

IZPIT IZ MATEMATIKE III

6. september 2007

1. Vzemimo ploskev Σ in krivuljo ρ :

$$\Sigma : \vec{r}(u, v) = (2u \sin v, u^2, 4 \sin^2 v), \quad u > 0, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}$$

$$\rho : \vec{r}(t) = (2\sqrt{3}t, 3, 2\sqrt{3}t).$$

- Poiščite presečišče T med ploskvijo Σ in krivuljo ρ .
- Izračunajte tangentno ravnino na ploskev Σ v omenjenem presečišču T .
- Izračunajte tangentno premico na krivuljo ρ v omenjenem presečišču T .

2. Dokažite, da je krivuljni integral

$$\int_C \left(\frac{y}{x^2 + 1} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + e^z, \arctan x + 2yz^3 + \sqrt{\frac{xz}{y}}, xe^z + \sqrt{\frac{xy}{z}} + 3y^2 z^2 \right) d\vec{r}$$

neodvisen od poti in ga za primer, ko je C neka krivulja od točke $A(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, 0)$ do točke $B(0, 2, 1)$, tudi izračunajte.

3. Izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = (3x^2 + x \sin y + x, \cos y + xe^z + 3y - 3xy, x^3(y^2 + 3y - 1) - zx)$$

skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa:

$$z \leq 3 - 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \quad z \geq (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

Namig: Uporabite Gaussovo formulo in uvedite premaknjene cilindrične koordinate

$$x = r \cos \varphi + 1, \quad y = r \sin \varphi + 1, \quad z = z.$$

4. Razvijte funkcijo

$$f(z) = \frac{7z + 3}{z^2 + 2z - 15}$$

v Laurentovo vrsto na kolobarju $3 < |z| < 5$.

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z-(3+3i)|=4} \frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2} dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.