IZPIT IZ MATEMATIKE III

26. januar 2009

1. Vzemimo ploskev Σ in krivuljo τ:

$$\Sigma: \ \vec{r}(u,v) = (u^2, 2u\sin v, 4\sin^2 v), \ u > 0, \ 0 < v < \frac{\pi}{2}$$

$$\tau: \ \vec{r}(t) = (3, 2\sqrt{3}\,t, 2\sqrt{3}\,t).$$

(a) Poiščite presečišče T med ploskvijo Σ in krivuljo τ.

(b) Izračunajte tangentno ravnino na ploskev Σ v točki $S(3,3,3)$.

Rešitev.

(a) Dobimo dokaj enostaven sistem enačb:

$$\begin{aligned} u^2 &= 3 \\ 2u\sin v &= 2\sqrt{3}\,t \\ 4\sin^2 v &= 2\sqrt{3}\,t. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem pogoja $u > 0$ iz prve enačbe takoj dobimo $u = \sqrt{3}$ in takoj nato iz druge enačbe še $\sin v = t$. Ko vstavimo to v zadnjo enačbo, dobimo $4t^2 = 2\sqrt{3}\,t$, ki ima načeloma dve rešitvi $t = 0, t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ampak zaradi začetnega pogoja $0 < v < \frac{\pi}{2}$ dobimo le $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $v = \frac{\pi}{3}$. Povedano nam končno da točko $T(3,3,3)$.

(b) Računajmo:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u,v) &= (2u, 2\sin v, 0) \\ \vec{r}_v(u,v) &= (0, 2u\cos v, 8\sin v\cos v) \\ \vec{r}_u\Big(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\Big) &= \big(2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0\big) \\ \vec{r}_v\Big(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\Big) &= \big(0, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}\big) \\ \vec{n}\Big(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\Big) &= \vec{r}_u\Big(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\Big) \times \vec{r}_v\Big(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\Big) = (6, -12, 6) \sim \\ &\sim (1, -2, 1) \end{aligned}$$

Ob upoštevanju, da gre iskana tangentna ravnina skozi $S(3,3,3)$, dobimo, da se odgovor glasi $x - 2y + z = 0$.

2. Izračunajte prostornino telesa omejenega s paraboloidom $z = x^2 + y^2$, eliptičnim paraboloidom $z = 2x^2 + y^2$ in valjem $x^2 + y^2 = 1$.

Rešitev. Projekcija telesa na xy ravnino je krog $x^2 + y^2 \leq 1$, zato vzemimo cilindrične koordinate: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, za katere hkrati vemo, da je Jacobijeva determinanta enaka r.
Ob upoštevanju $z = x^2 + y^2 = r^2$ in $z = 2x^2 + y^2 = r^2 + r^2\cos^2\varphi$ dobimo

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{r^2+r^2\cos^2\varphi} r\,dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \cos^2\varphi\,dr = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right)\Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

3. Izračunajte krivuljni integral

$$\int_C (y^2 - z^3)dx + (z^3 - x^2)dy + (x - y)dz,$$

kjer je krivulja C daljica od točke $A(1, -1, 0)$ do točke $B(4, -2, -1)$.
Z ustreznim kriterijem preverite še, če je ta integral neodvisen od poti.

Rešitev. Možna parametrizacija daljice je $\vec{r}(t) = \vec{r}_A + t(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, kjer $0 \leq t \leq 1$. Torej $x = 1+3t, y = -1-t, z = -t$, kjer $0 \leq t \leq 1$. Tako dobimo $\dot{x} = 3, \dot{y} = -1, \dot{z} = -1$ in integral se prevede do

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \Big(\big((-1-t)^2 - (-t)^3\big)3 + \big((-t)^3 - (1+3t)^2\big)(-1) + \big(1 + 3t - (-1-t)\big)(-1)\Big)dt = \\ &= \int_0^1 4t^3 + 12t^2 + 8t + 2dt = (t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 2t)\Big|_0^1 = \\ &= 11 \end{aligned}$$

Iz teorije vemo, da bi bil ta integral neodvisen od poti, če bi bil rotor vektorskega polja $\vec{V} = (y^2 - z^3, z^3 - x^2, x - y)$ enak $\vec{0}$. Velja pa, da je

$$\operatorname{rot}\vec{V} = (-1 - 3z^2, -3z^2 - 1, -2x - 2y) \neq (0, 0, 0)$$

in zato ta integral ni neodvisen od poti.

4. Vzemimo točke $T_1(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $T_2(\frac{\pi}{2}, 0)$ in $T_3(\frac{\pi}{2}, 2)$. S pomočjo Greenove formule izračunajte integral
$$\int_C (y^3 \cos x + 7x^6y^8)\, dx + (6y^2 \sin x + x + 8x^7y^7) dy,$$
kjer je krivulja C pozitivno orientirana in sestavljena iz daljice od točke T_1 do točke T_2, daljice od točke T_2 do točke T_3 in krivulje $y = 1 + \sin x$ od točke T_3 do točke T_1.

Rešitev. Označimo $P = y^3 \cos x + 7x^6y^8$ in $Q = 6y^2 \sin x + x + 8x^7y^7$. Po Greenovi formuli se nam iskani integral prevede do (tekom računanja uvedemo v en integral substitucijo $t = 1 + \sin x$):

$$\begin{aligned}
\iint_D (Q_x - P_y)\, dxdy &= \iint_D (6y^2 \cos x + 1 + 56x^6y^7 - 3y^2 \cos x + 1 - 56x^6y^7)\, dxdy = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{1+\sin x} (3y^2 \cos x \;+ 1)\, dy = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big((1 + \sin x)^3 \cos x \;+ (1 + \sin x)\big)\, dx = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)^3 \cos x\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)\, dx = \\
&= \int_0^2 t^3\, dt + (x - \cos x)\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \dots = 4 + \pi.
\end{aligned}$$

5. Izračunajte kompleksni integral
$$\int_{|z+i|=2} \frac{8}{z^3(z^2+4)}\, dz,$$
kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Singularnosti naše funkcije $\frac{8}{z^3(z^2+4)}$ so $z = 0$, ki je pol tretje stopnje, in $z = \pm 2i$, ki sta pola prve stopnje. Znotraj integracijskega območja $|z - (-i)| = 2$

sta pa le $z=0$ in $z=-2i$. Poračunajmo si residuuma v teh dveh singularnostih:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=0} \frac{8}{z^3(z^2+4)} &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{8}{z^2+4}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-16z}{(z^2+4)^2}\right)' = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-16(z^2+4)^2+16z\cdot 2(z^2+4)\cdot 2z}{(z^2+4)^4}\right) = -\frac{1}{2}, \\
\operatorname{Res}_{z=-2i} \frac{8}{z^3(z^2+4)} &= \lim_{z\to -2i}\frac{8\big(z-(-2i)\big)}{z^3(z^2+4)} = \lim_{z\to -2i}\frac{8}{z^3(z-2i)} = \frac{8}{8i(-4i)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Iskani integral tako dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{|z+i|=2} \frac{8}{z^3(z^2+4)}\,dz &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=0}\frac{8}{z^3(z^2+4)} + \operatorname{Res}_{z=-2i}\frac{8}{z^3(z^2+4)}\right) = \\
&= 2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = -\frac{i\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vprašanja in pripombe: kristijan.cafuta@fe.uni-lj.si