IZPIT IZ MATEMATIKE III

4. september 2013

1. Vzemimo krivuljo $\vec{r}(t) = \left(t^2 - 6, \frac{t^3}{3}, 2t\right)$ in ploskev $\Sigma : x^2 + z^2 = 20$.

   (a) Poiščite skupni točki $\vec{r}(t)$ in Σ.

   (b) Izračunajte dolžino loka krivulje $\vec{r}(t)$ med skupnima točkama $\vec{r}(t)$ in Σ.

   (c) Izračunajte kot med $\vec{r}(t)$ in Σ v skupnih točkah $\vec{r}(t)$ in Σ.

Rešitev. Vnaprej poračunajmo tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t)$.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(2t, t^2, 2\right)$$

(a) Za skupne točke mora veljati

$$(t^2 - 6)^2 + (2t)^2 = 20$$

oziroma

$$(t^2 - 4)^2 = 0,$$

kar nam da dve različni rešitvi $t_{1,2} = 2$ in $t_{3,4} = -2$ ter posledično dve točki $\vec{r}(2)$ in $\vec{r}(-2)$:

$$T_1\Big(-2, \frac{8}{3}, 4\Big) \quad \text{in} \quad T_2\Big(-2, -\frac{8}{3}, -4\Big).$$

(b)

$$\begin{aligned} s &= \int_{-2}^{2} \sqrt{(2t)^2 + (t^2)^2 + 2^2}\, dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{(2 + t^2)^2}\, dt = \int_{-2}^{2} \left|2 + t^2\right| dt \\ &= \int_{-2}^{2} (2 + t^2)\, dt = \ldots = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

(c) Poračunajmo še normalo na ploskev:

$$\vec{n}(x, y) = (z_x, z_y, -1) = (2x, 0, 2z).$$

Ker velja

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(T_1) \cdot \vec{n}(T_1) &= (4, 4, 2) \cdot (-4, 0, 8) = 0 \quad \text{in} \\ \dot{\vec{r}}(T_2) \cdot \vec{n}(T_2) &= (-4, 4, 2) \cdot (-4, 0, -8) = 0, \end{aligned}$$

sta normali ploskve pravokotni na ustrezna tangentna vektorja, kar pomeni, da sta iskana kota ena 0 (tj. krivulja se v obeh točkah le dotakne ploskve).

2. Izračunajte površino tistega dela ploskve

$$z = 5 + 3xy,$$

za katerega velja

$$x^2 + y^2 \leq 11.$$

Rešitev.

$$\begin{aligned} P &= \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + 9x^2 + 9y^2}\, dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{11}} \sqrt{1 + 9r^2}\, r\, dr = ... = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{100} \frac{\sqrt{t}}{18}\, dt \\ &= ... = \int_0^{2\pi} \frac{999}{27}\, d\varphi = 74\pi, \end{aligned}$$

kjer smo tekom računanja uvedli substitucijo $1 + 9r^2 = t$.

3. Izračunajte krivuljni integral prve vrste

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{2\sqrt{3}\,(2z + y)}{x^2 - 2y + 11}\, ds,$$

kjer je $\mathcal{C}$ daljica od točke $A(1, 0, 1)$ do točke $B(3, 2, 0)$.

Rešitev. Daljico najprej parametriziramo:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_A + t(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = (1 + 2t, 2t, 1 - t) \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \dot{\vec{r}}(t) &= (2, 2, -1) \\ ds &= \sqrt{4 + 4 + 1}\, dt = 3dt \end{aligned}$$

Tako se iskani integral prevede do

$$\begin{aligned} \ldots &= \int_0^1 \frac{2\sqrt{3}\,(2 - 2t + 2t)}{1 + 4t + 4t^2 - 4t + 11}\, 3dt = 3 \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{3 + t^2}\, dt \\ &= 3 \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = ... = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. S pomočjo teorije residuumov izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{12x^2}{(x^2+9)^2}\,dx.$$

Rešitev. Ker je funkcija $\frac{12x^2}{(x^2+9)^2}$ soda, velja

$$\int_0^\infty \frac{12x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{12x^2}{(x^2+9)^2}\,dx,$$

pri čemer vemo, da je ta dobljen integral enak vsoti residuumov $\frac{12x^2}{(x^2+9)^2}$ v singularnostih iz zgornje polravnine, kar je v našem primeru le $3i$ (pol druge stopnje). Ker velja

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{x=3i}\frac{12x^2}{(x^2+9)^2} &= \lim_{x\to 3i}\left(\frac{12x^2}{(x+3i)^2}\right)' = \lim_{x\to 3i}\frac{24x(x+3i)^2-12x^2 2(x+3i)}{(x+3i)^4}\\ &= \ldots = -i,\end{aligned}$$

je iskani integral enak

$$\frac{1}{2}\,2\pi i(-i)=\pi.$$

5. Poiščite in skicirajte kam preslikava

$$f(z)=\frac{-6z}{z+2i}$$

preslika prvi kvadrant.

Rešitev. Ker vemo, da linearna lomljena preslikava družino premic in krožnic preslika nazaj v družino premic in krožnic (ter ohranja orientacijo), je dovolj, da si za vsako robno premico pogledamo le po slike treh točk. Za pozitiven poltrak imaginarne osi imamo

$$\begin{aligned}0 &\mapsto 0\\ 2i &\mapsto \frac{-12i}{4i}=-3\\ \infty &\mapsto -6,\end{aligned}$$

kar pomeni, da se ta preslika v daljico od 0 do -6. Za pozitiven poltrak realne osi pa imamo

$$\begin{aligned}0 &\mapsto 0\\ 2 &\mapsto \frac{-12}{2+2i}=-3+3i\\ \infty &\mapsto -6,\end{aligned}$$

kar pomeni, da se ta preslika v zgornjo polovico krožnice s središčem v -3 in polmerom enakim 3. Zaradi ohranjanja orientiranosti tako dobimo območje nad dobljeno daljico in pod dobljeno polovico krožnice.