimo najprej, ali je dana dif. enačba res Bernoullijeva:

$$(x+1)(yy'-1) = y^2$$

$$(x+1)yy' - (x+1) = y^2 \quad \text{[delimo z } y]$$

$$(x+1)y' - (x+1)\frac{1}{y} = y$$

$$(x+1)y' - y = (x+1)y^{-1}$$

Vidimo, da je res Bernoullijeva in $\alpha = -1$. Navodilo za reševanje pravi, da moramo (namesto y) uvesti novo odvisno spremenljivko:

$$u = y^{1-\alpha} = y^2,$$

$$u' = 2yy'.$$

Iz oblik u in u' vidimo, da bo najlažje, če ju vstavimo v obliko diferencialne enačbe, ki je v zgornjem postopku preoblikovanja enačbe zapisana kot druga:

$$(x+1)yy' - (x+1) = y^2,$$

$$(x+1)\frac{u'}{2} - (x+1) = u.$$

Vemo, da smo na ta način dobili linearno diferencialno enačbo 1. reda, ki v klasični obliki izgleda takole:

$$(x+1)u' - 2u = 2(x+1).$$

Iščemo rešitev $u(x)$.

A. Homogeni del (računamo u_h):

$$(x+1)u' - 2u = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Namesto odvoda u' torej vstavimo $\frac{du}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned}
(x+1)\frac{du}{dx} &= 2u \\
(x+1)du &= 2udx \\
\frac{du}{u} &= 2\frac{dx}{x+1} \\
\int \frac{du}{u} &= 2\int \frac{dx}{x+1} \\
\ln u &= 2\ln(x+1) + \ln C \\
\ln u &= \ln C(x+1)^2 \\
u &= C(x+1)^2
\end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je torej $u_h = C(x+1)^2$.

B. Nehomogeni del (računamo u_p):

$$(x+1)u' - 2u = 2(x+1).$$

Rešujemo z metodo variacija konstante. Ker je rešitev homogenega dela $u_h = C(x+1)^2$, za nastavek vzamemo $u_p = C(x)(x+1)^2$ (konstanto iz u_h variiramo). Nastavek odvajamo:

$$\begin{aligned}
u &= C(x)(x+1)^2, \\
u' &= C'(x)(x+1)^2 + C(x)\cdot 2(x+1).
\end{aligned}$$

Sedaj u in u' vstavimo v dif. enačbo in izračunamo $C(x)$:

$$(x+1)(C'(x)(x+1)^2 + C(x)\cdot 2(x+1)) - 2C(x)(x+1)^2 = 2(x+1).$$

$$C'(x)(x+1)^3 = 2(x+1),$$

$$C'(x) = \frac{2}{(x+1)^2},$$

$$C(x) = \int \frac{2}{(x+1)^2}dx = \int 2(x+1)^{-2}dx = 2\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + D.$$

Ker iščemo samo eno (partikularno) rešitev, lahko vzamemo $D = 0$ in dobimo $C(x) = -\frac{2}{x+1}$. Iz nastavka sedaj dobimo partikularno rešitev

$$u_p = C(x)(x+1)^2 = -\frac{2}{x+1}(x+1)^2 = -2(x+1).$$

Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe 1. reda je

$$u = u_h + u_p = C(x+1)^2 - 2(x+1).$$

Rešitev začetne Bernoullijeve dif. enačbe dobimo iz zveze $u = y^2$. Torej,

$$y = \pm\sqrt{u} = \pm\sqrt{C(x+1)^2 - 2(x+1)}.$$

Rezultat: $y(x) = \pm\sqrt{C(x+1)^2 - 2(x+1)}$.

Eksaktne diferencialne enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0, \quad \text{kjer je} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

V tem primeru obstaja taka funkcija $z(x,y)$, da je

$$\mathrm{d}z = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Splošna rešitev eksaktne diferencialne enačbe je torej dana implicitno z enačbo $z(x,y) = C$. Do rešitve pa pridemo, tako da rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} z'_x &= P(x,y) \\ z'_y &= Q(x,y). \end{aligned}$$

12. naloga:^{DN} Ali je diferencialna enačba $2xy\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y = 0$ eksaktna? Če je eksaktna, jo reši.

Za eksaktno dif. enačbo mora biti izpolnjen pogoj

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pri nas sta

$$P(x,y) = 2xy \quad \text{in} \quad Q(x,y) = x^2 - y^2,$$

zato sledi:

$$P'_y = 2x,$$
$$Q'_x = 2x.$$

Pogoj je izpolnjen in dif. enačba je eksaktna. Do rešitve $z(x,y) = C$ pridemo, tako da rešimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} z'_x &= P(x,y) = 2xy, \\ z'_y &= Q(x,y) = x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi

$$z(x,y) = \int z'_x \mathrm{d}x = \int 2xy\mathrm{d}x = 2y\frac{x^2}{2} + D(y) = yx^2 + D(y).$$

Dobljeno funkcijo $z(x,y)$ sedaj parcialno odvajamo po y:

$$z'_y = x^2 + D'_y.$$

Iz druge enačbe zgornjega sistema sledi:

$$x^2 - y^2 = x^2 + D'_y,$$

kar pomeni, da je $D(y)$, ki je le funkcija y, enaka:

$$D'_y = -y^2 \implies D(y) = \int D'_y \mathrm{d}y = -\int y^2 \mathrm{d}y = -\frac{y^3}{3} \quad \text{(konstante ne pišemo).}$$

Sledi

$$z(x,y) = yx^2 + D(y) = yx^2 - \frac{y^3}{3}$$

in rešitev eksaktne dif. enačbe je

$$yx^2 - \frac{y^3}{3} = C.$$

Rezultat: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ enačba je eksaktna, $x^2y - \frac{y^3}{3} = C$.

<u>13. naloga</u>: Določi parameter a, tako da bo enačba $2x\ln y + \frac{x^a}{y}y' = 0$ eksaktna, in jo reši.

V enačbo najprej namesto y' vstavimo $\frac{dy}{dx}$ in jo ustrezno preoblikujmo:

$$2x\ln y + \frac{x^a}{y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$2x\ln y dx + \frac{x^a}{y}dy = 0.$$

Da bo dana dif. enačba eksaktna, mora veljati

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pri nas sta

$$P(x,y) = 2x\ln y \text{ in } Q(x,y) = \frac{x^a}{y},$$

zato sledi:

$$P'_y = \frac{2x}{y},$$
$$Q'_x = \frac{ax^{a-1}}{y}.$$

Vidimo, da je pogoj izpolnjen, če je $a = 2$. Rešimo torej eksaktno dif. enačbo

$$2x\ln y dx + \frac{x^2}{y}dy = 0.$$

Do rešitve $z(x,y) = C$ pridemo, tako da rešimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} z'_x &= P(x,y) = 2x\ln y, \\ z'_y &= Q(x,y) = \frac{x^2}{y}. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi

$$z(x,y) = \int z'_x \mathrm{d}x = \int 2x\ln y \mathrm{d}x = 2\ln y\frac{x^2}{2} + D(y) = x^2\ln y + D(y).$$

Dobljeno funkcijo $z(x,y)$ sedaj parcialno odvajamo po y:

$$z'_y = \frac{x^2}{y} + D'_y.$$

Iz druge enačbe zgornjega sistema sledi:

$$\frac{x^2}{y} = \frac{x^2}{y} + D'_y,$$

kar pomeni, da je $D(y)$ enaka:

$$D'_y = 0 \implies D(y) = \int D'_y \mathrm{d}y = 0 \text{ (konstante ne pišemo)}.$$

Sledi

$$z(x,y) = x^2\ln y + D(y) = x^2\ln y$$

in rešitev eksaktne dif. enačbe je

$$x^2\ln y = C.$$

Rezultat: $a = 2$, $z(x,y) = x^2\ln y$, $x^2\ln y = C$, $y = e^{\frac{C}{x^2}}$.

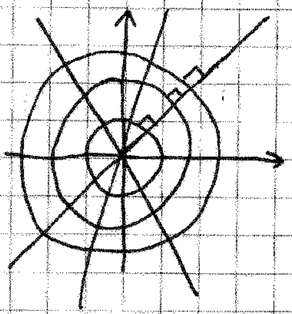
19.05.2008

Ortogonalne trajektorije

Dana je 1-parametrična družina krivulj.

$F(x,y,c)=0$

Ortogonalne trajektorije so vse krivulje, ki sekajo dano družino pod pravim kotom.



$y^2+x^2=r^2$

ortogonalne trajektorije = šop premic skozi središče krožnic

$F(x,y,c)=0$

$\Downarrow$ dif. enačba

$y' = f(x,y)$ = tangens naklonskega kota

$y_T' = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{f(x,y)}$ = tangens naklonskega kota ort. traj.

$\Rightarrow$ ortog. traj. so rešitve te dif. enačbe

1. Dana je družina krivulj $y=C(x^2+1)$. Poišči ortog. trajek.! Določi še tisto trajektorijo, ki gre skozi $T(1,\frac{7}{4})$.

R: $y=\pm\sqrt{-\frac{x^2}{2}+\ln x+C}$, $y=\pm\sqrt{-\frac{x^2}{2}-\ln x+\frac{9}{16}}$

2. Dana je družina krivulj $x+y=Ce^{y}$. Poišči tisto ortog. traj., ki gre skozi točko $T(0,5)$.

$x+y=C\cdot e^{y}$

$C=\frac{x+y}{e^{y}} \quad /()'$

$0=\frac{(1+y')e^{y}-(x+y)e^{y}\cdot y'}{e^{2y}}$

$0=(1+y')e^{y}-(x+y)e^{y}\cdot y'$

$y'(e^{y}-(x+y)e^{y})=-e^{y}$

$y'=-\frac{1}{1-(x+y)}=\frac{1}{x+y-1}$ = smerni koef. tangente

$y_T'=-\frac{1}{y'}=-\frac{1}{\frac{1}{x+y-1}}=1-x-y$ = smerni koef. tangente ort. traj

$y' = -x - y + 1$

$\boxed{y' + y = 1 - x}$ lin. dif. enačba prvega reda

R: $y = y_h + y_p$

a.) Homogeni del (izračunaj y_h)

$y' + y = 0$ dif. enačba z loč. sprem.

$y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow dy = -y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx$

$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$

$\ln y = -x + \ln C$

$\ln \frac{y}{C} = -x$

$\frac{y}{C} = e^{-x} \Rightarrow y_h = C \cdot e^{-x}$

b.) Nehomogeni deli (računamo y_p)

variacija konstante $\Rightarrow$ nastavek $\boxed{y_p = C(x) e^{-x}}$

$y' = C' e^{-x} + C e^{-x}(-1)$

vstavimo $\quad C' e^{-x} - C e^{-x} + C e^{-x} = 1 - x$

$C' e^{-x} = 1 - x$

$C' = (1 - x) e^{x}$

$C = \int (1 - x) e^{x} dx \quad$ p.p.

$u = 1 - x \rightarrow du = -dx$

$dv = e^{x} dx \quad v = e^{x}$

$C = (-x + 1) e^{x} - \int e^{x} dx = (-x + 1) e^{x} + e^{x} = (2 - x) e^{x}$

$y_p = C(x) e^{-x} = (2 - x) e^{x} \cdot e^{-x} = 2 - x$

R: $y = y_h + y_p = \underline{\underline{C \cdot e^{-x} + 2 - x}}$ ortogonalne traj.

$T(0,5)$: $\quad 5 = C + 2 \Rightarrow C = 3 \quad y = 3e^{-x} + 2 - x$

Linearne dif. enačbe višjih redov

a.) ločljive spremen.
b.) homogene
c.) lin. 1. reda
d.) Bernullijeva
e.) eksaktna

f.) Homogene lin. dif. enačbe s konst. koeficienti

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Reševanje
- nastavek $y = e^{\lambda x}$ (odvajamo + vstavimo)
- dobimo karakteristično enačbo

$$a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ - rešitve te enačbe

- splošna rešitev

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

3. Reši enačbo $y'' - 4y' + 3y = 0$

nastavek: $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

vstavimo: $\lambda^2 e^{\lambda x} - 4\lambda e^{\lambda x} + 3e^{\lambda x} = 0 \;/ : e^{\lambda x}$

$\boxed{\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0}$ - karakt. enačba

$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 3$

R: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$

4. Reši enačbo $y'' - 2y' + y = 0$

R: $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$

5. Poišči rešitev dif. enačbe $y''' - y'' - y' + y = 0$, ki zadošča pogojem $y(0)=2$, $y(1) = -e - \frac{1}{e}$, $y'(0)=0$

Karak. enačba: $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$$\lambda^2(\lambda-1) - 1(\lambda-1) = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

$$\underbrace{(C_1+C_2)e^x} \quad \lambda_{1,2} = 1 \text{ dvojna!} \longrightarrow \underbrace{\underbrace{e^x, x \cdot e^x}_{\text{dvojna}}, x^2 \cdot e^x}_{\text{trojna}}, \dots$$

$$\lambda_3 = -1$$

R: $y = C_1 e^x + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$

~~$y = De^x + C_3 e^{-x}$~~

[redacted] Splošna rešitev: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}$

$$y' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x - C_3 e^{-x}$$

$y(0)=2$: $2 = C_1 + C_3$

$y(1) = -e - \frac{1}{e}$: $-e - \frac{1}{e} = C_1 e + C_2 e + C_3 e^{-1}$ $/\cdot e$ $)-$

$y'(0)=0$: $0 = C_1 + C_2 - C_3$

$$-e - \frac{1}{e} = C_3 e^{-1} + C_3 e \Rightarrow C_3 = \frac{-e - \frac{1}{e}}{\frac{1}{e} + e} = -1$$

$C_3 = -1$

$C_1 = 3$

$C_2 = -4$

R: $y = 3 \cdot e^x - 4xe^x - e^{-x}$

6. Reši enačbo $y''-4y'+5y=0$

Kar. enačba: $\lambda^2-4\lambda+5=0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=2\pm i$$

R: $y=C_1\cdot e^{(2+i)x}+C_2\cdot e^{(2-i)x}$

$\boxed{\text{Eulerjeva formula}}$ $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$

$$y=C_1e^{2x}\cdot e^{ix}+C_2e^{2x}\cdot e^{-ix}=C_1e^{2x}\cdot(\cos x+i\sin x)+C_2e^{2x}\cdot(\cos x-i\sin x)$$

$$y=e^{2x}\cdot\cos x\,(\underbrace{C_1+C_2}_{D_1})+e^{2x}\sin x\,(\underbrace{C_1 i-C_2 i}_{D_2})$$

$$y=D_1e^{2x}\cos x+D_2e^{2x}\sin x$$

g.) Nehomogene lin. dif. enačbe s konst. koef

$$a_ny^{(n)}+\dots+a_2y''+a_1y'+a_0y=b(x)$$

Splošna rešitev: $y=y_h+y_p$

a.) Homogeni del (računamo y_h):

$$a_ny^{(n)}+\dots+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$$

T.j. homogena lin. dif. enač. s konst. koef (tip f.)

b.) Nehomogeni del (računamo y_p)

Rešujemo z metodo inteligentnega ugibanja ali nedoločenih koef.

V splošnem, če je $b(x)=e^{\alpha x}\cdot(\underbrace{P_i(x)}_{\text{polinom } i\text{-te stopnje}}\cos(\beta x)+\underbrace{Q_j(x)}_{\text{polinom } j\text{-te stopnje}}\sin(\beta x))$,

potem za nastavek vzamemo naslednje

$$y_p=x^k e^{\alpha x}(\underbrace{R_m(x)\cos(\beta x)+S_m(x)\sin(\beta x)}_{\text{polinom stopnje } m\text{, ki je maksimum od } \{i,j\}})$$

kjer je k večkratnost ničle $\alpha + i\beta$ v karak. enačbi homogenega dela.

Če je $b(x)$ vsota več različnih členov zgoraj oblike, je tudi nastavek y_p vsota posameznih nastavkov

7. Reši enačbo $y'' - 5y' - 6y = \cos x + e^{2x}$.

R: $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x} - \frac{7}{74}\cos x - \frac{5}{74}\sin x - \frac{1}{12} e^{2x}$

8. Reši začetni problem $y'' - 2y' - 3y = x^2$, $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

R: $y = \frac{29}{108} e^{3x} + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$

9. Reši enačbo $y'' + y = 4\sin x + 1$

R: $y = y_h + y_p$

$\alpha = 0$, $i = 0$, $j = 0$, $\beta = 0$

$k = 0$ 0-ni rešitev karak. enačbe

$\alpha = 0$, $i = 0$, $j = 0$, $\beta = 1$ } max = 0

$k = \alpha + i\beta = 0 + i = i$

$k = 1$, ker se i 1-krat pojavi v kar. rešitvi

a.) Homogeni del (y_h):

$y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

$y_h = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} \Longrightarrow D_1 \cos x + D_2 \sin x$

- $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi} \longrightarrow \cos\varphi, \sin\varphi$!
- $e^{3i\varphi}, e^{-3i\varphi} \longrightarrow \cos\beta\varphi, \sin\beta\varphi$. !

b.) Nehomogeni del (y_p)

nastavek: $y_p = x\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) + C$

- polinom $\Longrightarrow$ polinom (lahko višje st. odvisno od k) !
- $\sin ax, \cos ax \Longrightarrow x^k(A\sin(ax) + B\cos(ax))$
- $e^{ax} \Longrightarrow x^k e^{ax}$

$y_p = x\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) + C$ nastavek

nedoločeni koef.

$y' = A\cos x + B\sin x + x\cdot(-A\sin(x) + B\cos(x))$

$y'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x + x(-\cos(x) - B\sin(x))$

vstavimo

$$-2A\sin x + 2B\cos x - \cancel{Ax\cos x} - \cancel{Bx\sin x} + \cancel{Ax\cos x} + \cancel{Bx\sin x} + C = 4\sin x + 1$$

$\sin x: \quad -2A = 4$
$\cos x: \quad 2B = 0 \quad \Rightarrow B=0,\ A=-2,\ C=1$
konstante: $\quad C = 1$

$$y_p = x\cdot(-2\cos x) + 1 = -2x\cos x + 1$$

R: $\underline{\underline{y = y_h + y_p}}$

10. Reši enačbo $y''' - y = -3e^x$

$y = y_h + y_p$

a.) Homogeni del (y_h):

$y''' - y = 0$

$\lambda^3 - 1 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} + C_3 e^{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$y_h = C_1 e^x + D_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + D_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

b.) Nehomogeni del (y_p)

nastavek: $\quad y_p = Ax^k e^x$

$\alpha = 1$
$\beta = 0$
k = večkratnost $\boxed{\boxed{\alpha + \beta i} = 1}$ enkratna ničla kar. enačbe $\Rightarrow k = 1$
če dvojna $k=2$

$y_p = Axe^x$

$y' = Ae^x + Axe^x$

$y'' = 2Ae^x + Axe^x$

$y''' = 3Ae^x + Axe^x$

vstavimo: $3Ae^x + \cancel{Axe^x} - (Ae^x + \cancel{Axe^x}) = -3e^x$

$$2Ae^x = -3e^x$$

$$\underline{\underline{A = -\frac{3}{2}}}$$

$$y_p = Axe^x = -\frac{3}{2}xe^x$$

R: $y = y_h + y_p$

11. Reši enačbo $y'' - y = (2x+1)\cdot\cos\frac{x}{2}$

a.) Homogeni del (y_h):

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$$

$$y_h = C_1\cdot e^x + C_2\cdot e^{-x}$$

b.) Nehomogeni del

nastavek:

$\alpha = 0$

$\beta = \frac{1}{2}$

$\alpha + \beta i = \frac{1}{2}i$ ni ničla kat. enačbe $\Rightarrow k = 0$

$$y_p = (Ax+B)\cos\frac{x}{2} + (Cx+D)\sin\frac{x}{2}$$

$$y' = A\cos\frac{x}{2} - (Ax+B)\sin\frac{x}{2}\frac{1}{2} + C\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}(Cx+D)\cos\frac{x}{2}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}A\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}A\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{4}(Ax+B)\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}C\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}C\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4}(Cx+D)\sin\frac{x}{2}$$

vstavimo: $-A\boxed{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}Ax\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4}B\cos\frac{x}{2} + C\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4}Cx\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{4}D\sin\frac{x}{2} - A\boxed{x\cos\frac{x}{2}} - B\boxed{\cos\frac{x}{2}} - C\boxed{x\sin\frac{x}{2}} - D\sin\frac{x}{2} = 2x\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$

$\sin\frac{x}{2}$: $-A - \frac{1}{4}D - D = 0 \Rightarrow D = 2$

$\cos\frac{x}{2}$: $-\frac{1}{4}B + C - B = 1 \Rightarrow B = -\frac{4}{5}$

$x\sin\frac{x}{2}$: $-\frac{1}{4}C - C = 0 \Rightarrow C = 0$

$x\cos\frac{x}{2}$: $-\frac{1}{4}A - A = 2 \Rightarrow A = -\frac{8}{5}$

$y_p = \left(-\frac{8}{5}x - \frac{4}{5}\right)\cos\frac{x}{2} + (2)\sin\frac{x}{2}$ R: $y = y_h + y_p$

Eulerjeve enačbe (h.)

$a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$

Reševanje: • nastavek: $y = x^{\lambda}$

• karakteristična enačba ($\lambda_1, \dots \lambda_n$ - rešitve kar. enačbe)

• rešitev $y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \dots + C_n x^{\lambda_n}$

12. Reši enačbo $x^2 y'' - x y' - 3y = 0$

nastavek: $y = x^{\lambda}$ $\longrightarrow$ odvajamo + vstavimo

kara. enačba: $\lambda(\lambda - 1) - \lambda - 3 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -1$

R: $y = C_1 x^3 + C_2 \cdot x^{-1}$

13. Reši enačbo $x^2 y'' - \cancel{x} y' + y = 0$

R: $y = C_1 x + C_2 x \ln x$

14. Reši enačbo $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 7x y' - 8y = 0$

karak. enačba: $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 3 \cdot \lambda(\lambda - 1) + 7\lambda - 8 = 0$

$\lambda^3 \underline{- 3\lambda^2} + 2\lambda - \underline{3\lambda^2} + 3\lambda + 7\lambda - 8 = 0$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_{1,2,3} = 2$ trojna

R: $\cancel{y = C_1 x^2 + C_2 x^2 + C.}$

$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \cdot \ln x + C_3 x^2 \ln^2 x$

15. Reši enačbo $x^2y''+3xy'+5y=0$

$$\lambda(\lambda-1)+3\lambda+5=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+5=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$$

R: $y=C_1x^{-1+2i}+C_2x^{-1-2i}=$

$$y=C_1x^{-1}\boxed{x^{2i}}+C_2x^{-1}\boxed{x^{-2i}}$$

$$\boxed{x^{i\varphi}=e^{\ln x^{i\varphi}}}=e^{i\varphi\ln x}=$$

$$=\cos(\varphi\ln x)+i\sin(\varphi\ln x)$$

$$y=C_1x^{-1}(\cos(2\ln x)+i\sin(2\ln x))+C_2x^{-1}(\cos(2\ln x)-i\sin(2\ln x))$$

$$y=D_1x^{-1}\cos(2\ln x)+D_2x^{-1}\sin(2\ln x)$$

26.05.2008

1. Reši dif. enačbo $y''' = 2 + \sin x$

$$y'' = \int (2+\sin x)\,dx = 2x - \cos x + A$$

$$y' = \int (2x - \cos x + A)\,dx = \frac{2x^2}{2} - \sin x + Ax + B$$

$$y = \int (x^2 - \sin x + Ax + B)\,dx = \frac{x^3}{3} + \cos x + A\frac{x^2}{2} + Bx + C$$

Metoda za zniževanje reda dif. enačb

- če enačba ne vsebuje odvisne spr. y, ampak samo njene odvode, red dif. enačbe znižamo tako, da namesto y' uvedemo novo spremenljivko npr.

$$u = y'$$

2. Reši dif. enačbo $\underset{2.\text{red}}{(1-x^2)y'' - xy' = 0}$

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

$x^2 y'' + x y' + \dots$

- ne vsebuje y

$\boxed{u = y'}$

$\boxed{u' = y''}$

1. red

$$(1-x^2)u' - xu = 0$$

$$u' = \frac{xu}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}\cdot u \qquad \boxed{y' = f(x)\,g(y)} \quad \text{tip } \underline{A.}$$

z loč. spremenljivkami

$$u' = \frac{x}{1-x^2}\cdot u$$

$$\boxed{u' = \frac{du}{dx}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{x}{1-x^2}\,u \quad / \cdot dx$$

$$du = \frac{x}{1-x^2}\,u\cdot dx \quad / : u$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{x}{1-x^2}\cdot dx \qquad t = 1-x^2, \quad dt = -2x\,dx$$

$$\ln u = \int \frac{-dt}{2}\,\frac{1}{t}$$

$$\ln u = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln t + \ln C$$

$$\ln u = \ln\left(C\cdot t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$u = C\cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{C}{\sqrt{t}} = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$R:\ y = \int u\,dx = \int \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = C\arcsin x + D$$

3. Reši dif. enačbo $\cos x\, y''' + \sin x \cdot y'' = \sin x$. 3. red

$u = y''$
$u' = y'''$ $\Rightarrow$ $\cos x\, u' + \sin x\, u = \sin x$ 1. red

LIN. DIF. E. 1. REDA
$p(x) y' + q(x) y = r(x)$

$u = u_h + u_p$

1.) Homogeni del (u_h)

$\cos x\, u' + \sin x\, u = 0$ ločljivi spre.

$\boxed{u' = \frac{du}{dx}} \Rightarrow \cos x \frac{du}{dx} = -\sin x\, u \quad / \cdot dx$

$\cos x\, du = -\sin x\, u\, dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx$

$t = \cos x$
$dt = -\sin x\, dx$

$\ln u = \int \frac{dt}{t}$

$\ln u = \ln t + \ln C$

$u_h = C \cdot t = C \cdot \cos x$

2.) Nehomogeni del (u_p)

nastavek: $u_p = C(x) \cdot \cos(x) \leftarrow u_h = C \cdot \cos x$

$u' = C' \cos x - C \sin x$

vstavimo:

$\cos x \cdot (\underbrace{C' \cos x - C \sin x}_{u'}) + \sin x \cdot \underbrace{C \cos x}_{u} = \sin x$

$C' \cos^2 x = \sin x$

$C' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$C = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ $\quad t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$

$C = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt$

$C = -\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}$

$u_p = C \cdot \cos x = 1$

R: $u = u_h + u_p = C \cdot \cos x + 1$

$u = y''$

$y' = \int u\, dx = \int (C \cos x + 1) dx$

$y' = C \sin x + x + D$

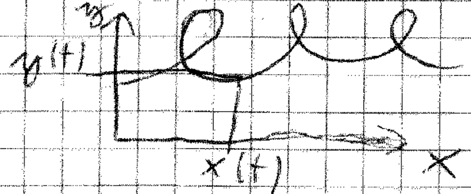
$y = \int (C \sin x + x + D) dx$

$y = -C \cos x + \frac{x^2}{2} + Dx + E$

Sistemi dif. enačb (s konst. koef.)

$$\dot{x}(t) = Ax + By$$
$$\dot{y}(t) = Cx + Dy$$

$x(t)$, $y(t)$ funkciji časa



Rešovanje: • nastavek: $Ae^{\lambda t} = x$

$Be^{\lambda t} = y$

- ko vstavimo nastavek v sistem dif. enačb, dobimo homogen sistem dveh linearnih enačb za neznanki A in B (λ bo parameter)
- to homogen sistem ima netrivialno rešitev, kadar je det. koef. sistemu $= 0$.

$\Rightarrow$ dobimo enačbo za λ

4. Reši sistem dif. enačb $\dot{x} = 2x - y$, $\dot{y} = -x + 2y$.

skupaj z začetnim pogojem $x(0) = 1$, $y(0) = -3$.

5. Reši sistem dif. enačb $\dot{x} = -3x - y$, $\dot{y} = x - y$

nastavek

$$\left.\begin{aligned} x = Ae^{\lambda t} &\longrightarrow \dot{x} = A \cdot e^{\lambda t} \cdot \lambda \\ y = Be^{\lambda t} &\longrightarrow \dot{y} = B \cdot e^{\lambda t} \cdot \lambda \end{aligned}\right\} \text{2 parametra.}$$

vstavimo

$$A\lambda e^{\lambda t} = -3A\cancel{\lambda}e^{\lambda t} - B\cancel{\lambda}e^{\lambda t} \quad / : e^{\lambda t}$$
$$B \cdot \lambda e^{\lambda t} = A \cdot \cancel{\lambda}e^{\lambda t} - B\cancel{\lambda}e^{\lambda t} \quad / : e^{\lambda t}$$

$$A\lambda = -3A - B$$
$$B\lambda = A - B$$

A, B - neznanki, λ parameter-i

$$(\lambda + 3)A + B = 0$$
$$-A + (\lambda + 1)B = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & 1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

pogoj za netrivialno rešitev

$$(\lambda + 3)(\lambda + 1) + 1 = 0$$
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$(\lambda+2)^2=0$

$\lambda_{1,2}=-2$ dvojna!

Dopolnjen nastavek!

$$x=A_1e^{-2t}+A_2e^{-2t}t$$
$$y=B_1e^{-2t}+B_2e^{-2t}\cdot t$$

4 parametri ; 2 preveč

Dopolnjen nastavek je enkrat odvajano in ustavimo (ena dif. enačba je tokrat dovolj)

$\dot y = x - y$

$$\dot y = -2B_1e^{-2t} - 2B_2 e^{-2t} t + B_2 e^{-2t}$$

$$-2B_1 \boxed{e^{-2t}} - 2B_2 \boxed{e^{-2t}} t + B_2 e^{-2t} = A_1e^{-2t} + A_2 e^{-2t} t - B_1 e^{-2t} - B_2 e^{-2t} t$$

$e^{-2t}: -2B_1 + B_2 = A_1 - B_1$

$e^{-2t}\cdot t: -2B_2 = A_2 - B_2$

$$A_1 = B_2 - B_1$$
$$A_2 = -B_2$$

R: $x=(B_2-B_1)e^{-2t} - B_2 e^{-2t}\cdot t$

$y = B_1e^{-2t}+B_2e^{-2t}\cdot t$

Ponavljanje

2. KOLOKVIJ (2003)

① V Taylorjevo vrsto okoli $\boxed{x_0 = 1}$ razvij funkcijo $f(x) = -\frac{1}{x^2-5x+6}$ in določi konv. območje vrste.

Geometrijska vrsta

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n ; \quad |x|<1$$

PARCIALNI ULOMKI

$$\frac{-1}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$-1 = Ax - 3A + Bx - 2B$$

$$x^1: \ 0 = A + B$$

$$x^0: \ -1 = -3A - 2B$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \end{aligned}}$$

DA UPOŠTEVAMO SREDIŠČE

$$f(x) = \frac{-1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} = \frac{1}{(x-1)-1} - \frac{1}{(x-1)-2} =$$

$$f(x) = \sum a_n (x-1)^n$$

$$= \frac{1}{-(1-(x-1))} - \frac{1}{-2\left(1-\frac{(x-1)}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{(1-(x-1))} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)}$$

$$* = -\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-(x-1)^n + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^n}{2^n}\right)$$

$$|x-1|<1 \qquad \left|\frac{x-1}{2}\right|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n$$

$$|x-1|<1$$
$$|x-2|<2$$
$$\overline{|x-1|<1 \ \text{oz.} \ x \in (0,2)}$$

② Funkcijo $f(x)=\frac{x}{2}$, podano na intervalu $[0,\pi]$, razvij v Fourierjevo vrsto kot funkcijo s periodo π.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)\right)$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\pi} f(x)\cos(n\omega_0 x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{\pi} f(x)\sin(n\omega_0 x)\,dx$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi}\cdot\pi^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{\cancel{2}}\cos(2nx)\,dx = \frac{1}{\pi}$$

p.p. $u = x \Rightarrow du = dx$
$dv = \cos(2nx)\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2n}\sin(2nx)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{1}{2n}x\sin(2nx)\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{2n}\sin(2nx)\,dx\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n}\cos(2nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi n}(1-1) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin(2nx)\,dx = \frac{1}{\pi}$$

p.p. $u = x \Rightarrow du = dx$
$dv = \sin(2nx)\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2n}\cos(2nx)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n}x\cos(2nx)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{2n}\cos(2nx)\,dx\right) =$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2n}\sin(2nx)\right)\Big|_0^{\pi} = \cancel{\ldots}$$

$$b_n = -\frac{1}{2n} \qquad R: f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)\sin(2nx)$$

3. Poišči lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x \cdot y(1+x+y)$

stacionarne točke

$f_x' = y(1+x+y) + xy = 0$

$f_y' = x(1+x+y) + xy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y + y^2 + 2xy = 0 \\ x + x^2 + 2xy = 0 \end{array}\right\} -$$

$y - x + y^2 - x^2 = 0$

$(y-x) + (y-x)(y+y) = 0$

$(y-x)(1+x+y) = 0$

I. $y = x$

II $1+x+y = 0$

I. $x + x^2 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x(1+3x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

$T_1(0,0) \quad T_2(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

II $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ali $y = 0$

$y = -1 \quad x = -1$

$T_3(0,-1)$

$T_4(-1,0)$

$f''_{xx} = y + y = 2y$

$f''_{yy} = 2x$

$f''_{xy} = 1 + x + y + y + x = 2x + 2y + 1$

$$\det \text{Hesse} \begin{bmatrix} 2y & 2x+2y+1 \\ 2x+2x+1 & 2x \end{bmatrix}$$

MAX

$T_1(0,0) \quad -1 < 0$ ni ekst.

$T_2(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \quad \frac{1}{3} > 0$ je ekstrem

$T_3(0,-1) \quad -1 < 0$ ni ekst

$T_4(-1,0) \quad -1 < 0$ ni ekstr

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 5e^{x}$$

4. Poišči rešitev zač. problema

$y(0)=4$, $y'(0)=\frac{1}{2}$

Nehomogena lin. dif. en. s konst. koef.

$y = y_h + y_p$

www.stromar.si

veliko sreče pri učenju!

1.) Homogeni

$y''-3y'+2y=0$

karak. enačba:

$\lambda^2-3\lambda+2=0$

$(\lambda-2)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=2 \quad \lambda_2=1 \Rightarrow y_h=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$

2.) Nehomogeni del (y_p)

nastavek:

$y_p=$

$e^{3x} \to \alpha + i\beta = 3$ ni ničla kar. enačbe $\Rightarrow Ae^{3x}$

$5e^{x} \to \alpha + i\beta = 1$ je ničla kar. enačbe $\Rightarrow Bxe^{x}$

$y_p = Ae^{3x} + Bxe^{x}$

$y' = 3Ae^{3x} + Be^{x} + Bxe^{x}$

$y'' = 9Ae^{3x} + 2Be^{x} + Bxe^{x}$

vstavimo $9A\boxed{e^{3x}}+2B\boxed{e^{x}}+B\boxed{xe^{x}}-3(3Ae^{3x}+Be^{x}+Bxe^{x})+2(Ae^{3x}+Bxe^{x})=e^{3x}+5e^{x}$

e^{3x}: $\cancel{9A-9A}+2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

e^{x}: $2B-3B=5 \quad B=-5$

xe^{x}: $B-3B+2B=0$

$y_p=\frac{1}{2}e^{3x}-5xe^{x}$

R: $y = y_h + y_p = C_1e^{2x}+C_2e^{x}+\frac{1}{2}e^{3x}-5xe^{x}$

$y(0)=4$; $4=C_1+C_2+\frac{1}{2}$ $\quad \frac{7}{2}=-C_1 \quad C_1=\frac{1}{2}$