IZPIT IZ MATEMATIKE III

4. februar 2008

1. Poiščite enačbe vseh tangentnih ravnin na ploskev

$$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u^2, u\sin v),$$

ki so vzporedne ravnini $\Sigma : 4x - y + 4z = 0$. Prav tako poiščite enačbe vseh normalnih premic na ploskev $\vec{r}(u,v)$, ki so pravokotne na ravnino Σ.

Rešitev. Najprej poščimo normalo na ploskev $\vec{r}(u,v)$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u(u,v) &= (\cos v, 2u, \sin v) \\
\vec{r}_v(u,v) &= (-u\sin v, 0, u\cos v) \\
\vec{n}(u,v) &= r_u(u,v) \times r_v(u,v) = ... = \big(2u^2\cos v, -u, 2u^2\sin v\big)
\end{aligned}$$

Vzporednost z ravnino Σ nam da sistem enačb

$$2u^2\cos v = 4k \qquad -u = -k \qquad 2u^2\sin v = 4k,$$

iz katere dobimo

$$u = k \qquad u\cos v = 2 \qquad u\sin v = 2,$$

ki ima dve družini rešitev

$$v = \frac{\pi}{4} + 2\ell\pi, \quad u = k = 2\sqrt{2}$$

$$v = \frac{5\pi}{4} + 2\ell\pi, \quad u = k = -2\sqrt{2}.$$

V obeh primerih dobimo (tako edino) točko $T(2,8,2)$, kjer velja želeno. Torej se enačba iskane tangentne ravnine glasi $4x - y + 4z = 8$, enačba iskane normalne premice pa $\frac{x-2}{4} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-2}{4}$.

2. Izračunajte krivuljni integral

$$\int_C (3x^2 - 4)\,dx + (e^x\cos z)\,dy + (8y^2 - 4z^3)\,dz,$$

kjer je krivulja C daljica od točke $A(1,-1,2)$ do točke $B(2,-1,1)$.

Rešitev. Parametrizacija omenjene daljice je recimo

$$\begin{aligned} x &= 1+t(2-1) = 1+t, \\ y &= -1+t(-1+1) = -1, \\ z &= 2+t(1-2) = 2-t, \end{aligned}$$

kjer $0 \leq t \leq 1$. Tako dobimo $\dot{x}=1, \dot{y}=0, \dot{z}=-1$ in integral se prevede do

$$\begin{aligned} ... &= \int_0^1 \big(3(t+1)^2 - 4 - (8-4(2-t)^3)\big)dt = \\ &= ... = \int_0^1 \big(-4t^3+27t^2-42t+23\big)dt = \\ &= ... = 10 \end{aligned}$$

3. Določite parameter a, da bo vektorsko polje

$$\vec{V} = \left(\frac{a}{x} - e^x \sin y,\ \frac{z}{1+y^2z^2} - (a+1)^2 e^x \cos y,\ -\frac{2}{z} + \frac{(a^2-3)y}{1+y^2z^2}\right)$$

potencialno in pri tem parametru a izračunajte njegov potencial.
Za ta parameter a izračunajte tudi integral $\int_C \vec{V} d\vec{r}$, kjer je C poljubna krivulja od točke $A(e,0,1)$ do točke $B(-1,0,-1)$.

Rešitev. Vektorsko polje $\vec{V}$ je potencialno, če velja $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$. Druga komponenta tega rotorja je enaka 0 neodvisno od parametra a, iz preostalih dveh komponent pa dobimo enačbi

$$\frac{(a^2-3)(1+y^2z^2)-(a^2-3)y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2} - \frac{1+y^2z^2-2y^2z^2}{(1+y^2z^2)^2} = 0,$$

$$e^x \cos y - (1+a)^2 e^x \cos y = 0$$

oziroma

$$\frac{(a^2-4)(1-y^2z^2)}{(1+y^2z^2)^2} = 0 \qquad \text{in} \qquad -(2a+a^2)e^x \cos y = 0.$$

Tako mora veljati $(a^2-4) = (a-2)(a+2) = 0$ in $a(a+2) = 0$, iz česar sledi $a=-2$.
Poiščimo sedaj potencial tega vektorskega polja pri $a=-2$:

$$\begin{aligned} u &= \int \left(-\frac{2}{x} - e^x \sin y\right) dx = -2\log x - e^x \sin y + C(y,z) \\ u &= \int \left(\frac{z}{1+y^2z^2} - e^x \cos y\right) dy = \arctan(yz) - e^x \sin y + C(x,z) \\ u &= \int \left(-\frac{2}{z} + \frac{y}{1+y^2z^2}\right) dz = -2\log z + \arctan(yz) + C(x,y) \\ u &= \arctan(yz) - 2\log(xz) - e^x \sin y + C \end{aligned}$$

Ker je polje $\vec{V}$ potencialno, je naš iskani integral neodvisen od poti in ga lahko izračunamo s pomočjo njegovega potenciala. Tako dobimo:

$$\int_C \vec{V} d\vec{r} = u(B) - u(A) = 0 - (-2) = 2.$$

4. S pomočjo Gaussove formule izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \big(50x^3 + 7xy,\, 30x^2y + 7y^2 - ye^x \sin z,\, 60x^2z - yz - e^x \cos z\big)$$

skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa:

$$x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq x^2 + y^2, \;\; z \leq 3 - 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rešitev. Sledili bomo navodilu in tako uporabili Gaussovo formulo. Torej najprej poračunamo divergenco našega vektorskega polja $\vec{V}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= 150x^2 + 7y + 30x^2 + 14y - e^x \sin z + 60x^2 - y + e^x \sin z = \\ &= 240x^2 + 20y. \end{aligned}$$

Uvedimo polarne koordinate in dobimo

$$z \geq r^2, \;\; z \leq 3 - 2r.$$

Presečišče teh mejhnih ploskev se zgodi, ko je $r^2 = 3-2r$, kar pomeni $(r-1)(r+3) = 0$, torej pri $r = 1$.

Vse do sedaj povedano nam tako prevede naš iskani integral do:

$$\begin{aligned} ... &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} \big(240r^2 \cos^2\varphi + 20r \sin\varphi\big) r dz = \\ &= ... = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \big(240r^2 \cos^2\varphi + 20r \sin\varphi\big) r(3 - 2r - r^2) dr = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \Big(\cos^2\varphi\big(720r^3 - 480r^4 - 240r^5\big) + \sin\varphi\big(60r^2 - 40r^3 - 30r^4\big)\Big) dr = \\ &= ... = \int_0^{\pi/2} \big(44\cos^2\varphi + 6\sin\varphi\big) d\varphi = \\ &= ... = 6 + 11\pi. \end{aligned}$$

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z-2i|=3} \frac{32}{z(z-4)(z-4i)^2}\, dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Singularnosti znotraj našega območja sta le $z = 0$ in $z = 4i$, zato upoštevamo le ta dva residuuma. Singularnost $z = 0$ je pol prve stopnje, singularnost $z = 4i$ pa pol druge stopnje.

$$\mathrm{Res}_{z=0} \frac{32}{z(z-4)(z-4i)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{32}{(z-4)(z-4i)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}_{z=4i} \frac{32}{z(z-4)(z-4i)^2} = \lim_{z\to 4i} \left(\frac{32}{z(z-4)}\right)' = \lim_{z\to 4i} \frac{-32(2z-4)}{z^2(z-4)^2} = ... = -\frac{1}{2} - \frac{i}{4}$$

Integral se nam tako prevede v

$$= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=0} \frac{32}{z(z-4)(z-4i)^2} + \mathrm{Res}_{z=4i} \frac{32}{z(z-4)(z-4i)^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Vprašanja in pripombe: kristijan.cafuta@fe.uni-lj.si