1. naloga

Poiščite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \int\limits_0^{x^2} \left(e^{t^2} - e^4\right)\, dt \quad !$$

Rešitev:

$$f'(x) = \left(e^{x^4} - e^4\right)2x = 0$$
$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = \sqrt{2}\ ,\ x_3 = -\sqrt{2}$$
$$f''(x) = e^{x^4}8x^4 + \left(e^{x^4} - e^4\right)2$$

$$f''(0) = (1 - e^4)2 < 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x_1 = 0 \text{ je max}}$$

$$f''(\sqrt{2}) = 32e^4 > 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x_2 = \sqrt{2} \text{ je min}}$$

$$f''(-\sqrt{2}) = 32e^4 > 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x_3 = -\sqrt{2} \text{ je min}}$$

2. naloga

Izračunajte trojni integral

$$\iiint\limits_V \frac{1}{z}\, dxdydz$$

in je integracijsko območje določeno z neenačbama

$$x^2 + y^2 + z^2 < 2z \quad , \quad z > 1 \quad !$$

Rešitev:

Integral izračunamo v sferičnih koordinatah. Najprej zapišemo mejni ploskvi v sferičnih koordinatah in poiščemo njuno presečišče.
Rešitev sistema $\rho \sin\theta = 1$, $\rho = 2\sin\theta$ je $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_{1/\sin\theta}^{2\sin\theta} \frac{\rho^2 \cos\theta}{\rho \sin\theta}\, d\rho \quad = \quad 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta \int_{1/\sin\theta}^{2\sin\theta} \rho\, d\rho =$$

$$2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta\, \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{1/\sin\theta}^{2\sin\theta} = \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \Big(4\sin\theta - \frac{1}{\sin^3\theta}\Big) d\theta =$$

$$\pi\Big(4\tfrac{\sin^2\theta}{2} + \tfrac{1}{2\sin^2\theta}\Big)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi(2 + \tfrac{1}{2} - 1 - 1) = \boxed{\tfrac{\pi}{2}}$$

3. naloga

Kos žice leži v ravnini (x, y) na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$ med točkama $A(1, 0)$ in $B(\sqrt{2}, 1)$. Masa žice na dolžinsko enoto je enaka $\frac{1}{d}$, kjer je d oddaljenost točke od izhodišča. Kolikšna je masa žice ?

Rešitev:

Parametrična enačba hiperbole: $x = t\,,\ y = \sqrt{t^2 - 1} \quad , \quad \dot{x} = 1\,,\ \dot{y} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$

$$m = \int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + \frac{t^2}{t^2-1}}}{\sqrt{t^2 + t^2 - 1}} dt = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \log(t + \sqrt{t^2 - 1})\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \boxed{\log(\sqrt{2} + 1)}$$

4. naloga

Naj bo $z = x + iy$ in $u = x^3 - 3xy^n$. Določite konstanto n in funkcijo $v(x, y)$, tako da bo funkcija $u + iv$ analitična !

Rešitev:

Da je funkcija u realni del analitične funkcije, je potreben pogoj, da je harmonična:

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 6x - 3xn(n-1)y^{n-2} = 0 \quad \longrightarrow \quad n = 2$$

$$u_x = v_y \quad \longrightarrow \quad v = \int u_x dy = \int (3x^2 - 3y^2) dy = 3x^2y - y^3 + C(x)$$
$$u_y = -v_x \quad \longrightarrow \quad -6xy = -(6xy + C'(x)) \quad \longrightarrow \quad C(x) = C$$

$$v(x, y) = \boxed{3x^2y - y^3 + C}$$

5. naloga

Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+10)^2} \qquad !$$

Rešitev:

$z^2 - 2z + 10 = 0$
$z_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-40}}{2} = 1 \pm 3i$

Funkcija $f(z) = \frac{1}{(z^2-2z+10)}$ ima na zgornji polravnini eno singularno točko $z_1 = 1 + 3i$, ki je pol 2. stopnje.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+10)^2} \; dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) =$$

$$2\pi i \lim_{z\to z_1} \left[\frac{(z-z_1)^2}{\big((z-z_1)(z-z_2)\big)^2} \right]' =$$
$$2\pi i \lim_{z\to z_1} [(z-z_2)^{-2}]' =$$
$$2\pi i \lim_{z\to z_1} (-2)(z-z_2)^{-3} = 2\pi i(-2)(z_1-z_2)^{-3} =$$

$$\frac{-4\pi i}{\big[(1+3i)-(1-3i)\big]^3} = \frac{-4\pi i}{6^3 i^3} = \boxed{\frac{\pi}{54}}$$