IZPIT IZ MATEMATIKE III

10. junij 2013

1. Vzemimo
$$\vec{r}(t) = \left(4\sin\frac{3t}{13}, 4\cos\frac{3t}{13}, \frac{5t}{13} + 1\right).$$

   (a) Poiščite tangentno premico na $\vec{r}(t)$ v točki $A(0,4,1)$.

   (b) Izračunajte dolžino krivulje $\vec{r}(t)$ od točke $A(0,4,1)$ do točke $B\left(2\sqrt{3}, 2, 1 + \frac{5\pi}{9}\right)$.

   (c) Ali je dana parametrizacija $\vec{r}(t)$ naravna parametrizacija? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Poračunajmo si najprej tangentni vektor $\dot{\vec{r}}$.
$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{12}{13}\cos\frac{3t}{13}, -\frac{12}{13}\sin\frac{3t}{13}, \frac{5}{13}\right)$$

(a) Za parameter t_A, ki pripada točki A, vidimo, da velja $t_A = 0$ in zato
$$\dot{\vec{r}}(0) = \left(\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}\right) = \frac{1}{13}(12, 0, 5).$$

Sledi, da je iskana tangentna premica (v kanonični obliki) enaka
$$\frac{x}{12} = \frac{z-1}{5}, \quad y = 4.$$

(b) Za parameter t_B mora (med drugim) veljati
$$\frac{5t_B}{13} + 1 = 1 + \frac{5\pi}{9} \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{13\pi}{9},$$

kar zadosti tudi pogojem iz prvih dveh komponent vektorja $\vec{r}(t)$ in točke B. Torej
$$\ell = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{\vec{r}}(t)\cdot\dot{\vec{r}}(t)}\, dt = \int_0^{\frac{13\pi}{9}} \sqrt{\left(\frac{12}{13}\cos\frac{3t}{13}\right)^2, \left(-\frac{12}{13}\sin\frac{3t}{13}\right)^2, \left(\frac{5}{13}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{13\pi}{9}} \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{25}{169}}\, dt = \int_0^{\frac{13\pi}{9}} dt = \frac{13\pi}{9}.$$

(c) Ker velja $|\dot{\vec{r}}(t)|^2 = \dot{\vec{r}}(t)\cdot\dot{\vec{r}}(t) = 1$, je dana parametrizacija $r(t)$ res naravna parametrizacija.

2. Izračunajte
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy,$$
kjer je območje $\mathcal{D}$ določeno z neenačbami
$$x^2+y^2 \geq 1, \quad x^2+y^2 \leq 9, \quad y \geq -x, \quad y \leq x.$$

Rešitev. Uvedemo polarne koordinate in dobimo
$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^3 \frac{r^2\cos^2\varphi}{r^2}\,r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\,\cos^2\varphi\Big|_1^3\,d\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2\varphi\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi \\
&= \Big(2\varphi + \sin 2\varphi\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi + 2
\end{aligned}$$

3. Izračunajte
$$\iiint_V (5x+3y^2)\,dxdydz,$$
kjer je območje V omejeno s ploskvami
$$x=2, \quad y=0, \quad z=0, \quad x=y, \quad z=xy.$$

Rešitev. Velja
$$\begin{aligned}
\iiint_V (5x+3y^2)\,dxdydz &= \int_0^2 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} \big(5x+3y^2\big)dz \\
&= \int_0^2 dx \int_0^x \big(5x(xy)+3y^2(xy)\big)dy \\
&= \int_0^2 \left(5x^2\frac{y^2}{2} + 3x\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^x dx \\
&= \left(\frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{8}\right)\Big|_0^2 = 16+8 = 24
\end{aligned}$$

4. S pomočjo Greenove formule izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} \big(y^2 + e^x\big)dx + \big(xy + x^2 - \sin(3y)\big)dy,$$

kjer krivulja $\mathcal{C}$ sestavljena iz daljic v smeri

$$T_1(2,1) \to T_2(3,1) \to T_3(3,5) \to T_4(2,4) \to T_1(2,1).$$

Rešitev. Sledimo navodilu naloge in uporabimo Greenovo formulo.

$$\begin{array}{lcr} P = y^2 + e^x & \to & P_y = 2y \\ Q = xy + x^2 - \sin 3y & \to & Q_x = y + 2x \\ & \to & Q_x - P_y = 2x - y \end{array}$$

Tako dobimo, da je iskani integral enak

$$\begin{aligned} \ldots &= \iint_{\mathcal{D}} (2x-y)\,dxdy = \int_2^3 dx \int_1^{x+2} (2x-y)\,dy \\ &= \ldots = \int_2^3 \left(2x(x+2) - 2x - \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \ldots = \int_2^3 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}\right) dx \\ &= \ldots = 8 \end{aligned}$$

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z-\pi|=2} \frac{\cos z\,dz}{(z-i)(z-i-\pi)},$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Edina singularnost, ki jo krivulja zajame, je $z = \pi + i$. Zato poracunajmo le ta residuum. Ker je $z = \pi + i$ pol prve stopnje, velja

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=\pi+i} \frac{\cos z}{(z-i)(z-i-\pi)} &= \lim_{z\to\pi+i} \frac{\cos z}{z-i} = \frac{\cos(\pi+i)}{\pi} = \frac{e^{i(\pi+i)} + e^{-i(\pi+i)}}{2\pi} \\ &= \frac{e^{i\pi}e^{-1} + e^{-i\pi}e^{1}}{2\pi} = \frac{-e^{-1} - e^{1}}{2\pi} = -\frac{\cosh 1}{\pi} \end{aligned}$$

Iskani integral je tako enak

$$2\pi i \operatorname{res}_{z=\pi+i} \frac{\cos z}{(z-i)(z-i-\pi)} = 2\pi i \left(-\frac{\cosh 1}{\pi}\right) = -2i\cosh 1.$$