Diferencialne enačbe

1.) *Enačba z ločljivima spremenljivkama*

$y' = g(x)h(y)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$

Rešitev:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C$$

2.) *Homogena enačba*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Prevedemo na 1. z substitucijo:

$y = ux \qquad y' = u'x + u$

$u + u'x = f(u)$

3.) *Linearna enačba I. reda*

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

Rešimo najprej homogeno:

$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0 \qquad \ln|y| + \int f(x)dx = \ln C$

$y_h = Ce^{-\int f(x)dx}$

Potem uporabimo metodo variacije konstant:

$y(x) = v(x)y_h \qquad y_h(x) = e^{-\int f(x)dx}$

$v'y_h + v(\underbrace{y_h' + fy_h}_{0}) = g \qquad \frac{dv}{dx}y_h(x) = g(x)$

$dv = \frac{g(x)}{y_h(x)}dx + C \qquad v = \int \frac{g(x)}{y_h(x)}dx + C$

Splošna rešitev:

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C\right)$$

Rešitev je vsota partikularne in splošne rešitve:

$y(x,C) = y_p(x) + Cy_h(x) \qquad y_p(x) = y_h(x)\int_0^x \frac{g(x)}{y_h(x)}dx$

4.) *Bernoullijeva enačba*

$$y' + f(x)y = g(x)y^n$$

Delimo enačbo z y^n:

$$y^{-n}y' + f(x)y^{-n+1} = g(x)$$

Prevedemo na 3. s substitucijo:

$z = y^{-n+1} \qquad z' = (-n+1)y^{-n}y'$

Vstavimo v prvotno enačbo:

$$z' + (-n+1)f(x)z = (-n+1)g(x)$$

5.) *Eksaktna enačba*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Pogoj za eksaktno enačbo:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Integral nam da:

$\frac{\partial F}{\partial y} = N \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = M \qquad$ in velja $\qquad dF(x,y) = 0$

Splošna rešitev:

$$F(x,y) = C$$

6.) *Reševanje enačb z vpeljavo paremetra*

$x = x(t, C) \qquad\qquad y = y(t, C)$

Ločimo dva primera, če enačba ne vsebuje:

a.)<u>Odvisne spremenljivke</u>:

$F(x, y') = 0$

Izrazimo x z y', torej $x = \varphi(y')$, vpeljemo $p = y'$:

$dy = pdx \qquad dy = p\varphi'(p)dp \qquad y(p) = \int p\varphi'(p)dp$

Rešitev v parametrični obliki:

$x(p) = \varphi(p) \qquad\qquad y(p) = \int p\varphi'(p)dp$

b.)<u>Neodvisne spremenljivke</u> :

$F(y, y') = 0$

Če je možno zrazimo y z y', delimo z y', vpeljemo $p = y'$, $dx = \dfrac{dy}{p}$:

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\psi'(p)}{p}dp$$

Rešitev v parametrični obliki:

$x = \int \dfrac{\psi'(p)}{p}dp \qquad\qquad y = \psi(p)$

c.)<u>Lahko se zgodi, da se</u> y <u>in</u> y' <u>izražata, kot funkciji parametra</u> u :

$y = \varphi(u) \qquad\qquad y' = \psi(u)$

Upoštevamo $dy = \varphi'(u)du$, ter $dy = y'dx$ in dobimo rešitev v parametrični obliki:

$x = \int \dfrac{\varphi'(u)}{\psi(u)}du \qquad\qquad y = \varphi(u)$

7.)*Lagrangeova in Clairautova enačba*:

$y = x\varphi'(y) + \psi(y')$

Vpeljemo parameter $p = y'$:

$dy = pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp$

$(\varphi(p) - p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp = 0$

če velja $\varphi(p) - p \neq 0$ je zgornja enačba linearna za $x(p)$:

$$(\varphi(p) - p)\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0$$

Splošna rešitev v parametrični obliki:

$x = x(p, C)$ $\qquad$ $y = x(p, C)\varphi(p) + \psi(p)$

Če za kakšen p_i velja $\varphi(p_i) - p_i = 0$ je singularna reširev:

$y = p_i x + C(p_i)$

Če velja $\varphi(p) - p = 0$ preide Lagrangeova enačba v Clairautovo:

$y = xy' + \psi(y')$

Enačbo diferenciramo in upoštevamo $dy = y'dx$:

$dy = xdy' + y'dx + \varphi'(y')dy'$ $\qquad$ $[x + \varphi'(y')]dy' = 0$

Vsak od faktorjev je lahko 0:

a) $dy = 0$ sledi splošna rešitev

$y = Cx + \psi(C)$

b) $x + \varphi'(y') = 0$ sledi singularna rešitev v parametrični obliki

$x = -\psi'(p)$ $\qquad$ $y = p\psi'(p) + \psi(p)$

Enačbe s konstantnimi koeficienti:

8.)*Homogena linearna enačba s konstantnimi koeficienti*:

$y'' + py' + q = 0$

Rešimo z nastavkom $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$:

$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$ $\qquad$ $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Rešitve karakteristične enačbe dajo bazo rešitev:

Korena enačbe	Baza rešitev	Splošna rešitev
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1, \lambda_2 \in R$	$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda \in R$	$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$
$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ $\lambda_1, \lambda_2 \in C$	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

9.)*Eulerjeva diferencialna enačba*:

$x^2 y'' + axy + by = 0$

Rešimo z nastavkom $x = e^t$:

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t}$ $\qquad y'' = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d(e^{-t}\dot{y})}{dt}e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$

Vstavimo v prvotno enačbo:

$\ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0$ $\qquad \lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0$

Rešitve kareakteristične enačbe dajo bazo rešitev:

Korena enačbe	Baza rešitev	Splošna rešitev
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1, \lambda_2 \in R$	$x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}$	$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda \in R$	$x^{\lambda}, x^{\lambda} \log x$	$y = (C_1 + C_2 \log x)x^{\lambda}$
$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $\lambda_1, \lambda_2 \in C$	$x^{\alpha}\cos(\beta \log x), x^{\alpha}\sin(\beta \log x)$	$y = x^{\alpha}\left[C_1 \cos(\beta \log x) + C_2 \sin(\beta \log x)\right]$

Nehomohene diferencialne enačbe:

10.)*Metoda nedoločenih koeficientov*:

$y'' + f(x)y' + g(x) = r(x)$

Rešitve enačbe iščemo z nastavkom:

$r(x) = e^{\alpha x}(P_i(x)\cos\beta x + Q_j(y)\sin\beta x$

-indeksa p in j predstavljata stopnjo polinoma

<u>V primeru večkratnosti kompleksne ničle v karakteristični enačbi velja</u>:

$y_p(x) = x^k e^{\alpha k}(R_m(x)\cos\beta x + S_m \sin\beta x)$

- R_m in S_m sta stopnje $m = \max\{i, j\}$ z neznanimi koeficienti,

k pa je večkratnost kompleksne ničle karakterističnega polinoma

11.)*Metoda variacije konstant*:

$y'' + f(x)y' + g(x) = r(x)$

Homogena rešitev:

$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Partikularna rešitev(konstanti homogene rešitve zamenjamo s funkcijami):

$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$ $\qquad y_p{}' = u(x)'y_1 + u(x)y_1' + v(x)'y_2 + v(x)y_2'$

Pripišemo pogoje in dobimo sistem, ki po integraciji da funkciji $u(x)$ in $v(x)$:

$u(x)'y_1 + v(x)'y_2 = 0$

$u(x)'y_1' + v(x)'y_2' = r(x)$