IZPIT IZ MATEMATIKE III

6. september 2007

1. Vzemimo ploskev Σ in krivuljo ρ:

$$\Sigma: \ \vec{r}(u,v) = (2u\sin v, u^2, 4\sin^2 v), \ u > 0, \ 0 < v < \frac{\pi}{2}$$

$$\rho: \ \vec{r}(t) = (2\sqrt{3}\,t, 3, 2\sqrt{3}\,t).$$

(a) Poiščite presečišče T med ploskvijo Σ in krivuljo ρ.

(b) Izračunajte tangentno ravnino na ploskev Σ v omenjenem presečišču T.

(c) Izračunajte tangentno premico na krivuljo ρ v omenjenem presečišču T.

Rešitev.

(a) Dobimo dokaj enostaven sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2u\sin v &= 2\sqrt{3}\,t \\ u^2 &= 3 \\ 4\sin^2 v &= 2\sqrt{3}\,t. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem pogoja $u > 0$ iz druge enačbe takoj dobimo $u = \sqrt{3}$ in takoj nato iz prve še $\sin v = t$. Ko vstavimo to v zadnjo enačbo, dobimo $4t^2 = 2\sqrt{t}$, ki ima načeloma dve rešitvi $t = 0, t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ampak zaradi začetnega pogoja $0 < v < \frac{\pi}{2}$ dobimo le $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $v = \frac{\pi}{3}$. Povedano nam končno da točko $T(3,3,3)$.

(b) Računajmo:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u,v) &= (2\sin v, 2u, 0) \\ \vec{r}_v(u,v) &= (2u\cos v, 0, 8\sin v\cos v) \\ \vec{r}_u\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right) &= \left(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 0\right) \\ \vec{r}_v\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right) &= \left(\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}\right) \\ \vec{n}\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right) &= \vec{r}_u\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right) \times \vec{r}_v\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right) = (12, -6, -6) \sim \\ &\sim (2, -1, -1) \end{aligned}$$

Ob upoštevanju, da gre iskana tangentna ravnina skozi $T(3,3,3)$, dobimo, da se odgovor glasi $2x - y - z = 0$.

(c) Vemo, da je smerni vektor tangentne premice kar enak $\dot{\vec{r}}(t) = \left(2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}\right) \sim (1,0,1)$, kar nam ob upoštevanju, da vsebujemo še točko $T(3,3,3)$, takoj da odgovor $x = z, y = 0$.

2. Dokažite, da je krivuljni integral

$$\int_C \left(\frac{y}{x^2+1} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + e^z,\ \arctan x + 2yz^3 + \sqrt{\frac{xz}{y}},\ xe^z + \sqrt{\frac{xy}{z}} + 3y^2z^2 \right) d\vec{r}$$

neodvisen od poti in ga za primer, ko je C neka krivulja od točke $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, 0\right)$ do točke $B(0,2,1)$, tudi izračunajte.

Rešitev. Iz teorije vemo, da bo ta integral neodvisen od poti, če bo rotor vektorskega polja $\vec{V} = (P,Q,R) = \left(\frac{y}{x^2+1} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + e^z, \arctan x + 2yz^3 + \sqrt{\frac{xz}{y}}, xe^z + \sqrt{\frac{xy}{z}} + 3y^2z^2\right)$ enak $\vec{0}$, zato računajmo:

$$\begin{aligned}
R_y - Q_z &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{yz}} + 6yz^2 - 6yz^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{yz}} = 0 \\
P_z - R_x &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{xz}} + e^z - e^z - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{xz}} = 0 \\
Q_x - P_y &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{xy}} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{xy}} = 0 \\
\operatorname{rot}\vec{V} &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (0,0,0).
\end{aligned}$$

Po teoriji tudi vemo, da zato tak integral izračunamo preko potenciala tega vektorskega polja:

$$\begin{aligned}
U &= \int \left(\frac{y}{x^2+1} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + e^z \right) dx = y \arctan x + 2\sqrt{xyz} + xe^z + C(y,z) \\
U &= \int \left(\arctan x + 2yz^3 + \sqrt{\frac{xz}{y}} \right) dy = y \arctan x + y^2z^3 + 2\sqrt{xyz} + C(x,z) \\
U &= \int \left(xe^z + \sqrt{\frac{xy}{z}} + 3y^2z^2 \right) dz = xe^z + 2\sqrt{xyz} + y^2z^3 + C(x,y) \\
U &= y \arctan x + 2\sqrt{xyz} + xe^z + y^2z^3 + C
\end{aligned}$$

Tako končno dobimo, da je naš iskani rezultat enak:

$$U(B) - U(A) = 4 - \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 4 - \pi.$$

3. Izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \left(3x^2 + x\sin y + x,\ \cos y + xe^z + 3y - 3xy,\ x^3(y^2+3y-1) - zx\right)$$

skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa:

$$z \leq 3 - 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \quad z \geq (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

Namig: Uporabite Gaussovo formulo in uvedite premaknjene cilindrične koordinate

$$x = r\cos\varphi + 1, \quad y = r\sin\varphi + 1, \quad z = z.$$

Rešitev. Sledili bomo namigu in si tako pomagali z Gaussovo formulo. Tako najprej poračunamo divergenco našega polja:

$$\operatorname{div} V = 6x + \sin y + 1 - \sin y + 3 - 3x - x = 2x + 4.$$

Če sledimo dalje namigu in pogledamo telo preko omenjenih koordinat, dobimo

$$z \leq 3 - 2r, \quad z \geq r^2.$$

Presečišče teh mejhnih ploskev se zgodi, ko je $3-2r = r^2$, kar pomeni $(r-1)(r+3) = 0$, torej pri $r = 1$.

Vse do sedaj povedano nam tako prevede naš iskani integral do:

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} \big(2(r\cos\varphi + 1) + 4\big) r dz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} (2r^2\cos\varphi + 6r) dz = \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} 2r^2 dz + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} 6r dz = \\
&= 0 + 2\pi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{3-2r} 6r dz = 2\pi \int_0^1 6r(3 - 2r - r^2) dr = \\
&= 2\pi \left(9r^2 - 4r^3 - \frac{3r^4}{2}\right)\Bigg|_0^1 dr = 2\pi\left(9 - 4 - \frac{3}{2}\right) = \\
&= 7\pi.
\end{aligned}$$

4. Razvijte funkcijo

$$f(z) = \frac{7z + 3}{z^2 + 2z - 15}$$

v Laurentovo vrsto na kolobarju $3 < |z| < 5$.

Rešitev. S pomočjo parcialnih ulomkov $\frac{7z+3}{z^2+2z-15} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+5} = \frac{A(z+5)+B(z-3)}{(z-3)(z+5)}$ dobimo po rešitvi sistema dveh enačb z dvema neznankama

$$A + B = 7, \quad 5A - 3B = 3,$$

da je $A = 3, B = 4$ oziroma $\frac{7z+3}{z^2+2z-15} = \frac{3}{z-3} + \frac{4}{z+5}$. Glede na dano območje $3 < |z| < 5$ ta ulomka dalje predelamo v:

$$\frac{7z+3}{z^2+2z-15} = \frac{3}{z-3} + \frac{4}{z+5} = \frac{3}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)} + \frac{4}{5\Big(1-\big(-\frac{z}{5}\big)\Big)} =$$
$$= \frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n + \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{5}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^{n+1} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$$

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{\left|z-(3+3i)\right|=4} \frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2}\,dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Ker je razdalja točke $3+3i$ do izhodišča enaka $3\sqrt{2}$, kar je več kot 4, sta edini singularnosti znotraj našega območja le $z = 3$ in $z = 3i$, kar pomeni, da poračunamo le ta dva residuuma. Singularnost $z = 3$ je pol prve stopnje, singularnost $z = 3i$ pa pol druge stopnje. Računajmo:

$$\mathrm{Res}_{z=3}\,\frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2} = \lim_{z\to 3}\frac{1}{z(z-3i)^2} = \frac{1}{3(3-3i)^2} = \frac{1}{27(1-2i-1)} =$$
$$= -\frac{1}{54i} = \frac{i}{54}$$
$$\mathrm{Res}_{z=3i}\,\frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2} = \lim_{z\to 3i}\left(\frac{1}{z(z-3)}\right)' = \lim_{z\to 3i}\frac{-2z+3}{z^2(z-3)^2} = \frac{-6i+3}{-9(3i-3)^2} =$$
$$= \frac{-6i+3}{-81(-1-2i+1)} = \frac{-6i+3}{162i} = -\frac{2+i}{54}$$

Integral tako pride

$$\ldots = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=3}\,\frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2} + \mathrm{Res}_{z=3i}\,\frac{1}{z(z-3)(z-3i)^2}\right) =$$
$$= 2\pi i\left(\frac{i}{54} - \frac{2+i}{54}\right) = -\frac{2\pi i}{27}$$

Vprašanja in pripombe: kristijan.cafuta@fe.uni-lj.si