

## DRUGI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

10. januar 2014

1. Vzemimo skalarno polje  $u = 2xy - z$  in točko  $T(2, 4, 16)$ .

(a) Izračunajte smerni odvod skalarnega polja  $u$  v točki  $T$  v smeri najhitrejšega spreminjanja.

(b) Izračunajte

$$\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS,$$

kjer je  $S$  tisti del nivojske ploskve  $u = 0$ , za katerega velja  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Rešitev.**

(a) Smer najhitrejšega spreminjanja je ravno smer gradienta. Zato bo iskani smerni odvod enak

$$\text{grad } u(T) \cdot \frac{\text{grad } u(T)}{|\text{grad } u(T)|} = |\text{grad } u(T)|.$$

Ker je  $\text{grad } u = (2y, 2x, -1)$ , je  $\text{grad } u(T) = (4, 8, -1)$  oziroma  $|\text{grad } u(T)| = 9$ .

(b) Ploskev  $S$ , ki je enaka  $2xy - z = 0$ , lahko parametriziramo recimo

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, 2uv).$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_u(u, v) = (1, 0, 2v) \cdot (1, 0, 2v) = 1 + 4v^2 \\ F &= \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = (1, 0, 2v) \cdot (0, 1, 2u) = 4uv \\ G &= \vec{r}_v(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = (0, 1, 2u) \cdot (0, 1, 2u) = 1 + 4u^2 \\ \sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \end{aligned}$$

Zaradi omejitve  $u^2 + v^2 \leq 1$  vpeljimo v nadaljevanju polarne koordinate ( $u = r \cos \varphi$ ,  $v = r \sin \varphi$ ,  $J = r$ ):

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS &= \iint_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \iint_D (1 + 4u^2 + 4v^2) dudv \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4r^2) r dr \\ &= \dots = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \dots = 3\pi \end{aligned}$$

2. S pomočjo Greenove formule izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} (2xy + x^2y + e^x)dx + (x^2 - x^3 - 4y^2x)dy,$$

kjer je krivulja  $\mathcal{C}$  podana z

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2), \quad x \geq 0$$

in orientirana v smeri urinega kazalca.

**Rešitev.** Računajmo kot nam veleva naloga:

$$\begin{aligned} P &= 2xy + x^2y + e^x \\ Q &= x^2 - x^3 - 4y^2x \\ Q_x - P_y &= -4x^2 - 4y^2 \end{aligned}$$

Pretvorimo krivuljo  $\mathcal{C}$  v polarno obliko:

$$r^4 = 2r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{2 \cos(2\varphi)}.$$

Da bo veljalo  $\cos(2\varphi) \geq 0$  in hkrati  $x \geq 0$  (tj.  $\cos \varphi \geq 0$ ) mora veljati  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ . Označimo s  $\mathcal{C}^+$  pozitivno orientirano (tj. v nasprotni smeri urinega kazalca) krivuljo  $\mathcal{C}$ . Tedaj velja

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy &= - \int_{\mathcal{C}^+} P dx + Q dy = - \iint_D (Q_x - P_y) dx dy \\ &= \iint_D (4x^2 + 4y^2) dx dy = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2 \cos(2\varphi)}} r^2 r dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4 \cos^2(2\varphi) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2(1 + \cos(4\varphi)) d\varphi \\ &= \dots = \pi \end{aligned}$$

3. (a) Utemeljite, kateri sumand (en!) v

$$x^3 + 2xy + \cos x \operatorname{sh} y$$

moramo izbrisati, da bo tako dobljen izraz lahko imaginarni del neke analitične funkcije  $f(z)$ .

Omenjeno analitično funkcijo nato tudi poiščite.

(b) Poiščite vse rešitve enačbe

$$12 \sin z + \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z + 13 = e^z.$$

**Rešitev.**

- (a) Da je funkcija lahko imaginarni del neke analitične funkcije, mora biti harmonična. Označimo  $w = x^3 + 2xy + \cos x \operatorname{sh} y$  in računajmo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 6x - \cos x \operatorname{sh} y + \cos x \operatorname{sh} y = 6x$$

Iz napisanega vidimo, da moramo izpustiti člen  $x^3$ , torej

$$v = w - x^3 = 2xy + \cos x \operatorname{sh} y.$$

Da poiščemo pripadajoči realni del, uporabimo Cauchy-Riemannov sistem enačb ( $u_x = v_y$  in  $u_y = -v_x$ ):

$$\begin{aligned} u &= \int v_y dx = \int (2x + \cos x \operatorname{ch} y) dx = x^2 + \sin x \operatorname{ch} y + C_1(y) \\ u &= \int -v_x dy = \int (-2y + \sin x \operatorname{sh} y) dy = -y^2 + \sin x \operatorname{ch} y + C_2(x) \\ u &= x^2 - y^2 + \sin x \operatorname{ch} y + C \\ f(z) &= u + iv = x^2 - y^2 + \sin x \operatorname{ch} y + C + i(2xy + \cos x \operatorname{sh} y) \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y + C \\ &= (x + iy)^2 + \sin(x + iy) + C \\ &= z^2 + \sin z + C \end{aligned}$$

- (b) Računajmo (kjer bomo uvedli substitucijo  $u = e^{iz}$ ):

$$\begin{aligned} 12 \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} + \frac{e^z + e^{-z}}{2} + 13 &= e^z \\ 6 \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i} + 13 &= 0 \\ 6u - 6u^{-1} + 13i &= 0 \\ 6u^2 + 13iu - 6 &= 0 \\ u_{1,2} &= \frac{-13i \pm \sqrt{-169 + 144}}{12} \\ &= \frac{-13i \pm 5i}{12} \end{aligned}$$

1.  $u_1 = -\frac{2}{3}i$ :

$$\begin{aligned} e^{iz_1} &= -\frac{2}{3}i \\ iz_{1,k} &= \log\left(-\frac{2}{3}i\right) = \log \frac{2}{3} + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2.  $u_2 = -\frac{3}{2}i$ :

$$e^{iz_2} = -\frac{3}{2}i$$
$$iz_{2,k} = \log\left(-\frac{3}{2}i\right) = \log\frac{3}{2} + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

Kot vidimo, lahko rešitve celo združimo v

$$z = \pm \log\frac{3}{2} + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$