# Izpit Matematika III

9. 2. 2010

## 1. naloga

Dani sta premica skozi točki $A(0,3,6)$ in $B(-1,4,10)$, ter sfera $x^2+y^2+z^2=9$.

1. Poiščite presečišči premice in sfere !
2. Pod kakšnim kotom prebode premica sfero ?

**Rešitev:**

Enačba premice: $\vec{r}=(0,3,6)+t(-1,1,4)$
$x=-t\ ,\ y=3+t\ ,\ z=6+4t$
v enačbo sfere: $t^2+(3+t)^2+(6+4t)^2=9$
$t^2+9+6t+tr+36+48t+16t^2=9$
$18t^2+54t+36=0$
$18(t+1)(t+2)=0$

$t_1=-1 \quad \rightarrow \quad \boxed{P_1(1,2,2)}$

$t_2=-1 \quad \rightarrow \quad \boxed{P_2(2,1,-2)}$

Kot med smerjo premice $\vec{e}$ in normalo na sfero $\vec{n}$ v prebodišču:

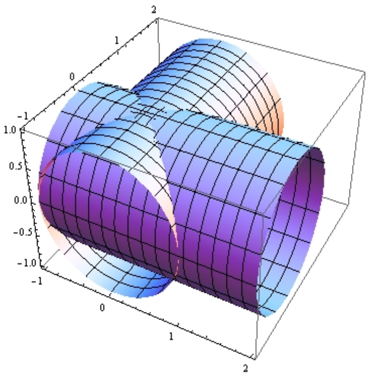
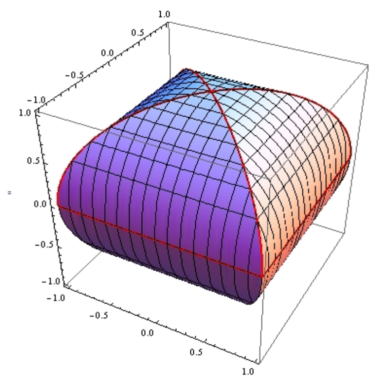
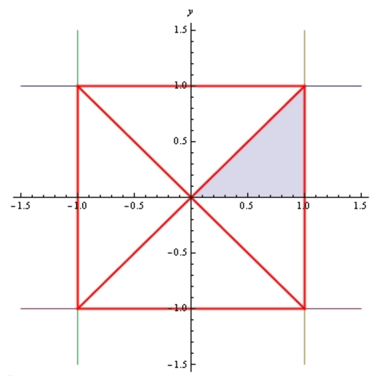
$$\cos\alpha=\frac{\vec{e}\cdot\vec{n}}{|\vec{e}|\ |\vec{n}|}=\frac{(-1,1,4)\cdot(1,2,2)}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{\alpha=45^o}$

## 2. naloga

Množica
$$\{ \ (x, y, z) \ ; \ x^2 + z^2 \leq a^2 \ \text{ in } \ y^2 + z^2 \leq a^2 \ \}$$
je presek dveh valjev. Poiščite prostornino in površino tega telesa !

**Rešitev:**

Enačbi plaščev valjev se odšteje in v preseku velja $x^2 - y^2 = 0$, projekcija preseka valjev na ravnino $(x, y)$ sta premici $y = \pm x$. Telo je sestavljeno iz 16 zrcalno razporejenih delov, izračun integrala izvedemo samo v prvem kvadrantu (osenčeni del v tretji sliki).

$$V = 16 \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dy \ = 16 \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx \ = 16\Big( -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3} \Big)\Big|_0^a$$

$$= \boxed{\tfrac{16}{3} a^3}$$

$$z = \sqrt{a^2 - x^2} \quad , \quad p = \tfrac{\partial z}{\partial x} = \tfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ , \ q = \tfrac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$P = 16 \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dy \ = 16 \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \, dy \ =$$

$$16 \int_0^a dx \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \ = 16a \int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ = 16a\Big( -\sqrt{a^2 - x^2} \Big)\Big|_0^a$$

$$= \boxed{16a^2}$$

## 3. naloga

Koliko je krivuljni integral

$$\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz$$

kjer je integracijska krivulja $C$ presek stožca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ in ravnine $y - x = 1$ od točke $A(1, 2, \sqrt{5})$ do točke $B(3, 4, 5)$ ?

**Rešitev:**

Rešitev s parametrizacijo krivulje:

$$x = t$$
$$y = t + 1$$
$$z = \sqrt{t^2 + (t+1)^2} = \sqrt{2t^2 + 2t + 1}$$

$$\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz = \int_1^3 \Big[(t+1) + t + \sqrt{2t^2+2t+1}\frac{4t+2}{2\sqrt{2t^2+2t+1}}\Big]\,dt =$$

$$\int_1^3 (4t+2)dt = 2t^2+2t\Big|_1^3$$

$$= \boxed{20}$$

Rešitev s potencialom, saj je pod integralom potencialno polje. Da je rotor polja $\vec{V} = (y, x, z)$ enak 0 se preveri na pamet in tudi potencial se ugane: $\vec{V} = grad\,u$, kjer je $u = xy + z^2/2$. Potem je

$$\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz = u(B) - u(A) = (12 + \frac{25}{2}) - (2 + \frac{5}{2}) = \boxed{20}$$

## 4. naloga

Razvijte funkcijo $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ v *Laurentovo* vrsto v okolici singularne točke $z_0 = i$ !

**Rešitev:**

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} =$$

$$\frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} =$$

$$\frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n =$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}}$$

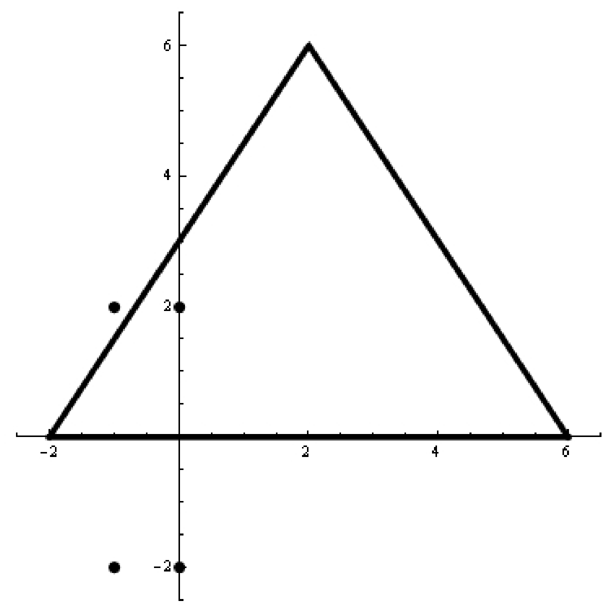
**5. naloga**

Izračunajte kompeksni integral

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+2z+5)}$$

kjer je integracijska krivulja rob trikotnika z oglišči $z_1 = -2$ , $z_2 = 6$ , $z_3 = 2+6i$ v pozitivni smeri !

**Rešitev:**




Singularne točke funkcije pod integralom:

$z_{1,2} = \pm 2i$
$z_{3,4} = -1 \pm 2i$

Znotraj konture trikotnika je samo $z_1 = 2i$ in je pol 1. stopnje. Uporabi se *izrek o residuih.*

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+2z+5)} =$$

$$2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{(z-2i)(z+2i)(z^2+2z+5)} =$$

$$2\pi i\ \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{-4+4i+5} = \boxed{\tfrac{\pi}{34}(1-4i)}$$