PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

19. november 2007

1. (a) Poiščite tangentno ravnino ploskve

$$\vec{r}(u,v) = \left(uv, \frac{u}{v}, \frac{1}{u^2}\right)$$

v točki $T\left(2, 1, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Poiščite točko na krivulji

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{4}\sin t + \frac{7}{8}, \frac{7}{2} - \sqrt{3}\cos t, \frac{7}{2} - \cos(2t)\right),$$

v kateri je tangentna premica pravokotna na ravnino

$$x + 4y + 8z = 10.$$

Rešitev.

(a) Za določitev parametrov u, v v presečišču dobimo sistem enačb

$$uv = 2, \qquad \frac{u}{v} = 1, \qquad \frac{1}{u^2} = \frac{1}{2},$$

ki ima rešitev $u = v = \pm\sqrt{2}$. Vemo, da normalo tangentne ravnine dobimo na sledeč način

$$\vec{r}_u(u,v) = \left(v, \frac{1}{v}, -\frac{2}{u^3}\right)$$
$$\vec{r}_v(u,v) = \left(u, -\frac{u}{v^2}, 0\right)$$
$$\vec{n} = \vec{r}_u\left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right) \times r_v\left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1, -2\right) \sim (1, 2, 4)$$

Torej se tangentna ravnina glasi $x + 2y + 4z = d$, kjer d poračunamo z vstavljanjem točke $T\left(2, 1, \frac{1}{2}\right)$ in dobimo $x + 2y + 4z = 6$.

(b) Poračunajmo si najprej tangentni vektor:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{1}{4}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 2\sin(2t)\right).$$

Ker mora biti tangentna premica pravokotna na ravnino, pomeni, da mora biti tangentni vektor vzporeden normali ravnine. Torej mora veljati

$$\left(\frac{1}{4}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 2\sin(2t)\right) = k(1,4,8)$$

oziroma dobimo sistem enačb

$$\frac{1}{4}\cos t = k, \qquad \sqrt{3}\sin t = 4k, \qquad 2\sin(2t) = 8k.$$

Kakorkoli pogledamo na ta sistem (recimo, da najprej zdelimo prvi dve enačbi ali da najprej enačimo drugi dve enačbi, kjer upoštevamo $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$), dobimo rešitev $t = \frac{\pi}{6}$. Iskano točko dobimo seveda tako, da sedaj to vstavimo v začetno parametrizacijo, kar nam da točko $T(1,2,3)$.

2. S pomočjo odvajanja na parameter izračunajte integral

$$F(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(1 + a\sin x)}{\sin x}\, dx, \quad |a| < 1.$$

Rešitev. Sledimo navodilu in si res najprej izračunajmo odvod tega integrala s parametrom:

$$F'(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{(1 + a\sin x)\sin x}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + a\sin x}\, dx$$

To pogledamo v matematični priročnik in dobimo

$$F'(a) = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan \frac{\tan\frac{x}{2} + a}{\sqrt{1-a^2}}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

Tako smo izračunali odvod naše iskane funkcije, torej sedaj to integrirajmo:

$$F(a) = \int F'(a)da = \int \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\, da = 2\pi \arcsin a + C$$

Če pogledamo začetni integral, vidimo, da velja $F(0) = 0$ in tako dobimo enačbo $0 = 0 + C$, katere rešitev je $C = 0$. Tako smo dobili rešitev $F(a) = 2\pi\arcsin a$.

3. Izračunajte prostornino telesa določenega z

$$x^2 + y^2 \le 2x, \quad z \le 4 - (x^2 + y^2), \quad z \ge 0.$$

Rešitev. Prva mejna ploskev je premaknjen pokončen valj v smeri x osi za 1, druga mejna ploskev pa obrnjen paraboloid v središčni legi in dvignjen za 4 v smeri z osi, ki ima presek z ravnino $z = 0$ (tretja mejna ploskev) krožnico v središčni legi s polmerom 2. Pomeni, da ima naše telo projekcijo na xy ravnino ravno enako $x^2 + y^2 \leq 2x$ oziroma $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Uvedimo polarne koordinate $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Krožnica, ki je mejna krivulja tega integracijskega območja, se v polarnih koordinatah glasi $r^2 = 2r\cos\varphi$ oziroma $r = 2\cos\varphi$, omenjen paraboloid pa $z = 4 - r^2$. Če povrh vsega upoštevamo še simetrijo, dobimo

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (4-r^2) r\, dr = \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \\
&= 16\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi - 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = \\
&= 16\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right)\Big|_0^{\pi/2} - 8\left(\frac{3}{8}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) + \frac{1}{32}\sin(4\varphi)\right)\Big|_0^{\pi/2} = \\
&= 16\frac{\pi}{4} - 8\frac{3\pi}{16} = 4\pi - \frac{3\pi}{2} = \\
&= \frac{5\pi}{2}
\end{aligned}
$$