IZPIT IZ MATEMATIKE III

2. september 2008

1. Podana je krivulja

$$\vec{r}(t) = (-\sin t + \cos t, -\cos t - \sin t, -t).$$

   (a) Izračunajte dolžino loka krivulje $\vec{r}(t)$ med točkama $T_1(1,-1,0)$ in $T_2(-1,1,\pi)$.

   (b) Poiščite naravno parametrizacijo krivulje $\vec{r}(t)$.

   (c) Določite enačbo normalne ravnine na krivuljo $\vec{r}(t)$ v točki $T_3(-1,-1,-\frac{\pi}{2})$.

   Rešitev.

   (a) Takoj vidimo, da sta točki T_1 in T_2 doseženi pri $t = 0$ oziroma $t = -\pi$. Računajmo

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= (-\cos t - \sin t, \sin t - \cos t, -1)\\
ds &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \sqrt{(-\cos t - \sin t)^2 + (\sin t - \cos t)^2 + (-1)^2}\,dt =\\
&= \ldots = \sqrt{3}\,dt\\
s &= \int_{-\pi}^{0} \sqrt{3}\,dt = \sqrt{3}\pi
\end{aligned}$$

   (b) Kot v točki (a) dobimo $ds = \sqrt{3}\,dt$ in po integriranju tako $s = \sqrt{3}\,t$ oziroma $t = \frac{s}{\sqrt{3}}$. Iskana naravna parametrizacija se tako glasi

$$\vec{r}(s) = \left(-\sin\frac{s}{\sqrt{3}} + \cos\frac{s}{\sqrt{3}}, -\cos\frac{s}{\sqrt{3}} - \sin\frac{s}{\sqrt{3}}, -\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$$

   (c) Takoj se vidi, da je točka T_3 dosežena pri $t = \frac{\pi}{2}$. Vemo, da je normala normalne ravnine enaka tangentnemu vektorju $\dot{\vec{r}}(t)$. Tako dobimo

$$\vec{n} = \dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2}) = (-1, 1, -1).$$

   Enačba iskane normalne ravnine se tako glasi $-x+y-z = d$, kjer d poračunamo z vstavljanjem točke T_3. Dobimo $d = \frac{\pi}{2}$ oziroma

$$-x + y - z = \frac{\pi}{2}.$$

2. Izračunajte ploščino lika, omejenega s krivuljo

$$x^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Namig: Uvedite polarne koordinate.

Rešitev. Po uvedbi polarnih koordinat $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ se naša enačba krivulje prevede do $r^2\cos^2\varphi = r^4$ oziroma $r^2 = \cos^2\varphi$. Če sedaj to enačbo korenimo, dobimo, $r = |\cos\varphi|$. Vidimo, da je ta izraz odvisen od kota φ in sicer, če velja $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, je $\cos\varphi \geq 0$ in dobimo $r = \cos\varphi$, če pa velja $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, je $\cos\varphi \leq 0$ in dobimo $r = -\cos\varphi$. Iz opisanega sledi, da je ploščina enaka

$$\begin{aligned}
P &= \iint_D dxdy = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r\,dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-\cos\varphi} r\,dr = \\
&= ... = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(1+\cos(2\varphi)\big)\,d\varphi + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \big(1+\cos(2\varphi)\big)\,d\varphi = \\
&= ... = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Opomba: Lahko bi opazili, da je telo simetrično tako čez x-os, kot tudi čez y-os, kar pomeni, da lahko izračunamo le ploščino dela telesa v 1. kvadrantu in rezultat množimo s 4. V prvem kvadrantu je enačba naše krivulje le $r = \cos\varphi$ in tako dobimo

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r\,dr = ... = \frac{\pi}{2}$$

3. Izračunajte integral

$$\int_C z\,ds$$

po sklenjeni krivulji C, sestavljeni iz krivulj C_x, C_y, C_z, ki predstavljajo preseke sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v prvem oktantu z ravninami $x = 0$, $y = 0$ oziroma $z = 0$.

Rešitev. Razdelimo našo krivuljo C na tri dele, kot omenja naloga; C_x, C_y in C_z in pripravimo izračune za vsak del posebej:

C_x, $x = 0$: Dobimo krivuljo $y^2 + z^2 = 1$, ki jo parametriziramo $y = \cos t$, $z = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1$.

C_y, $y = 0$: Dobimo krivuljo $z^2 + x^2 = 1$, ki jo parametriziramo $z = \cos t$, $x = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1$.

C_z, $z=0$: Po tej krivulji je naš integral jasno enak 0, saj je funkcija, ki jo integriramo, enaka $z=0$.

Iskan integral tako pride

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = ... = 1 + 1 = 2.$$

4. Določite parameter a tako, da bo vektorsko polje $\vec{V} = (P, Q, R)$, kjer je

$$\begin{aligned} P &= \frac{y}{1+x^2y^2} + e^{xyz}yz + (a^2+1)\cos(x)\log(yz), \\ Q &= \frac{x}{1+x^2y^2} + e^{xyz}xz + \frac{2\sin(x)}{y}, \\ R &= e^{xyz}xy + \frac{2(a+2)^2\sin(x)}{z}, \end{aligned}$$

potencialno in izračunajte njegov potencial.

Rešitev. Vektorsko polje $\vec{V}$ bo potencialno, če bo veljalo $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$. Prva komponenta omenjenega rotorja je enaka 0 neodvisno od parametra a, iz drugih dveh komponent pa dobimo po kratkem računu naslednji zahtevi

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{(a^2+8a+7)\cos x}{z}, \\ 0 &= -\frac{(a^2-1)\cos x}{y}, \end{aligned}$$

oziroma

$$0 = a^2 + 8a + 7 = (a+7)(a+1) \qquad \text{in} \qquad 0 = a^2 - 1 = (a+1)(a-1).$$

Obe zahtevi bosta zadoščeni le v primeru $a = -1$.

Tako dobimo

$$\begin{aligned} P &= \frac{y}{1+x^2y^2} + e^{xyz}yz + 2\cos(x)\log(yz), \\ Q &= \frac{x}{1+x^2y^2} + e^{xyz}xz + \frac{2\sin(x)}{y}, \\ R &= e^{xyz}xy + \frac{2\sin(x)}{z}, \end{aligned}$$

oziroma potencial tega vektorskega polja

$$\begin{aligned}
\int P\,dx &= \int \left(\frac{y}{1+x^2y^2} + e^{xyz}yz + 2\cos(x)\log(yz)\right)dx = \\
&= \arctan(xy) + e^{xyz} + 2\sin(x)\log(yz) + C(y,z), \\
\int Q\,dy &= \int \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + e^{xyz}xz + \frac{2\sin(x)}{y}\right)dy = \\
&= \arctan(xy) + e^{xyz} + 2\sin(x)\log(yz) + C(x,z), \\
\int R\,dz &= \int \left(e^{xyz}xy + \frac{2\sin(x)}{z}\right)dz = e^{xyz} + 2\sin(x)\log(yz) + C(x,y), \\
u &= \arctan(xy) + e^{xyz} + 2\sin(x)\log(yz) + C
\end{aligned}$$

5. S kompleksno integracijo izračunajte določeni integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5x}{(x^2+4x+29)^2}\,dx.$$

Rešitev. Ko pogledamo na ta integral kot na kompleksni integral, vemo, da je dovolj gledati le singularnosti v zgornji polravnini in uporabiti izrek o residuih. Ničli polinoma $x^2+4x+29$ sta $-2 \pm 5i$, v zgornji polravnini pa je seveda le $-2+5i$, ki je za našo začetno funkcijo $\frac{5x}{(x^2+4x+29)^2}$ pol druge stopnje. Računajmo

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{x=-2+5i} \frac{5x}{(x^2+4x+29)^2} &= \lim_{x\to -2+5i} \left(\frac{5x}{(x+2+5i)^2}\right)' = \\
&= \lim_{x\to -2+5i} \frac{5(x+2+5i)^2 - 10x(x+2+5i)}{(x+2+5i)^4} = \\
&= ... = \frac{i}{50}
\end{aligned}$$

Po izreku o residuih dobimo, da je naš iskani integral enak

$$2\pi i \frac{i}{50} = -\frac{\pi}{25}.$$

Vprašanja in pripombe: kristijan.cafuta@fe.uni-lj.si