MATEMATIKA III

1. Osnove diferencialne geometrije

1.1 Vektorska funkcija

DEFINICIJA: vektorska funkcija definirana s tremi skalarnimi funkcijami *x(t), y(t), z(t)* , $t \in [a,b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Vsaki vrednosti t pripada natanko določen vektor $r(t)$. Vektorsko funkcijo $r(t)$ predstavimo tako $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + t(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t))$.

ZVEZNOST: vektorska funkcija $\vec{r}(t)$ je v točki $t_0 \in [a,b]$ zvezna, če obstaja za vsako pozitivno število ε tako pozitivno število δ, da velja $|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)| < \varepsilon$, kakor hitro je $|t - t_0| < \delta$.

ODVOD definiramo kot limito diferenčnega kvocienta $\vec{r}\,`(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$.

Pravila za odvajanje:

a) odvajanje je linearen operator torej je $[\alpha\vec{r}(t) + \beta\vec{s}(t)]` = \alpha\vec{r}\,`(t) + \beta\vec{s}\,`(t)$, kjer sta α in β poljubni konstanti.
b) Odvod skalarnega produkta je enak $[\vec{r}(t)\vec{s}(t)]` = \vec{r}\,`(t)\vec{s}(t) + \vec{r}(t)\vec{s}\,`(t)$
c) Odvod vektorskega produkta je enak $[\vec{r}(t) \times \vec{s}(t)]` = \vec{r}\,`(t) \times \vec{s}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{s}\,`(t)$

Vektorska funkcija je zvezna natanko takrat, kadar so zvezne njene komponente in odvedljiva, kadar so odvedljive komponente. Odvod je vektor, ki ima za komponente odvode komponent, $\vec{r}\,`(t) = x`(t)\vec{i} + y`(t)\vec{j} + z`(t)\vec{k} = (x`(t), y`(t), z`(t))$.

1.2 Krivulje v prostoru

V tem razdelku povemo, kako analitično izrazimo krivulje v prostoru.

1) dani naj bosta funkciji *y=y(x), z=z(x),* ki sta enolični in zvezni na intervalu *[a,b]*. Za vsak $x \in [a,b]$ dobimo ustrezni vrednosti *y* in *z*. Naj bodo števila *x,y,z* koordinate točke *T* v prostoru. Ko se *x* zvezno spreminja od *a* do *b*, se točka zvezno premika in opiše krivuljo v prostoru.
2) Naj bodo *x=x(t), y=y(t), z=z(t)* enolične in zvezne funkcije spremenljivke *t* na intervalu $[\alpha, \beta]$. Za vsak $t = [\alpha, \beta]$, dobimo števila *x,y,z*, ki so koordinate točke *T*. Ko *t* zavzame vse vrednosti, točka *T* popiše neko krivuljo. Spremenljivko *t* navadno imenujemo parameter, sistem enačb zgoraj pa parametrične enačbe krivulje.
3) Naslednji zapis je v vektorski obliki, ko imamo *x=x(t), y=y(t), z=z(t)* za komponente vektorja $\vec{r}$ v danem koordinatnem sistemu. Potem je enačba krivulje $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)) = \vec{r}(t), \_\_\_\_ t \in [\alpha, \beta]$. Vektor $\vec{r}$ je krajevni vektor od izhodišča do točke *T* v prostoru. Ko *t* preteče vse vrednosti, opiše drugo krajišče dano krivuljo.

1.3 Ločna dolžina krivulje v prostoru

Krivulja je dana v parametrični obliki *x=x(t), y=y(t), z=z(t),* $t \in [\alpha, \beta]$. Funkcije naj bodo enolične, zvezne in zvezno odvedljive. Interval $[\alpha, \beta]$ razdelimo na n podintervalov $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = \beta$. Tem vrednostim pripada *n+1* točk na krivulji, ki jih zvežemo s tetivami. Tako dobimo poligonsko črto, katere dolžina je $s_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{T_{k-1}T_k} = \sum_k \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}$.

Tu je $x_k = x(t_k)$ ___ $y_k = y(t_k)$ ___ $z_k = z(t_k)$. Če obstaja limita te vsote, ko gre število točk preko vsake meje, njihove medsebojne razdalje $\delta_k = t_k - t_{k-1}$ pa proti nič in to na kakršenkoli način, je ta limita ločna dolžina.

Če uporabimo Lagrangeov izrek, se ločna dolžina glasi $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$. Za krivuljo podano eksplicitno z enačbama *y=y(x), z=z(x),* $x \in [\alpha, \beta]$, ko imamo x parameter, dobimo $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$.

Naravni parameter: iz lastnosti določenega integrala sledi $\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ ___ *ali* ___ $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Lok s je zgornja funkcija meje in ker je *s(t)* monotono naraščajoča funkcija parametra *t*, obstaja inverzna funkcija *t=t(s)*. Tudi ta je enolična in zvezna funkcija ločne dolžine *s*. Sedaj je *s* parameter in ga imenujemo naravni parameter. Funkcije *x, y, z* postanejo lahko funkcije parametra *s* $x = x[t(s)] = x(s),$ ___ $y = y(s)$ ___ $z = z(s)$. Koordinate točk na krivulji so izražene kot funkcije naravnega parametra. Tako vrednosti s pripada tista točka *T* na krivulji, katere razdalja po krivulji od neke začetne točke T_0 je ravno *s*.

1.4 Tangenta na krivuljo

Na gladki krivulji v prostoru $\vec{r} = \vec{r}(t)$ naj bosta točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in *T(x,y,z)*. Vektorja $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ in $\vec{r} = \vec{r}(t)$ sta ustrezna krajevna vektorja s krajiščem v teh točkah. Skozi točki T_0, *T* postavimo sekanto in vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ leži na sekanti. Isto velja za kvocient $\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t \to t_0}$. Ko gre $t \to t_0$, gre točka *T* po krivulja k točki T_0 in sekanta limitira proti končni legi, ki jo imenujemo tangenta na krivuljo $\vec{r}$ v točki T_0. Prejšnji kvocient limitira proti $\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$. Tako vektor $\dot{\vec{r}}_0$ določa premico, ki je tangenta na dano krivuljo v točki T_0. Enačba tangente je: vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ leži na tangenti in je sorazmeren vektorju $\dot{\vec{r}}_0$. Imamo $\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda \dot{\vec{r}}_0$ ali $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \dot{\vec{r}}_0$. To vektorsko enačbo izpišemo še po komponentah in dobimo kanonski zapis enačbe tangente $\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}$. Če je enačba krivulje izražena z naravnim parametrom *s*, je $\dot{\vec{r}}_0$ vektorska enota na tangenti in jo zaznamujemo kot $\vec{\xi}$. Sicer se vektorska enota glasi $\vec{\xi} = \frac{\dot{\vec{r}}_0}{|\dot{\vec{r}}_0|}$. Ravnina, ki gre skozi dotikališče $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in stoji pravokotno na tangenti je normalna ravnina, enačba te ravnine pa se glasi $(\vec{r}-\vec{r}_0)\dot{\vec{r}}_0=0$ ali v komponenti obliki $(x-x_0)\dot{x}_0+(y-y_0)\dot{y}_0+(z-z_0)\dot{z}_0=0$.

1.5 Ploskve v prostoru

Ploskve v prostoru lahko podajamo na različne načine:

a) Eksplicitna oblika enačbe ploskve: naj bo *z(x,y)* enolična in zvezna funkcija dveh spremenljivk definirana na odprtem območju *D* ravnine *(xy)* potem *z=z(x,y)* določa ploskev v prostoru, ki je graf funkcije *z(x,y).* Vsakemu paru *x,y* iz območja *D* pripada vrednost *z,* tako trojica *(x,y,z)* predstavlja koordinate točke *T(x,y,z),* ki popiše ploskev
b) Implicitna oblika enačbe ploskve: naj bo *F(x,y,z)* enolična, zvezna in zvezno odvedljiva funkcija treh spremenljivk na nekem območju prostora. Množica vseh točk *T(x,y,z),* ki ustrezajo enačbi *F(x,y,z)=0* sestavlja ploskev.
c) Parametrična oblika enačbe ploskve: parametrično zapišemo enačbo ploskve s tremi enoličnimi in zvezno odvedljimi funkcijami dveh spremenljivk (parametrov) *u* in *v*, *x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v).* Par *(u,v)* imamo za koordinati neke točke v kartezičnem koordinatnem sistemu ravnine *(uv).* Ko zavzameta parametra vse možne vrednosti za katere so funkcije definirane, opiše točka *T(x,y,z)* neko ploskev.
d) Vektorska oblika enačbe: ko imamo zgornje funkcije za komponente vektorja $\vec{r}$, $\vec{r}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=\vec{r}(u,v)$. Lahko se zgodi, da se ploskev reducira na eno samo krivuljo. Do tega ne pride, če je vsaj ena od tako imenovanih funkcionalnih determinant različna od *0*. Funkcionalne determinante so komponente vektorskega produkta $\vec{r}_u\times\vec{r}_v$, ki naj bo različen od nič. $\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$. Funkcionalne determinante pa so: $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}$; $\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$; $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$.
Vsaj ena od funkcionalnih determinant mora biti različna od nič.

1.6 Normala na ploskev

Ploskev naj bo analitično podana v vektorski obliki $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$. Vzemimo poljubno izbrano točko *T(u,v)* in skozi njo potegnimo poljubno krivuljo, ki leži na dani ploskvi. Poiščimo na to krivuljo tangento v točki *T*. Krivulja, ki leži na ploskvi, je analitično podana tako, da sta *u* in *v* neki zvezni funkciji parametra *t*, torej je *u=u(t), v=v(t).* Enačba krivulje se glasi v vektorski obliki $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))=\vec{r}(t)$.
Vektor na tangenti krivulje dobimo če odvajamo vektor $\vec{r}$ na parameter *t*, torej $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}=\vec{r}_u\dot{u}+\vec{r}_v\dot{v}$. Ravnino, ki jo določata vektorja $\vec{r}_u u$, ___ $\vec{r}_v v$ imenujemo tangentna ravnina na ploskev v dotikališču *T*.
a) Enačba tangentne ravnine v vektorski obliki se glasi $(\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)=0$ ___ *ali* ___ $(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{r}_u,\vec{r}_v)=0$

b) Naj bo ploskev dana v eksplicitni obliki *z=z(x,y),* kjer je *z* odvedljiva funkcija obeh spremenljivk. Ploskev lahko v tem primeru zapišemo v vektorski obliki $\vec{r}=(x,y,z(x,y))=\vec{r}(x,y)$, spremenljivki *x,y* imata sedaj vlogo parametrov in

$\vec{r}_x = (1,0,p)$, $\vec{r}_y = (0,1,p)$, kjer je $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ in $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-p,-q,1)$. Enačba tangente ravnine se sedaj glasi $z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$.

c) Ploskev naj bo dana v implicitni obliki $F(x,y,z) = 0$. Iz nje naj se da določiti z kot funkcija ostalih dveh spremenljivk, torej $F(x,y,z(x,x)) = 0$. Po izračunanih parcialnih odvodih $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0$. Odtod dobimo $p = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}$ in $q = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$. Postavimo p in q v enačbo $z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$ in dobimo enačbo za tangentno ravnino za ploskve izraženo eksplicitno $(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

Vektor normale: premica ki gre skozi dotikališče tangentne ravnine na ploskev pravokotno na tangentno ravnino ne normala na ploskev. Produkt $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ ima očitno smer normale.

d) Če je ploskev dana explicitno (z=z(x,y)), je kar vektor (-p,-q,1) vektor na normali. Enačba premice normale pa je v tem primeru $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{-1}$, če pa je enačba dana implicitno, je enačba normale $\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}$. Enotni vektor normale se glasi $\vec{v} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$.

Ločni element ploskve: vzemimo poljubno krivuljo na tej ploskvi *u=u(t)* in *v=v(t)* in izračunajmo dolžino loka med dvema točkama na njej. Dobimo $\dot{s}^2 = (\vec{r}_u\dot{u} + \vec{r}_v\dot{v})(\vec{r}_u\dot{u} + \vec{r}_v\dot{v}) = \vec{r}_u\vec{r}_u\dot{u}^2 + 2\vec{r}_v\vec{r}_u\dot{v}\dot{u} + \vec{r}_v\vec{r}_v\dot{v}^2$. Vpeljimo potem te oznake $E = \vec{r}_u\vec{r}_u$, $F = \vec{r}_v\vec{r}_u$, $G = \vec{r}_v\vec{r}_v$. Potem je ločna dolžina krivulje med točkama, ki ju določata parameter t in t_0 enaka $s = \int_t^{t_0} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{v}\dot{u} + G\dot{v}^2}\,dt$. Od tod dobimo kvadrat ločnega diferenciala $ds = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2$. V teoriji imenujemo ploskev prva fundamentalna forma.

2. Mnogoterni integral

2.1 Integrali odvisni od parametra

Naj bo *f(x,y)* zvezna funkcija dveh spremenljivk *x,y*. Spremenljivka *x* leži na intervalu $[a,b]$, spremenljivka *y* pa na intervalu $[c,d]$. Funkcija f(x,y) je zvezno odvisna od vsake spremenljivke posebej in eksistira integral $\int_a^b f(x,y)dx$, kakršnekoli vrednosti in *y* na intervalu $[c,d]$. Ta integral je očitno funkcija spremenljivke *y* $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$. To spremenljivko imenujemo parameter. Tako imamo opravka z integralom , ki je odvisen od parametra.

IZREK: funkcija *F(y)* je zvezna funkcija.

IZREK: če je parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial y}=f_y$ zvezna funkcija parametra *y* na intervalu $[c,d]$, je funkcija tudi odvedljiva. Pravilo se glasi: če je integrand zvezno odvedljiva funkcija parametra , smemo integral odvajati na parameter tako, da odvajamo integrand.
Pravilo se nekoliko spremeni, če so tudi meje integrala odvisne od parametra. Naj bo $F(y)=\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$, kjer sta funkciji *u* in *v* zvezni in odvedljivi funkciji parametra *y*. to funkcijo tolmačimo v obliki $F(y)=G(y,v(y),u(y))$. Odvajamo na parameter *y* in dobimo $\frac{dF}{dy}=\frac{dG}{dy}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dy}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{dy}$. Integral razdelimo na dva dela, in sicer $F(y)=\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx=\int_{u(y)}^{d} f(x,y)dx+\int_{d}^{v(y)} f(x,y)dx=-\int_{d}^{u(y)} f(x,y)dx+\int_{d}^{v(y)} f(x,y)dx$.
Kjer je *u(y) < d < v(y).* Splošno pravilo za odvajanje integrala na parameter je: $\frac{dF}{dy}=\int_{u(y)}^{v(y)}\frac{\partial f}{\partial y}dx+f(v,y)\frac{dv}{dy}-f(u,y)\frac{du}{dy}$.

Izrek: vrstni red integriranja smemo zamenjati, če integriramo zvezno funkcijo dveh spremenljivk, torej $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

Definicija: integral $\int_b^\infty f(x,y)dx$ imenujemo enakomerno konvergenten na intervalu $[c,d]$, če pripada poljubnemu pozitivnemu številu ε tak zadosti velik *B*, da velja $\left|\int_b^\infty f(x,y)dx\right|<\varepsilon$ za vsak $b\geq B$, kjerkoli leži *y* na intervalu [c,d].

Izrek: če je integral $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ na intervalu $[c,d]$ enakomerno konvergenten je F(y) zvezna funkcija parametra *y*.

Izrek: naj bo integral $\int_a^{\infty} f(x,y)dx$ konvergenten za $y \in [c,d]$ in naj obstaja taka nenegativna funkcija $\varphi(x)$ da je $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$. Če je integral $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ konvergenten, potem je tudi integral $\int_a^{\infty} f(x,y)dx$ enakomerno konvergenten.

Izrek: če je integral $\int_a^{\infty} f(x,y)dx$ enakomerno konvergenten, smemo vrstni red integriranja zamenjati.

Izrek: naj bo integral $F(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$ konvergenten za vsak $y \in [c,d]$. Integrand f(x,y) je zvezna funkcija z zveznim odvodom $f_y(x,y)$. Dalje naj bo na istem intervalu enakomerno konvergenten tudi integral $G(y) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y} dx$. Potem velja $\frac{dF(y)}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^{\infty} f(x,y)dx = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$. Torej: integral z eno mejo v neskončnosti odvajamo na parameter tako, da odvajamo integrand na ta parameter. Če je dobljeni integral enakomerno konvergenten, je odvod prvotnega integrala.

2.2 Dvojni integral

Naj bo *f(x,y)* enolična funkcija dveh spremenljivk, definirana na območju *D* ravnine *(xy)*. To območje naj bo omejeno z eno samo krivuljo *C*, ki naj bo vsaj odsekoma gladka. Ploščino območja *D* zaznamujmo z Ω. Funkcija *f(x,y)* naj bo na vsem območju *D* z robnimi točkami vred zvezna. Vemo da vsaka zvezna funkcija dveh spremenljivk *z=f(x,y)* določa v prostoru neko ploskev *P*. Območje *D* predstavlja ravno projekcijo te ploskve na ravnino *(xy)*. Okrog krivulje *C* opišimo valj s tvorilkami, ki stoje pravokotno na ravnino *(xy)*. Ploskev *z=f(x,y)*, območje *D* in plašč tega valja, ki sega do ploskve omejuje neko telo. Koliko je prostornina takega telesa? Razdelimo območje *D* na veča manjših območij, ki jih imenujemo parcele in jih zaznamujemo $D_1, D_2, D_3, \ldots D_n$. Ploščino parcele zaznamujemo z ω_k, *k=1,2,3…n*. Tako je $\Omega = \omega_1 + \ldots + \omega_n$. V vsaki parceli D_k izberimo neko točko $T(x_k,y_k)$ in funkcijsko vrednost v tej točki pomnožimo s ploščino ω_k pripadajoče parcele, zatem pa vse produkte seštejmo. Tako dobimo vsoto $f(x_1,y_1)\omega_1 + \ldots.. + f(x_n,y_n)\omega_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\omega_k$.

Naj bo funkcija *f(x,y)* enolična in zvezna na območju *D*. Potem eksistira dvojni integral $\iint_D f(x,y)dxdy$. Dvojni integral je limita vsote $\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\omega_k$, kjer je ω_k ploščina *k-te* izmed parcel, na katere smo razdelili območje *D*, $f(x_k,y_k)$ je funkcijska vrednost poljubne točke v notranjosti ali na robu te parcele. Limito je treba napraviti tako, da gredo linearne razsežnosti vsake posamezne parcele proti nič. Vrednost limite je odvisna od načina kako delimo območje D.

Ocenimo dvojni integral. Vsota $f(x_1,y_1)\omega_1 + \ldots.. + f(x_n,y_n)\omega_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\omega_k$ leži med $m\Omega\_in\_M\Omega$, tako tudi v limiti velja $m\Omega \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M\Omega$. Odtod še sledi

$\iint_D f(x,y)dxdy = \mu\Omega$, kjer μ leži med *m* in *M*. če je *f(x,y)=1* dobimo $\iint_D dxdy = \Omega$ in dvojni integral je ploščina območja *D*. Če je območje *D* sestavljeno iz območij $D_1, D_2, D_3, \dots D_n$, ki se med seboj prekrivajo očitno velja $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \dots + \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$, prav tako sledi $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \dots + \iint_D g(x,y)dxdy$.

2.2.1 prevedba na dvakratni integral

Vzemimo, da imamo funkcijo *f(x,y)*, ki j produkt dveh funkcij, od katerih je prva samo funkcija spremenljivke *x*, druga pa spremenljivke *y*, torej $f(x,y) = g_1(x)g_2(y)$, območje *D* naj bo pravokotnik s stranicami, ki so vzporedne z osema *x* in *y*, in sicer $a \le x \le b, \_\_ c \le y \le d$. Intervala razdelimo na *n* pod intervalov, in sicer $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$. Parcele so sedaj majhni pravokotniki s stranicami $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, *k=1,2…n*. Ploščina vsake parcele je $\Delta y_k \Delta x_k$. Vsota pa se glasi $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} g_1(x_k)g_2(y_l)\Delta y_l \Delta x_k = \sum_k g_1(x_k)\Delta x_k \sum_l g_2(y_l)\Delta y_l$. Limita ko gredo posamezne razsežnosti posameznih pravokotnikov proti nič je po definiciji dvojnega in določenega integrala $\iint_D g_1(x)g_2(y)dxdy = \int_a^b g_1(x)dx \int_c^d g_2(y)dy$.

Dvojni integral izračunamo tako, da določeno integriramo integrand na eno spremenljivko, druga spremenljivka pa ostane konstanta. Pri tem morejo meje tega integrala biti odvisne še od druge spremenljivke. Dobljen izraz, ki je funkcija druge spremenljivke integriramo na to spremenljivko v konstantnih mejah. Tako je $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx$.

2.2.2 Uvedba novih spremenljivk

Naj bosta *x=x(u,v)* in *y=y(u,v)* funkciji dveh spremenljivk *u,v* na območju Δ. Vsaki točki *M(u,v)* na območju Δ v ravnini *(uv)* pripada po zgornjih enačbah ena točka *T(x,y)* v ravnini *(x,y)*. Ko *M* opiše vse območje Δ, pa točka *T* opiše neko območje *D*. Zveza med točkami območja Δ in *D* naj bo taka, da je vsaka točka *T* in *D* slika ene same točke *M* iz Δ- torej imejmo bijektivno preslikavo. To je mogoče tedaj, ko velja Jacobijeva determinanta $J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \ne 0$.

2.2.3 Posplošeni integral

Naj bo funkcija *f(x,y)* povsod na integracijskem območju *D* omejena razen v točki T_0. To točko izrežemo iz območja *D* z majhnim krogom s polmerom ε, označimo ga D_ε. Zunaj ploskvice D_ε je funkcija *f(x,y)* povsod omejena. Ta del območja zaznamujemo z $D', D' = D / D_\varepsilon$. Na tem območju ima povsod pomen integral $I' = \iint_{D'} f(x,y)dxdy$. Če eksistira limita tega integrala, ko gre $\varepsilon \to 0$, imenujemo to limito dvojni integral funkcije *f(x,y)* po celem območju *D*. Torej $\iint_{D'} f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D'} f(x,y)dxdy$. Podobno razmišljamo, če funkcija ni omejena v več točkah območja *D*, ali pa vzdolž kakšne krivulje na območju *D*.

2.2.4 Uporaba v geometriji

Prostornina: naj bo *z=f(x,y)* enolična in zvezna funkcija obeh spremenljivk na območju *D* in še $f(x,y) \geq 0$. Ta funkcija določa ploskev nad *D*. Ploskev, območje nad *D*, ki nastane, ko premica vzporedna z osjo z drsi okrog roba *D*, ograja neko telo. Prostornina *V* tega telesa je po definiciji dvojnega integrala enaka $V = \iint_D f(x,y)dxdy$. Naj bosta v prostoru dve ploskvi $z_1(x,y)$ in $z_2(x,y)$ in naj bo na primer $z_1 \leq z_2$ povsod nad območjem *D*, torej prva ploskev leži pod, potem je prostornina telesa, ki ga ograjata ti dve ploskvi, enaka $V = \iint_D [z_2(x,y) - z_1(x,y)]dxdy$.

Površina: ploskev naj bo dana z enačbo *z=z(x,y)* in funkcija *z(x,y)* naj bo enolična, zvezna in zvezno odvedljiva na območju *D*. Spet razdelimo *D* na manjše parcele s ploščinami ω_k, *k=1,2,3..n*. Na vsaki parceli izberimo točko $T(x_k, y_k)$ in izračunajmo $z_k = z(x_k, y_k)$. Sedaj v točki $T(x_k, y_k, z_k)$ položimo tangentno ravnino na ploskev. Stebrič, ki stoji pravokotno na ravnini *xy* nad parcelo s ploščino ω_k izreže iz tangente ravnine ploskvico s ploščino σ_k. Ta ploščina se tem manj razlikuje od površine ploskve, ki leži na parcelo ω_k, čim manjše so njene linearne razsežnosti. Pravokotna projekcija ploskvice σ_k na ravnino *xy* je ω_k. Če tangentna ravnina oklepa z ravnino *xy* kot γ, je $\omega_k = \sigma_k \cos\gamma$, oz. $\sigma_k = \frac{\omega_k}{\cos\gamma}$. Kot γ, je tudi kot, ki ga oklepa normala na ploskev z osjo z. Vemo da so komponente enotnega vektorja normale $\vec{v}$ prav smerni kosinusi. Tako je $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, kjer je $p = z_x(x,y); q = z_y(x,y)$. Vsota ploščin vseh ploskvic je $\sum_k \sigma_k = \sum_k \sqrt{1+z_x^2(x_k,y_k)+z_y^2(x_k,y_k)}$ in nadalje dobimo formulo za računanje površine ploskve $P = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$.

Naj bo ploskev podana v parametrični obliki $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, potem vemo, da je tretja komponenta enotnega vektorja normale kar $\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}$, formula za površino pa se glasi $P = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,dxdy$.

2.3 Trojni in mnogoteri integral

Trojni integral je podobno definiran kot dvojni. Vzemimo funkcijo *f(x,y,z),* ki je v delu prostora *xyz* enolična in zvezna. Ta del prostora zaznamujemo z *V*. Območje *V* razdelimo na manjše celice in naj bo v_k prostornina *k-te* izmed njih. V vsaki celici izberimo poljubno točko in pomnožimo funkcijsko vrednost z volumnom pripadajoče celice. Vse tako dobljene produkte seštejemo $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)v_k$. Ta vsota konvergira proti neki limiti, če le gredo linearne razsežnosti vseh posameznih celic proti nič, pri čemer je ni pomemben izbor točk, niti način delitve prostora na celice. To limito imenujemo trojni integral. Tako je $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)v_k$.

Kako dokažemo obstoj limite? Naj bo *m* natančna spodnja meja in *M* natančna zgornja meja funkcije *f(x,y,z)* na območju *V*, potem podobno kakor pri dvojnem integralu velja ocena $mV \le \iiint_V f(x,y,z)dxdyd \le MV$, kjer je volumen območja *V*. V primeru da je *f(x,y,z)=1* na območju *V*, je $\iiint_V dxdyd = V$. Trojni integral izračunamo tako da ga prevedemo na trojni integral. Postopek je popolnoma isti kot pri dvojnem integralu, dobimo pa $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dxdydz$. Vrstni red integriranja smemo obrniti.

Tudi tukaj lahko vpeljemo nove spremenljivke *(u,v,w)*, kjer mora tudi veljati Jacobijeva determinanta $J(u,v,w) \neq 0$.

2.4. Uporaba v mehaniki

Težišče: naj bo v točki T_1 masa m_1, v točki T_2 pa masa m_2. znano je, da težišče razdeli spojnici mas v obratnem sorazmerju, torej $\frac{\overline{T_1T}}{\overline{T_2T}} = \frac{m_2}{m_1}$, odtod sledi tudi $\frac{\overline{T_1T}}{\overline{T_2T}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ in $\frac{\overline{TT_2}}{\overline{T_2T_1}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$. Vzemimo v prostoru kakšen koordinatni sistem in problem poglejmo z vektorskega stališča. Naj bodo $\vec{r}_1$ in $\vec{r}_2$ ter $\vec{r}$ krajevni vektorji, ki segajo do obeh masnih točk in do težišča. Vektor $\vec{r}-\vec{r}_1$ leži na vektorju $\vec{r}_2-\vec{r}_1$, to je na spojnici in $\vec{r}-\vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$. Tu je λ sorazmernostni faktor – razmerje med dolžinami obeh vektorjev, torej $\lambda = \frac{m_2}{m_1+m_2}$. Odtod dobimo $\vec{r} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$. V danem koordinatnem sistemu sta točki T_1,T_2 dani s koordinatami $T_1(x_1,y_1,z_1)$ in $T_2(x_2,y_2,z_2)$ in koordinate težišča so $x = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$; $y = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$; $z = \frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}$. Če ugotovitev posplošimo na sistem *n-točk*, je težišče sistema določeno z enačbo $\vec{r} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$, kjer so lege posameznih točk določene s krajevnimi vektorji $\vec{r}_1,\dots\vec{r}_n$. Izraz v števcu imenujemo $\sum_{k=1}^{n} m_k$ statični moment sistema *n* točk.

Preidimo iz sistema diskretno porazdeljenih točk na poljubno telo, ki si ga predstavljamo razdeljenega na neskončno mnogo infinitezimalnih delcev. Maso delcev zaznamujemo z $d\mu$, lega delca naj bo določena s krajevnim vektorjem $\vec{r}$. Statični moment delca je $\vec{r}d\mu$ vsega telesa pa $\sum\vec{r}d\mu$ oziroma v limiti $\int\vec{r}d\mu$. Ker je masa telesa $M = \int d\mu$, je težišče določeno kot $\vec{\rho}=\dfrac{\int \vec{r}\,d\mu}{\int d\mu}=\dfrac{\int \vec{r}\,d\mu}{M}$. Zaznamujmo koordinate težišča s ξ, η, ς, potem se zgornja enačba po komponentah glasi $M\xi=\int x\,d\mu$; $M\eta=\int y\,d\mu$; $M\varsigma=\int z\,d\mu$. Element mase telesa je $d\mu=\sigma dV=\sigma dxdydz$, kjer je σ specifična gostota, ki se lahko v telesu od točke do točke spreminja. Zgornje integrale moramo razumeti kot trojne integrale, torej $M\vec{\rho}=\iiint_V \vec{r}\,\sigma dxdydz$ in $M=\iiint_V \sigma dxdydz$. Če je σ konstantna , je telo homogeno in prejšnje formule se poenostavijo.

Recimo da lahko zanemarimo eno dimenzijo, telo ima obliko tenke ploskve. Element mase je $d\mu=\sigma d\omega$, kjer je *dw* element površine. Težišče ploskve dobimo z enačbo $M\vec{\rho}=\iint \vec{r}\,\sigma d\omega$. Če je ploskev ravna plošča, ki leži na ravnini *xy*, dobimo koordinate težišča iz formul $M\xi=\iint \sigma x\,dxdy$, $M\eta=\iint \sigma y\,dxdy$. Zanemarimo dve dimenziji in telo ima obliko krivulje. Element mase $d\mu=\sigma ds$. Koordinate težišča se izražajo z enojnim integralom, in sicer $M\vec{\rho}=\int \vec{r}\,\sigma ds$, $M=\int \sigma ds$.

Vztrajnostni moment: določimo kinetično energijo masne točke z maso m, ki rotira okoli neke osi s hitrostjo $\vec{v}=\omega\vec{r}$, kjer je w kotna hitrost in $r=|\vec{r}|$ je razdalja masne točke od rotacijske osi. Kinetična energija, kot je znano, je $E=\dfrac{mv^2}{2}$. Za infinitezimalno majhen delec z maso $d\mu$ je kinetična energija enaka $\dfrac{\omega^2 r^2 d\mu}{2}$. Potem je kinetična energija celega telesa $E=\dfrac{1}{2}\omega^2\int r^2 d\mu$. Kotna hitrost *w* je namreč za vse delce ista in integral $\int r^2 d\mu$ je neodvisen od *w*. Integral $\int r^2 d\mu$ imenujemo vztrajnostni moment telesa glede na dano os.

Telo naj se vrti okrog osi z, potem je $r^2=x^2+y^2$. Vztrajnostni moment se v tem primeru glasi $J_z=\iiint \sigma(x^2+y^2)dxdydz$, tu je σ specifična gostota v točki s koordinatami *x*,*y*,*z*. Podobno je tudi če se dogaja okrog *x* ali *y* osi. $J_x=\iiint \sigma(y^2+z^2)dxdydz$; $J_y=\iiint \sigma(x^2+z^2)dxdydz$.

3. Vektorska analiza

Kadar je vsaki točki prostora prirejena vrednost neke količine, potem govorimo o polju te količine. Če je ta količina skalar, imamo skalarno polje, če je pa ta količina vektor, imamo vektorsko polje. Vrednost te količine podaja v prvem primeru skalarna, v drugem vektorska funkcija.

Skalarna funkcija *f* je enolična funkcija, ki je definirana na določenem območju *D* prostora. Njene vrednosti so realna števila. Torej $f: D \to R$.

Vrednost skalarne funkcije je odvisna le od lege točk in nič od izbora koordinatnega sistema.
Vrednosti vektorske funkcije $\vec{v}$, $\vec{v}: D \to R^3$ so vektorji.

Rekli smo da skalarna funkcija določa skalarno polje in vektorska funkcija vektorsko polje. V večini primerov je definicijsko območje *D* katerekoli funkcije krivulja, ploskev ali neki del prostora. Vpeljimo pravokotni koordinatni sistem, potem funkcijo *f* predstavimo v obliki *f(x,y,z),* ali *f(T),* kjer so *(x,y,z)* koordinate točke *T*.

Primeri skalarnega polja so na primer gostota telesa, temperatura telesa, elektrostatični potencial, itd…

Vektorsko funkcijo lahko zapišemo s kartezičnimi koordinatami v obliki $\vec{v}(T)=\vec{v}(x,y,z)=\vec{v}_1(x,y,z)\vec{i}+\vec{v}_2(x,y,z)\vec{j}+\vec{v}_3(x,y,z)\vec{k}$, kjer so $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ skalarne funkcije treh spremenljivk.
Primeri vektorskih polj so: polje sil, polje hitrosti, električna polja, magnetna polja, itd…

3.2 Gradient skalarnega polja

V prostoru naj bo izbran kartezični koordinatni sistem. Skalarno polje naj podaja skalarna funkcija *f(x,y,z)*. Velikokrat so vektorska in skalarna polja povezana. Primer take povezave je gradient.

Definicija: za dano skalarno funkcijo *f(x,y,z)* je gradient te funkcije, zaznamujmo grad *f*, vektorska funkcija definirana kot $gradF=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$. Vpeljimo še diferencialni operator, ki ga imenujemo nabla in označimo z $\vec{\nabla}$, ki se glasi $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, potem lahko zapišemo $gradf=\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$

Vemo, da prvi parcialno odvod funkcije *f(x,y,z)* pomenijo hitrost sprememb te funkcije v smereh koordinatnih osi. Seveda je nenaravno,da se omejimo le na tri smeri, zato se vprašamo, kako je s spreminjanjem funkcije v katerikoli izbrani smeri. Obravnavajmo odvod funkcije v dani smeri. Izberimo točko *P* v prostoru in smer iz te točke naj bo dana z enotnim vektorjem $\vec{b}$. S *C* zaznamujmo premico, na kateri leži $\vec{b}$ in *Q* naj bo točka na premici *C*. Razdalja $\overline{PQ}$ naj bo *s*. Poglejmo spremembo funkcije v točkah *Q* in *P* glede na razdaljo med njima. To je ravno diferenčni kvocient. Limita tega kvocienta, ko gre $s\to 0$, seveda, če obstaja, pripelje do odvoda $\lim_{s\to 0}\frac{f(Q)-f(P)}{s}=\frac{df}{ds}$. Torej je $\frac{df}{ds}$ hitrost spremembe funkcije *f* v točki *P* v smeri, ki jo določa enotni vektor $\vec{b}$. Naj bo $\vec{r}_0$ krajevni vektor do točke *P* in $\vec{r}$ do točke *Q*. Enačba premice *C* je dana v parametrični obliki, $C:\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}$. Enačbo premice *C* lahko zapišemo tudi v vektorski obliki $\vec{r}-\vec{r}_0=s\vec{b}$. Izračunajmo še $\frac{df}{ds}$ funkcije f(x(s),y(s),z(s)). Dobimo $\frac{df}{ds}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}$. Ta izraz je skalarni produkt vektorjev grad *f* in $\vec{r}\,`(s)$ in ga lahko zapišemo $\frac{df}{ds}=\vec{b}\,\mathrm{grad}\,f,|\vec{b}|=1$. Določimo še $\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r}\,`$, $\vec{r}\,`=x`\vec{i}+y`\vec{j}+z`\vec{k}=\vec{b}$. Iz vektorskega zapisa premice dobimo $\vec{r}\,`=\vec{b}$.
Če grad *f* ni ničelni vektor, potem kaže v smer, kateri se polje najhitreje spreminja, njegova absolutna vrednost je absolutna vrednost odvoda polja v tej smeri. Poglejmo še eno geometrijsko karakterizacijo gradienta. Ploskev *S* v prostoru naj bo podana kot *f(x,y,z)=c*. Ko konstanta *c* zavzame poljubne vrednosti, dobimo družino ploskev. Krivuljo *C* v prostoru predstavimo v vektorski obliki $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Če želimo, da krivulja leži na ploskvi *S*, mora biti $f(x(t),y(t),z(t))=c$. Odvajajmo na *t* in imamo $\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}=\mathrm{grad}f\dot{\vec{r}}=0$. Vemo da ima $\dot{\vec{r}}$ smer tangente na krivuljo *C*. Vse tangente na krivulje, ki gredo skozi točko *T* na ploskvi *S* sestavljajo tangentno ravnino. Premica skozi točko *T*, ki je pravokotna na tangentno ravnino, je normala na ploskev *S* v točki *T*. Lahko zapišemo: gradient ima smer normale na ploskev *S* v točki *T*.
Naj bo skalarno polje odvisno le od razdalje točke *T* od koordinatnega izhodišča. Tedaj je *u=f(r)*, kjer je $\vec{r}$ krajevni vektor in $r=|\vec{r}|$. Taka polja imenujemo *centralna polja*. Krogle s

središčem v koordinatnem izhodišču so tako-imenovane nivojske ploskve. Izračunajmo *grad**u***. Ker je $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dobimo $\frac{\partial u}{\partial x}=f`(r)\frac{x}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=f`(r)\frac{y}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=f`(r)\frac{z}{r}$. Tako je $grad f(r)=f`(r)\frac{\vec{r}}{r}$. V fiziki so znana vektorska polja, ki jih določajo vektorske funkcije, ki so nastale kot gradient skalarnih funkcij. Tako kot skalarno funkcijo imenujemo potencialno funkcijo ali potencial ustreznega vektorskega polja.

Laplacova enačba, je zelo pomembna parcialna diferencialna enačba. Laplaceovo enačbo lahko zapišemo kot $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$ oziroma lahko tudi $\Delta f=0$ in imenujemo Δ Laplacov operator. Formalno ga lahko predstavimo kot skalarni produkt diferencialnega operatorja nable ∇ samega seboj. $\nabla\nabla=\nabla^2=\Delta$. Torej $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\Delta$. Tako lahko laplaceovo enačbo lahko zapišemo kot $\Delta f=0$.

3.3 Divergenca vektorskega polja

Definicija: naj bo $\vec{v}(x,y,z)$ odvedljiva vektorska funkcija *x,y,z* kartezične koordinate v prostoru in $v_1(x,y,z)$, $v_2(x,y,z)$, $v_3(x,y,z)$ komponente vektorja $\vec{v}$. Funkcija $div\vec{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$ je divergenca vektorskega polja definirana z vektorsko funkcijo $\vec{v}$. Druga pogosta oznaka divergence je z uporabo operatorja *nable*, $div\vec{v}=\nabla\vec{v}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})(v_1,v_2,v_3)=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$. Divergenca je skalarna funkcija, to pomeni, da so vrednosti $div\vec{v}$ odvisne le od točk in vektorja $\vec{v}$ v prostoru in nič od izbire koordinatnega sistema.

Naj bo f(x,y,z) dvakrat odvedljiva skalarna funkcija. Zanjo obstaja $grad f=\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$, ki je vektorska funkcija in po prej omenjenem pravilu o divergenci imamo $div(grad f)=\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Vektorsko polje $\vec{v}$, katerega divergenca je povsod identično enaka nič $div\vec{v}\equiv 0$ imenujemo *solenoidalno* polje. Kot pomembna *solenoidalna* polja navedimo hitrostno polje nestisljive tekočine, gravitacijsko polje, elektrostatično polje…

Naj bo *f(x,y,z)* odvedljiva skalarna funkcija, $\vec{v}(x,y,z)$ odvedljiva vektorska funkcija in pokažimo tole zvezo $div(f\vec{v})=f div\vec{v}+\vec{v}grad f$. Po definiciji divergence je

$$div(f\vec{v})=\frac{\partial(fv_1)}{\partial x}+\frac{\partial(fv_2)}{\partial y}+\frac{\partial(v_3)}{\partial z}=f\frac{\partial v_1}{\partial x}+f\frac{\partial v_2}{\partial y}+f\frac{\partial v_3}{\partial z}+v_1\frac{\partial f}{\partial x}+v_2\frac{\partial f}{\partial y}+v_3\frac{\partial f}{\partial z}=f div\vec{v}+\vec{v}grad f$$

Iz definicije sledita direktno povezavi $div(\vec{u}+\vec{v})=div\vec{u}+div\vec{v}$ $div(\lambda\vec{v})=\lambda div\vec{v},\lambda=konst$;

Ko upoštevamo še relacijo $div(f\vec{v}) = f div\vec{v} + \vec{v} grad f$, dobimo naslednji zvezi za skalarni funkciji f in g: $div(f\nabla g) = f\Delta g + \nabla f \nabla g$; $div(f\nabla g) - div(g\nabla f) = f\Delta g - g\nabla f$.

3.4 Rotor vektorskega polja

Pravkar obravnavano divergenco smo formalno definirali kot skalarni produkt operatorja nable z vektorsko funkcijo $\vec{v}$, sedaj napravimo še vektorski produkt nable z vektorjem $\vec{v}$.

Definicija: naj bodo *x,y,z* kartezične koordinate v prostoru in $\vec{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ odvedljiva vektorska funkcija. Funkcijo $\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = rot\vec{v}$ imenujemo rotor vektorskega polja definiranega z vektorsko funkcijo $\vec{v} = (x,y,z)$. Seveda je $rot\vec{v}$ vektor.

Oglejmo si neke diferencialne operacije drugega reda. Zahtevati moramo le, da so ustrezne funkcije dovoljkrat odvedljive. Za poljubno skalarno dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo *f* velja $rot(grad f) = \vec{0}$. To sledi neposredno iz lastnosti determinant. Formalno se lahko o tem prepričamo, če zapišemo izraz z vektorjem nabla. Potem je $rot(grad f) = \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f = \vec{0}$. Če je vektorska funkcija gradient skalarne funkcije, je rotor ničelni vektor.

Neko vektorsko polje je potencialno če je v vsaki točki tega polja $rot(\vec{v}) = \vec{0}$. Oglejmo si še nekatere zveze med vpeljanimi diferencialnimi operacijami. Te so potrebne pri opisovanju raznih elektrotehničnih pojavov. Če je vektorska funkcija rotor druge vektorske funkcije, je njena divergenca enaka nič. Torej $div(rot(\vec{v})) = \vec{0}$. To zopet sledi iz lastnosti determinant, saj je mešani produkt treh vektorjev tri-vrstna determinanta in $\nabla(\nabla \times \vec{v}) = (\nabla, \nabla, \vec{v}) = 0$.
Precej pomembna je zveza $rot(f\vec{v}) = grad(f \times \vec{v}) + (f) rot(\vec{v})$.
Do te zveze pridemo po definiciji rotorja, kar je precej zamudno. Upoštevajmo diferencialni operator nabla in odvajajmo $f\vec{v}$ kot produkt, le da je množenje vektorsko. Torej $\nabla \times (f\vec{v}) = \nabla f \times \vec{v} + f \nabla \times \vec{v}$. Vemo da je ∇f gradient funkcije f in $\nabla \times \vec{v}$ pa rotor vektorske funkcije in imamo zgornjo zvezo.
Pokažimo še zvezo $rot(rot(\vec{v})) = grad(div(\vec{v})) - \Delta\vec{v}$. Pomagamo si z obrazcem, ki pove kako vektorsko množimo tri vektorje, spoznali smo ga pri matematiki 2 in se glasi: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$
Tako imamo
$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = (\nabla\vec{v})\nabla - (\nabla\nabla)\vec{v} = \nabla(\nabla\vec{v}) - \Delta\vec{v} = grad(div\vec{v}) - \Delta\vec{v}$.

3.5 Transformacija Laplaceove enačbe

Str .80-81 vse

4. Krivuljni in ploskovni integral

4.1 Krivuljni integral

Pojem krivuljnega integrala je naravna posplošitev določenega integrala, zato krivuljni integral podobno definiramo kot določeni integral. Pri krivuljnem integralu integriramo vzdolž neke krivulje v prostoru ali ravnini.

Imejmo neko krivuljo *C* v prostoru in jo najprej orientirajmo, kajti vzdolž vsake krivulje potekate dve smeri. Izberimo eno od njih, ki jo imenujemo pozitivna smer, drugo pa negativna smer. Če je krivulja podana parametrično, je pozitivna smer običajno tista, ki ustreza smeri naraščanja parametra. Krivuljo predstavimo v parametrični obliki $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, $a \le s \le b$, oziroma po izbiri koordinatnega sistema v vektorski obliki $\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$; $a \le s \le b$. Naj bo *s* naravni parameter in naj torej pomeni ločno dolžino krivulje *C* z začetno točko *A (s=a)* in končno točko *B (s=b).* Privzemimo, da je $\vec{r}(s)$ zvezna, zvezno odvedljiva in od nič različna funkcija za vse *s*, ki pridejo v poštev. Potem ima krivulja *C* enolično določeno tangento v vsaki točki. Krivuljo, ki ustreza tem zahtevam, bomo imenovali gladka krivulja. Naj bo *f(x,y,z)* dana funkcija, ki je definirana v vsaki točki krivulje *C* in je zvezna funkcija parametra *s*. Namesto $f(x(s), y(s), z(s))$ lahko pišemo *f(P),* kjer ima točka *P* koordinate $(x(s), y(s), z(s))$. Razdelimo krivuljo *C* na poljuben način na *n* delov $P_0 = A, P_1 ....P_{n-1}, P_n = B$, pri tem naj bodo ustrezne vrednosti parametrov $s_0 = a < s_1 < s_2 < ... < s_{n-1} < s_n = b$. Na vsakem delu izberemo poljubno točko $Qm; m = 1,2,3...n$. Sestavimo vsoto $J_n = \sum_{m=1}^{n} f(Q_m)\Delta s_m$, kjer je $\Delta s_m = s_m - s_{m-1}$. To napravimo za vsak *n* na poljuben način, vendar tako, da gre največji Δs_m z naraščajočim *n* proti nič. Dobimo zaporedje realnih števil $J_1, J_2, J_3 \dots$ limito tega zaporedja, če obstaja ne glede na način delitve in izbora točk imenujemo krivuljni integral vzdolž krivulje *C* in ga zaznamujemo $\int_C f(P)ds \_\_ ali \_\_ \int_C f(x,y,z)ds$. Ta integral imenujemo tudi integral prve vrste.

Lastnosti določenega integrala veljajo tudi za krivuljni integral. Naštejmo nekatere. $\int_C kf(s)ds = k\int_C f(s)ds$; $\int_C (f+g)ds = \int_C fds + \int_C gds$; $\int_C fds = \int_{C1} fds + \int_{C2} fds$, kjer je krivulja

C sestavljena iz krivulj C_1 in C_2. Odtod sledi, da se zadnja dva integrala, kjer je C_2 ista krivulja kot C_1, le da spremenimo smer integriranja razlikujeta le za predznak. V primerih, ko je krivulja C podana s splošnim parametrom $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$; $t_0 \le t \le t_1$, vpeljemo novo spremenljivko *s=s(t),* kjer je *s* ločna dolžina. Tako je $\int_a^b f(x,y,z)ds=\int_{t0}^{t1} f(x(t),y(t),z(t))\dot{s}dt$.

Imejmo vektorsko funkcijo $v(x,y,z)=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$, kjer so $v_1 v_2 v_3$ skalarne funkcije spremenljivk *x,y,z.* zapišimo $v_1dx+v_2dy+v_3dz=(v_1\frac{dx}{ds}+v_2\frac{dy}{ds}+v_3\frac{dz}{ds})ds$.
V oklepaju imamo skalarni produkt vektorja $v(x,y,z)$ z enotnim vektorjem na krivuljo *C*, saj je ta $\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{i}\frac{dx}{ds}+\vec{j}\frac{dy}{ds}+\vec{k}\frac{dz}{ds}$, kjer $\vec{r}(s)$ predstavlja pot *C*. Tako dobimo $\int_C(v_1dx+v_2dy+v_3dz)=\int_C\vec{v}\frac{d\vec{r}}{ds}ds=\int_C\vec{v}d\vec{r}$ in izraz imenujemo krivuljni integral vektorskega polja $\vec{v}$ vzdolž krivulje *C*, ali tudi *krivuljni integral 2. vrste*. Če je krivulja *C* sklenjena, uporabljamo izraz cirkulacija polja $\vec{v}$ vzdolž krivulje C in oznako $\oint_C\vec{v}d\vec{r}$.

4.1.1 Greenova formula

Dvojni integral na območjem v ravnini *xy* lahko prevedemo v krivuljni integral vzdolž roba tega integracijskega območja in obratno. Taka transformacija je tako teoretično kot tudi praktično pomembna.

Izrek: (greenova formula) Naj bo *D* zaprto, omejeno območje v ravnini *xy*. Rob tega območja *C* naj sestoji iz končno mnogih gladkih krivulj. Dalje naj bosta *f(x,y)* in *g(x,y)* funkciji ki sta zvezni in imata zvezen prvi parcialni odvod in sicer $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$ povsod na območju, ki je vsebovano v *D*. Potem velja $\iint_C(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy=\oint_C(fdx-gdy)$. Integriramo po robu *C* v pozitivnem smislu, to je tako, da je polje *D* vedno na levi strani.

Z *greenovo formulo* lahko določamo ploščino ravninskih polj. Postavimo v formulo $\iint_C(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy=\oint_C(fdx-gdy)$, da je *f=0* in *g=x*. dobimo $P=\iint_D dxdy=\int_C xdy$.
Integral na desni je ravno ploščina integracijskega območja *D*. sedaj postavimo v pred prejšnjo formulo *f=-y* in *g=0*, potem dobimo $P=\iint_D dxdy=-\int_C ydx$. Seštejmo oba izraza in dobimo formulo za računanje ploščine likov v ravnini *(xy)*, torej $P=\frac{1}{2}\oint_C(xdy-ydx)$.

4.1.2 Neodvisnost krivuljnega integrala od poti

Definicija: krivuljni integral $\int_C(fdx+gdy+hdz)$, kjer so *f,g,h* zvezne funkcije je neodvisen od poti med dvema točkama *P* in *Q* na območju *D*, na katerem ti dve točki ležita, če dobimo pri integraciji vzdolž poljubnih odsekoma gladkih krivulj s tega področja *D*, s skupno začetno točko *P* in s skupno končno točko *Q*, vedno isto vrednost. V takem primeru je integral odvisen le od lege začetne in končne točke in ne od oblike poti, ki veže točki.

Definicija: za izraz ***fdx+gdy+hdz*** pravimo da je eksakten izraz, če je enak diferencialu $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$ odvedljive funkcije *u(x,y,z)* kjerkoli na območju *D*.
Izraz *fdx+gdy+hdz* je eksakten natanko takrat, če eksistira taka funkcija *u(x,y,z)* definirana in odvedljiva na *D*, da je $f = \frac{\partial u}{\partial x}$ $g = \frac{\partial u}{\partial y}$ $h = \frac{\partial u}{\partial z}$, ali drugače povedano, prej omenjeni izraz je eksakten če je vektor $\vec{v} = f\vec{i} + g\vec{j} + h\vec{k}$ gradient odvedljive funkcije *u(x,y,z)* na območju *D*, torej $\vec{v} = GRADu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.
Izrek: naj bodo f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z) zvezne funkcije na območju *D*. Potem je krivuljni integral $\int_C (fdx + gdy + hdz) = \int_C \vec{v}d\vec{r}$ neodvisen od poti na območju *D* natanko takrat, če je izraz pod integralom eksakten na območju *D*.

Izrek: naj bodo *f,g,h* zvezne funkcije na območju *D* v prostoru. Krivuljni integral $\int_C (fdx + gdy + hdz)$ je neodvisen od poti na območju *D* tedaj in le tedaj, če je enak nič na vsaki enostavno sklenjeni poti na območju *D*.

Izrek: naj bodo *f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)* zvezne funkcije z zveznimi prvimi odvodi na območju *D*. Če je krivuljni integral $K = \int_C (fdx + gdy + hdz)$ neodvisen od poti na območju *D*, potem je $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, ali v vektorskem jeziku $rot\vec{v} = 0$, $\vec{v} = (f, g, h)$. Velja tudi obratno: če je polje *D* enostavno povezano in velja relacija $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, je krivuljni integral neodvisen od poti.

4.2 Ploskovni integral

Ploskovni integral je posplošitev dvojnega integrala. Ploskovni integral definiramo popolnoma analogno kot dvojni integral. Naj bo *S* gladka ploskev, torej ima v vsaki točki eno samo tangencialno ravnino. Na ploskvi *S* razlikujemo dve strani in naj ne bo mogoče priti iz ene strani na drugo stran, ne da bi prekoračili rob ploskve. Ko izberemo eno stran ploskve, smo ploskev orientirali. Na ploskvi naj bo definirana zvezna skalarna funkcija *f(x,y,z)=f(P).* ploskev S razdelimo na manjše ploskvice $S_1, S_2 \ldots S_n$ s površinami $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \ldots .\Delta\omega_n$. Na vsaki ploskvici S_k, *k=1,2,….,n,* izberimo poljubno točko P_k in sestavimo vsoto $J_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k$. Tako dobimo zaporedje $J_1, J_2, \ldots$. Naj gre $n \to \infty$ in naj gredo vse površine $\Delta\omega_k$ proti nič. Če ima zaporedje J_1, $J_2, \ldots$ limito, ki ni odvisna od razdelitve ploskve *S* in od izbire točk P_k na ploskvicah, jo imenujemo ploskovni integral, tudi ploskovni integral 1. vrste. Torej $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta\omega_k = \iint_S f(x, y, z)d\omega$.
Ploskovni integral računamo tako da ga prevedemo na dvojnega. Naj bo ploskev *S* podana v parametrični obliki z vektorsko funkcijo $\vec{r}(u, v)$. Potem je element površine v

$d\omega = \sqrt{EG - F^2}\,dudv$ kjer so $E = \vec{r}_u \vec{r}_u$, $F = \vec{r}_v \vec{r}_u$, $G = \vec{r}_v \vec{r}_v$ in imamo $\iint_S f(x,y,z)\,d\omega = \iint_D f[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\sqrt{EG - F^2}\,dudv$, kjer je D območje, ki ustreza ploskvi S v ravnini (uv). Če je ploskev S dana v eksplicitni obliki $z=g(x,y)$, dobimo $\iint_S f(x,y,z)\,d\omega = \iint_{\bar{S}} f[x,y,g(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = \iint_{\bar{S}} f[x,y,g(x,y)]\frac{dxdy}{\cos\gamma}$, *gama* je kot, ki ga oklepa normala na ploskev s pozitivno smerjo osi z. Element površine je pozitiven, zato je povsod $\cos\gamma \geq 0$ in *gama* je oster kot. $\bar{S}$ pomeni ortogonalno projekcijo ploskve S na ravnino *(xy)*. Imamo orientirano ploskev S in v vsaki točki ploskve lahko postavimo normalo. Vektorska enota normale $\vec{\nu}$ naj bo usmerjena tako, da z njenega vrha visimo izbrano smer ploskve. S tem je tudi vektor $\vec{\nu}$ v vsaki točki določen. Komponente vektorja $\vec{\nu}$ so smerni kosinusi normale, torej $\vec{\nu} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$, kjer so α, β, γ koti, ki jih vektor normale oklepa s pozitivnimi smermi osi *x,y,z*.

Naslednji integral imenujemo ploskovni integral vektorskega polja $\vec{v}$ po ploskvi S, (ploskovni integral 2. vrste): $\iint_S (u_1 dydz + u_2 dxdz + u_3 dydx) = \iint_S (u_1\cos\alpha + u_2\cos\beta + u_3\cos\gamma)\,d\omega = \iint_S \vec{u}\vec{v}\,d\omega$. Zapisani integral imenujemo tudi pretok vektorja v skozi ploskev S.

Pretok polja $\vec{u}$ lahko računamo tudi takole

$$P = \iint_S \vec{u}\vec{v}\,d\omega = \iint_S (u_1 dydz + u_2 dxdz + u_3 dydx) = \pm\iint_S \vec{u}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,dudv = \pm\iint_S \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv$$

. Če pa je ploskev dana eksplicitno *z=z(x,y)* velja

$$P = \iint_S \vec{u}\vec{v}\,d\omega = \pm\iint_S \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} dxdy = \pm\iint_S (-u_1 p - u_2 q + u_3)\,dxdy\,.$$

Še nekaj primerov uporabe ploskovnih integralov:

Maso M ploskve S s površinsko gostoto ρ določimo tako $M = \iint_S \rho\,d\omega$. Koordinate težišča se glase $\xi = \frac{1}{M}\iint_S x\rho\,d\omega$ $\eta = \frac{1}{M}\iint_S y\rho\,d\omega$ $\varsigma = \frac{1}{M}\iint_S z\rho\,d\omega$ in vztrajnostni moment okoli osi L $J = \iint_S \rho r^2\,d\omega$, tu je r^2 razdalja točke s *koordinatami x,y,z* od osi L.

4.2.1 Gaussov izrek

Ta izrek povezuje trojni integral s ploskovnim integralom. Trojni integral divergence odvedljive vektorske funkcije $\vec{v}(x,y,z)$, definirane na danem prostorskem območju V, prevedemo s pomočjo *Gaussovega* izreka na ploskovni integral normalne komponente vektorja $\vec{v}$ nad sklenjeno ploskvijo S, ki ograjuje območje V.

Formule za ploskovni integral po vsej mejni ploskvi S, so $\vec{v}(x,y,z)$

$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial z}dxdydz = \iint_S v_3\cos\gamma\,d\omega \quad \iiint_V \frac{\partial v_2}{\partial y}dxdydz = \iint_S v_2\cos\beta\,d\omega \quad \iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x}dxdydz = \iint_S v_1\cos\alpha$$

. Seštejmo te enačbe in upoštevajmo lastnosti trojnega integrala in ploskovnega, tako dobimo

$\iiint\limits_V (\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}) dxdydz = \iint\limits_S (v_1 dydz + v_2 dzdx + v_3 dxdy)$. Ker so v_1, v_2, v_3 komponente vektorskega polja $\vec{v}$, se Gaussova formula glasi $\iiint\limits_V (div\vec{v}) dxdydz = \iint\limits_S \vec{u}\vec{v} d\omega$ ploskovni integral je po zaključeni ploskvi S.

Izrek: pretok vektorskega polja $\vec{v}$ skozi zaključeno ploskev S je enak prostorskemu integralu divergence tega polja po območju V, ki ga ploskev S ograja.

Z gaussovim izrekom lahko izračunamo tudi prostornino danega telesa. In sicer dobimo $3\iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_S \vec{r}\vec{v} d\omega$ in odtod $V = \frac{1}{3}\iint\limits_S \vec{r}\vec{v} d\omega$, kjer je S sklenjena ploskev, ki ograja telo V.

4.2.2 Stokesov izrek

Ta izrek nam daje povezavo med ploskovnim in krivuljnim integralom.

Izrek: krivuljni integral tangencialne komponente vektorja $\vec{v}$ po zaključeni krivulji C, je enak ploskovnemu integralu normalne komponente vektorja $\vec{v}$ nad ploskvijo S, ki je razpeta nad krivuljo C. $\iint\limits_S (rot\vec{v})_n d\omega = \oint\limits_C v_t ds$ ali $\iint\limits_S (rot\vec{v}\vec{n}) d\omega = \oint\limits_C \vec{v} d\vec{r}$. Formule Stokesovega izreka za vsako komponento posebej: $\iint\limits_S (\frac{\partial v_1}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial v_1}{\partial y}\cos\gamma) d\omega = \int\limits_C v_1 dx$, $\iint\limits_S (\frac{\partial v_3}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial v_3}{\partial x}\cos\beta) d\omega = \int\limits_C v_3 dz$, $\iint\limits_S (\frac{\partial v_2}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial v_2}{\partial z}\cos\alpha) d\omega = \int\limits_C v_2 dy$.

5. Kompleksna analiza

5.1 Kompleksna funkcija

Naj bosta $z=x+iy$ in $w=u+iv$ dve kompleksni spremenljivki. Za vsako vrednost **z** naj bo na nekem področju dana ena ali več vrednosti *w*, potem pravimo da je *w* funkcija kompleksne spremenljivke *z*, torej $w=f(z)$. Vsako funkcijo $w=f(z)$ lahko zapišemo v obliki $w=u(x,y)+iv(x,y)$, kjer sta $v(x,y)$ in $u(x,y)$ realni funkciji dveh spremenljivk.

Definicija: okolico ε točke z_0 ali ε - okolico sestavljajo vse tiste točke z, za katere vemo da velja $|z-z_0|<\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Definicija: naj bo *f(z)* enolična funkcija spremenljivke *z* definirana v okolici točke z_0 in w_0 neka kompleksna konstanta. Če za neki $\varepsilon>0$ eksistira pozitivno število $\delta(\varepsilon)$, da je $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ za vse z, za katera velja $|z-z_0|<\delta(\varepsilon)$, potem w_0 imenujemo limito funkcije f(z), ko se približuje z proti z_0.

Definicija: funkcija *f(z)* je zvezna v točki *f(z)*, ko se približuje z_0, če je $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Če je *f(z)* zvezna v vsaki točki svojega definicijskega območja, je zvezna na vsem območju.

Izrek: vsote, razlike, produkti in kvocienti zveznih funkcij v točki z_0, so zvezne funkcije v tej točki, pri kvocientu mora biti delitelj v tej točki od nič različna funkcija $f(z_0)\neq 0$.

Izrek: zvezna funkcija zvezne funkcije je zvezna.

Izrek: potreben in zadosten pogoj, da je $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ zvezna funkcija je, da sta realni funkciji $v(x,y)$ in $u(x,y)$ zvezni.

Izrek: če je *f(z)* zvezna v točki z_0 in $f(z_0)\neq 0$, potem obstaja obstaja okolica točke z_0, zaznamujemo jo O_{z_0}, da je $f(z_0)\neq 0$ za vsak $z\in O_{z_0}$.

Izrek: če je *f(z)* zvezna na omejenem območju *D*, potem obstaja pozitivna konstanta *M*, da je $|f(z)|<M$ za vse $z\in D$

5.2 Analitična funkcija

Definicija: odvod funkcije $w=f(z)$ v točki z je enak $\frac{dw}{dz}=w' = f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

Za odvajanje veljajo ista pravila, kot pri funkcijah realne spremenljivke. Torej $\frac{d(w_1\pm w_2)}{dz}=\frac{dw_1}{dz}\pm\frac{dw_2}{dz}$, $\frac{d(w_1w_2)}{dz}=w_1w_2'+w_1'w_2$, $\frac{d(w_1/w_2)}{dz}=\frac{w_1'w_2-w_1w_2'}{w_2^2}$, $\frac{dw^n}{dz}=nw^{n-1}\frac{dw}{dz}$.

Za eksistenco odvoda funkcije f(z) je potrebno, da je limita izraza $\frac{dw}{dz}=w' = f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ vedno ista, ne glede, kako se Δz približuje ničli.

Definicija: za funkcijo $w=f(z)$ pravimo, da je analitična v točki $z=z_0$, če je tu definirana in ima odvod v vsaki točki okolice z_0. Točka z_0 je regularna točka funkcije *f*. Pravimo, da je funkcija analitična na področju *D*, če je analitična v vsaki točki tega področja.
Če f(z) ni analitična $z=z_0$, a je analitična v vsaki točki okolice z_0, potem je z_0 singularna točka funkcije *f*.

Izrek: če sta *u* in *v* realni enolični funkciji spremenljivk *x* in *y*, ki sta skupaj s prvimi parcialnimi odvodi zvezni povsod na področju *D*, potem je izpolnitev *Cauchy-Riemannovih* enačb $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ potreben in zadosten pogoj, da je $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ analitična funkcija. V tem primeru je odvod funkcije *f(z)* dan na primer z enim od izrazov $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$, $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$.
Izrek: če je funkcija *f(z)* pri $z=z_0$ analitična, je tudi zvezna.
Opomba: Cauchy-Riemannovi enačbi v polarni obliki, ko je $z=x+iy=r(\cos\phi+i\sin\phi)$ in $f(z)=u(r,\phi)+iv(r,\phi)$ se glasita $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}$, $\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}$.

5.3 Elementarne kompleksne funkcije

Iz rešitve diferencialne enačbe na strni 127. smo skonstruirali funkcijo e^z, ki se glasi $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$. Odtod sledi tudi znani polarni ali trigonometrični zapis kompleksnega števila $z=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)=|z|e^{i\phi}$, oz. če je $|z|=r=1$ pa $e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi\_;\_e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$.
Eksponentna funkcija je periodična in sicer ima imaginarno periodo $2\pi i$. Zato za vsako pozitivno ali negativno celo število *n* velja $e^{z+2n\pi i}=e^z$ za $z\in C$.

Trigonometrične funkcije kompleksne spremenljivke. Določimo jih iz $e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi\_;\_e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$ → $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ in $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Odtod hitro fast sledijo še ostale zveze (dovod sin,cos, adicijski…)

Izpeljimo še funkcijo *f(z)=cosz* izraženo z *x* in *y*:
$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$
$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y-i\cos x\sinh y$
hiperbolični kosinus in sinus za kompleksno spremenljivko sta definirana kot $\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\sin z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$. Ker se dosedanje funkcije izražajo z eksponentno funkcijo e^z, so kot ta funkcija, analitične na vsej ravnini *C*.
Logaritem kompleksne vrednosti. Naj bo $0<\phi<2\pi$ potem imamo $\ln z=\ln|z|+i(\phi+2n\pi)$ za $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Logaritemska funkcija je neskončna vrednostna (neskončno lična). Če je *n=0*, govorimo o glavni vrednosti logaritma.

Potenca kompleksne spremenljivke je podana takole $z^\alpha=e^{\alpha\ln z},\alpha\in C$.

5.4 Integracija v kompleksni ravnini

Naj bo $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ zvezna kompleksna funkcija (ni nujno da je analitična), definirana vzdolž gladke krivulje *C* ($C: z(t)=x(t)+iy(t)$). Krivulja *C* naj bo končne dolžine in naj povezuje točki *A* in *B*. razdelimo krivuljo *C* na *n* delov s točkami $z_k; k=1,2,3....n$. Na vsakem delu, ki ga zaznamujemo z Δz_k, izberemo poljubno točko $\varsigma_k=\xi_k+i\eta_k$ in sestavimo vsoto $\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k$. Limito ko gre $n\to\infty$, pri tem gre dolžina vsakega dela $\Delta z_k \to 0$ imenujemo krivuljni integral funkcije f(z) vzdolž krivlulje *C*, torej $\int_C f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k$. Če točki *A* in *B* sovpadata, imamo sklenjeno krivuljo in integral zapišemo kot $\oint f(z)dz$. Integral v kompleksni ravnini, kot poznamo pri reševanju krivuljnih integralov v realnem, lahko rešimo s parametrizacijo. Tako je $\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt \_\_\_\_\_ a\le t\le b$. Tu za *t=a* in *t=b* dobimo ravno začetno točko *A* in končno točko *B* krivulje *C*. V primeru da je funkcija *f(z)* zvezna na področju *D* in funkcija *F(z)* analitična na *D* in taka, da je $F'(z)=f(z)$, potem za vsako gladko krivuljo *C* na področju *D*, ki povezuje točki z_0 in z_1 na področju *D* velja $\int_{z0}^{z1} f(z)dz=F(z1)-F(z0)$, odtod še sledi da v primeru sklenjene krivulje $\oint f(z)dz=0$.

Iz nekaterih lastnosti realnih integralov slede tele lastnosti:

$$\int_A^B f(z)dz=-\int_B^A f(z)dz$$
$$\int_A^B kf(z)dz=-k\int_A^B f(z)dz$$
$$\int_A^B [f(z)\pm g(z)]dz=\int_A^B f(z)dz\pm\int_A^B g(z)dz$$
$$\int_A^B f(z)dz=\int_A^P f(z)dz+\int_P^B f(z)dz$$

V zadnjem primeru leži točka *P* med točkama *A* in *B*.

Še ena tabela kompleksnega integrala:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi i; n=0\\ 0; n\neq 0\end{cases}$$
$$\oint_C (z-z_0)^m dz=\begin{cases}2\pi i; m=-1\\ 0; m\neq -1\end{cases}$$

če krivuljni integral zapišemo v realni obliki, to omogoča, da pri študiju integracije v kompleksnem uporabimo *Greenovo* formulo in seveda rezultate.

Izrek: če je f(z) analitična in $f'(z)$ zvezna funkcija na območju D in na robu območja C, kjer je C enostavno sklenjena krivulja, potem je $\oint f(z)dz = 0$.

Izrek: krivuljni integral analitične funkcije f(z) po poljubni enostavno sklenjeni krivulji C1 je enak krivuljnemu integralu iste funkcije po poljubni drugi enostavno sklenjeni krivulji C2, v katero lahko C1 zvezno deformiramo, ne da bi pri tem šli skozi kakšno točko, v kateri f(z) ni analitična.

Izrek: v poljubno enostavno povezanem območju (polju) kjer je funkcija f analitična, je integral $\int_C f(z)dz$ neodvisen od poti.

Izrek: če je f(z) analitična funkcija v notranjosti enostavno povezanega območja D in tudi na njegovem robu C in če je z_0 poljubna točka znotraj tega polja $z \in D$, potem je $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$, integracija po krivulji C v pozitivnem smislu.

Izrek: če je f(z) analitična funkcija povsod na enostavno povezanem območju D z robom C, potem pri poljubni notranji točki z_0, $z_0 \in D$, eksistirajo odvodi funkcije f(z) in to vseh redov in so analitični. Torej $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$.

Posledica tega izreka je *Cauchyeva neenakost*. $\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!M}{r^n}$

5.5 Neskončne vrste

Z vrstami, katerih členi so kompleksna števila ali funkcije postopamo v glavnem enako kot v realnem primeru. Vzemimo vrsto $f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + ...$. Členi so funkcije kompleksne spremenljivke in *D* naj bo definicijsko območje vseh funkcij. Sestavimo delne vsote $s_1(z) = f_1(z)....$; $s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z)$. Za prvo omenjeno vrsto pravimo da konvergira k vsoti *s(z)* na področju *D*, če za vse $z \in D$ limitira zaporedje delnih vsot $s_1(z), s_2(z), ... \to s(z)$. Torej za poljuben ε >0 obstaja število n_0, ki je odvisno od ε in izbrane vrednosti z, da je $|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$ za vsak *n*>*n₀*. Množica vseh z, za katere vrsta konvergira, sestavlja konvergenčno področje.

Potreben in zadosten pogoj , da vrsta iz kompleksnih členov konvergira je, da vrsti iz realnih in imaginarnih delov konvergirata. Če $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}(f_n(z)) \to Rs(z)$ in $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}(f_n(z)) \to \tau s(z)$, potem vrsta konvergira proti $Rs(z) + i\tau s(z)$.

Definicija: pravimo da funkcijska vrsta enakomerno konvergira k funkciji *s(z)* na področju *D*, če k ustreznemu ε >0 eksistira pozitivno celo število n_0, ki je odvisno le od ε in ne od *z*, da za vsak $z \in D$ velja $|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$ za vse n>n0.

5.5.1 Taylorjeva vrsta

Razvoj v taylorjevo vrsto je odlično sredstvo realne analize, prav tako ta razvoj veliko uporabljamo tudi v kompleksni analizi.
Iz izpeljav na strani 143-145 lahko zapišemo:

$$f(z)=f(z_0)+\frac{z-z_0}{1!}f'(z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2!}f''(z_0)+\ldots+\frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0)+R_n(z)$$

tako, dobili smo Taylorjevo formulo. Ker imajo analitične funkcije odvode vseh redov, smemo n povečati, torej $n\to\infty$ in zapišemo Taylorjevo vrsto za funkcijo f(z) okoli točke z_0:

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, če je z0=0, govorimo o *Maclaurinovi vrsti*.

Če je *f(z)* analitična v notranjosti področja *D* in je z_0 poljubna točka v *D*, $z_0\in D$, potem se da *f(z)* predstaviti v obliki potenčne vrste $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ kjer je $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$.

Upoštevajoč *Cauchyjevo* integralsko formulo se koeficienti a_n glase $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, integrirajmo v pozitivni smeri po enostavno sklenjeni krivulji in z0 leži v notranjosti.

5.5.2 Laurentova vrsta

V mnogih primerih je potrebno razviti funkcijo *f(z)* okoli točke, v kateri funkcija ni regularna. V takih primerih se ne da uporabiti razvoja v Taylorjevo vrsto, ampak pride v poštev v razvoj v Laurentovo vrsto, v kateri nastopajo pozitivne in negativne potence izraza z-z_0.

Izrek: če je *f(z)* analitična funkcija na dveh koncentričnih krogih C_1 in C_2 s središčem v z_0 in na kolobarju med njima, potem se da funkcija *f(z)* predstaviti z Laurentovo vrsto $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(z-z_0)^n}=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+\frac{c_1}{z-z_0}+\frac{c_2}{(z-z_0)^2}+\ldots$, koeficienti se glase $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}dz^*$ in $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C(z^*-z_0)^{n-1}f(z^*)dz^*$, C je sklenjena krivulja v notranjosti kolobarja, z* je integracijska spremenljivka. Če zaznamujemo c_n in a_{-n} lahko zapišemo Laurentovo vrsto v obliki $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ in koeficienti se glase $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}dz^*$.

5.6 Teorija residuov

Če je analitična funkcija *f(z)* z domeno *D* nič v točki $z=a\in D$ pravimo, da ima ničlo v točki $z=a$. Kadar ima *f* pa tudi odvodi $f', f'', f''',\ldots f^{(n-1)}$ ničle pri $z=a$ in $f^{(n)}(a)\neq 0$ potem pravimo, da ima *f(z)* ničlo reda *n* pri $z=a$. Analitična funkcija ima ničlo *n-tega* reda v neskončnosti, če je *f(1/z)* nič pri $z=0$.

Če je *f(z)* analitična v neki okolici $z=a$ in ima v *a* ničlo reda *n*, potem so koeficienti Taylorjeve vrste a_0, a_1,…a_{n-1}, ki ima središče v *a*, enaki nič. Vrsta se v tem primeru glasi $f(z)=a_n(z-a)^n+a_{n+1}(z-a)^{n+1}+\ldots$. Točko iz množice *S* imenujemo izolirno točko, ki ne

vsebuje nobene druge točke iz *S*. točka *b* iz *S* se imenuje limitna točka, če ima vsaka okolica točke *b* vsaj še eno točko iz *S*, ki je različna od *b*. Če ima *f(z)* izolirano singularnost v točki *z=a*, potem funkcijo lahko predstavimo v *Laurentovi* vrsti $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n}$.
Prvo vrsto imenujemo regularni del in drugo vrsto pa glavni del. Kadar so koeficienti $c_m \neq 0$, za *m<n*, vsi nadaljnji koeficienti c_n pa enaki nič, se *Laurentova* vrsta glasi $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\frac{c_1}{z-a}+...+\frac{c_m}{(z-a)^m}$. Glavni del se v tem primeru sestoji iz končno členov in singularnost funkcije *f* pri *z=a* imenujemo pol stopnje *m*.
Katerakoli singularnost analitične funkcije, ki ni pol, imenujemo bistvena singularnost, poli so torej izolirane singularnosti. Če v Laurentovi vrsti obstaja neskočno členov cn različnih od nič, potem singularnosti pri *z=a* ni pol, ampak je izolirana bistvena singularnost.

Residuum

Vemo če je funkcija *f(z)* analitična na območju *D* in robu *C* tega območja, da je integral $\oint_C f(z)dz=0$. V primeru da ima *f(z)* na območju *D* pol ali izolirano bistveno singularnost pri *z=a*, potem bo prejšnji integral različen od nič. V tem primeru funkcijo *f(z)* predstavimo z Laurentovo vrsto $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n}$, ki konvergira na območju $0<|z-a|<r$, *r* je razdalja od *a* do najbližje singularne točke funkcije *f(z)*. koeficient c_1 v Laurentovi vrsti se glasi $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ in odtod $\oint_C f(z)dz=2\pi i c_1$. Koeficient c_1 v Laurentovi vrsti imenujemo residuum funkcije *f(z)* pri *z=a*, to zapišemo $c_1=res_{z=a}f(z)$.

Izrek: naj bo *f(z)* enolična in analitična funkcija znotraj enostavno sklenjene krivulje *C* in tudi na krivulji, razen v končno mnogo singularnih točkah a_1, a_2,…a_m. Potem je $\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{m}res_{z=a_j}f(z)$. Integracija po krivulji *C* je v pozitivnem smislu.

5.7 Računanje realnih integralov

S pomočjo izreka o residuih lahko lažje izračunamo tudi nekatere realne integrale. Postopek, po katerem te realne integrale računamo je razmeroma preprost. Poglejmo nekaj takih primerov.

Naprej obravnavajmo integral $I=\int_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi$,R je funkcija dveh spremenljivk na intervalu od *0* do *2Pi*. Uvedemo $e^{i\varphi}=z$ in $\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ ter $\sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$. Sedaj postane integrand racionalna funkcija spremenljivke z, zaznamujmo jo f(z), $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$, in obravnavani integral preide v integral $I=\oint_C f(z)\frac{dz}{iz}$.

Drugi primer integralov so posplošeni integrali racionalnih funkcij $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Take integrale rešujemo s formulo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum res\_ f(z)$.

5.8 Konformne preslikave

Kompleksna funkcija *w=f(z)* naj bo definirana naj bo definirana na območju *D* v z-ravnini. Vsaki točki iz *D* ustreza točka *f(z)* v w-ravnini. Tako imamo dano preslikavo iz *D* na zalogo vrednosti funkcije *f(z)* v *w-ravnini*. Če je *f(z)* analitična funkcija, pravimo, da je preslikava dana s funkcijo *f(z)* konformna preslikava. Taka preslikava ohranja kote, z izjemo v točkah, v katerih je odvod $f'(z)$ enak nič, to so kritične točke. Dana je kompleksna funkcija $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; $z = x + iy$. Vzemimo dve ločeni kompleksni ravnini za dve spremenljivki *z* in *w*. Funkcija *f(z)* določa vsakemu $z \in D$ vrednost $w = f(z)$ v *w-ravnini.* Tako je točka $w_0 = f(z_0)$ slika točke z_0 glede na preslikavo s funkcijo f(z). Če se z giblje vzdolž krivulje *C* in je *f(z)* zvezna funkcija, potem ustrezna točka *w=f(z)* potuje vzdolž neke krivulje T v *w-ravnini* in krivulja *T* je slika krivulje *C.*

Izrek: preslikava, definirana z analitično funkcijo *f(z)* je konformna z izjemo v točkah, kjer je $f'(z) = 0$, v takoimenovanih kritičnih toćkah.

Translacija: če je *b=0,* imamo opravka z identično transformacijo *w=z*. Transformacija *w=az* je rotacija za fiksen kot, ki je enak *arg a*, kombinirana z razširitvijo ali skrčitvijo.
Splošna linearna lomljena transformacija imenovana tudi bilinearna ali mobiusova transformacija se glasi $w = \frac{az + b}{cz + d}$, fiksne tokčke dobimo iz $w = f(z) = z$.