IZPIT IZ MATEMATIKE III

15. september 2011

1. Izračunajte enačbo tangentne ravnine na ploskev

$$\vec{r}(u,v) = (u\sin v, u^2, u\cos v)$$

v točki $T(1,2,1)$.

Rešitev. Najprej poračunamo/opazimo, da ploskev doseže točko T pri $u = \sqrt{2}$ in $v = \frac{\pi}{4}$. Računajmo:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u(u,v) &= (\sin v, 2u, \cos v)\\
\vec{r}_u\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) &= \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \sim (1,4,1)\\
\vec{r}_v(u,v) &= (u\cos v, 0, -u\sin v)\\
\vec{r}_v\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) &= (1,0,-1)\\
\vec{n}\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) &= \vec{r}_u\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) \times \vec{r}_v\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) = (-4,2,-4) \sim (2,-1,2)
\end{aligned}$$

Torej se enačba tangentne ravnine glasi $2x - y + 2z = 2$.

2. Izračunajte krivuljni integral

$$\int_{\mathcal{C}} (y-z)dx + (z^2 - x^3)dy + (x^3 - y^2)dz,$$

kjer je krivulja $\mathcal{C}$ daljica od točke $A(0,1,-1)$ do točke $B(-1,4,-2)$.
Z ustreznim kriterijem preverite še, če je ta integral neodvisen od poti.

Rešitev. Ena od možnih parametrizacij daljice $\mathcal{C}$ je recimo $x = -t$, $y = 1+3t$, $z = -1-t$, kjer $0 \le t \le 1$. Tako dobimo $\dot{x} = -1, \dot{y} = 3, \dot{z} = -1$ in integral se prevede do

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(\big(1+3t-(-1-t)\big)(-1) + \big((-1-t)^2 - (-t)^3\big)3 + \big((-t)^3 - (1+3t)^2\big)(-1)\Big)dt =\\
&= \int_0^1 4t^3 + 12t^2 + 8t + 2dt = (t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 2t)\Big|_0^1 =\\
&= 11
\end{aligned}$$

Iz teorije vemo, da bi bil ta integral neodvisen od poti, če bi bil rotor vektorskega polja $\vec{V} = (y-z, z^2-x^3, x^3-y^2)$ enak $\vec{0}$. Velja pa, da je

$$\operatorname{rot}\vec{V} = (-2y-2z, -1-3x^2, -3x^2-1) \ne (0,0,0)$$

in zato ta integral ni neodvisen od poti.

3. Izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = (6x^2 - e^z - 3y^2, 15xy + x\cos z^2, \sin y^3 - 3xz)$$

skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa:

$$x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq 0, \;\; x + y + z \leq 1.$$

Rešitev. Pomagali si bomo kar z Gaussovo formulo. Tako najprej poračunajmo $\operatorname{div} V = 12x + 15x - 3x = 24x$. Integral se torej prevede do

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} 24x\,dz = 24 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xz\Big|_0^{1-x-y} dy = \\
&= 24 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \big(x - x^2 - xy\big) dy = 24 \int_0^1 \Big(xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}\Big)\Big|_0^{1-x} dx = \\
&= 24 \int_0^1 \Big(x - 2x^2 + x^3 - \frac{x - 2x^2 + x^3}{2}\Big) dx = \\
&= \big(12x^2 - 16x^3 + 6x^4 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4\big)\Big|_0^1 = \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. Razvijte funkcijo

$$f(z) = \frac{9z - 2}{z^2 - z - 6}$$

v Laurentovo vrsto na kolobarju $2 < |z| < 3$.

Rešitev. S pomočjo parcialnih ulomkov $\frac{9z-2}{z^2-z-6} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+2}$ dobimo po rešitvi sistema dveh enačb z dvema neznankama, da je $\frac{9z-2}{z^2-z-6} = \frac{5}{z-3} + \frac{4}{z+2}$. Glede na dan kolobar $2 < |z| < 3$ ulomka predelamo do:

$$\begin{aligned}
\frac{9z-2}{z^2-z-6} &= \frac{5}{z-3} + \frac{4}{z+2} = \frac{5}{-3(1 - \frac{z}{3})} + \frac{4}{z(1 - (-\frac{2}{z}))} = \\
&= -\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{3}\Big)^n + \frac{4}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{z}\Big)^n = \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+2}}{z^{n+1}}
\end{aligned}$$

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z+\frac{i}{2}|=1} \frac{1}{z(z+1)(z+i)^2}\,dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Singularnosti znotraj našega območja sta le $z = 0$ in $z = -i$, tako da upoštevamo le ta dva residuuma. Singularnost $z = 0$ je pol prve stopnje, singularnost $z = -i$ pa pol druge stopnje.

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z(z+1)(z+i)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z+1)(z+i)^2} = \frac{1}{i^2} = -1$$

$$\operatorname{Res}_{z=-i} \frac{1}{z(z+1)(z+i)^2} = \lim_{z\to -i} \left(\frac{1}{z(z+1)}\right)' = \lim_{z\to -i} \frac{-2z-1}{z^2(z+1)^2} = \frac{2i-1}{(-i)^2(-i+1)^2} =$$

$$= \frac{2i-1}{-1(-1-2i+1)} = \frac{2i-1}{2i} = 1 - \frac{1}{2i} = 1 + \frac{i}{2}$$

Integral je tako enak

$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z(z+1)(z+i)^2} + \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{1}{z(z+1)(z+i)^2}\right) =$$

$$= 2\pi i \left(-1 + 1 + \frac{i}{2}\right) = -\pi$$

Vprašanja in pripombe: kristijan.cafuta@fe.uni-lj.si