

Izpit iz Matematike III

2. september 2005

1. Vzemimo skalarno polje $F(x, y, z) = \arctan(xyz) + x(e^y - e^z)$, krivuljo $\vec{r}(t) = (t^4 - 4t, 2 \sin(t^2 - 1 + \frac{\pi}{6}), \log(2t - 1))$ in točki $T_1(0, 1, 1)$ ter $T_2(1, 0, 0)$.

(a) Poiščite enačbo nivojske ploskve skalarnega polja $F(x, y, z)$, ki gre skozi točko T_1 .

(b) V točki T_1 poiščite normalo na nivojsko ploskev iz točke (a).

(c) Poiščite točko na dani krivulji $\vec{r}(t)$, v kateri je tangenta pravokotna na normalo iz točke (b).

(d) Izračunajte smerni odvod skalarnega polja $F(x, y, z)$ v točki T_2 v smeri najhitrejšega spreminjanja.

2. Vzemimo točki $A(0, -\frac{\pi}{2}, 1)$ in $B(1, \pi, 1)$. Izračunajte krivuljni integral

$$\int_A^B \left(\frac{1}{1+x^2} - 3x^2z^3, z \cos(yz), y \cos(yz) - 3x^3z^2 \right) d\vec{r}.$$

Namig: Pokažite najprej, da je ta krivuljni integral neodvisen od poti.

3. Izračunajte prostornino telesa, dobljenega s preseki

$$x^2 + y^2 \leq 1, z \geq x^2 + y^2 - 2 \text{ in } z \leq 3 - x^2 - 2y^2.$$

4. Vzemimo množico $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1, \text{Im}(z) > 0\}$ in linearno ulomljeno preslikavo $f(z) = \pi(-1 + i)\frac{z-1}{z-i}$. Kam se preslika območje \mathcal{A} s preslikavo $f(z)$? Obe območji tudi narišite.