Gregor Dolinar

Rešene naloge iz Matematike 3

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani
2005

Kazalo

1 Diferencialna geometrija

1.1 Krivulje v prostoru

1. Krivulja v prostoru je dana z enačbama

$$3x^2 - y - 2z = 0$$
$$2x^2 - x - z = 0$$

Izračunaj dolžino loka od točke $A(0,0,0)$ do točke $B(1,1,1)$.

Rešitev: Če je krivulja dana v parametrični obliki

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

potem izračunamo dolžino loka krivulje med točkama $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in $T_1(x_1, y_1, z_1)$ s pomočjo formule

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt,$$

pri čemer je t_0 tista vrednost parametra t, za katero je $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{r}(t_1) = (x_1, y_1, z_1)$. Če hočemo uporabiti to formulo, moramo krivuljo najprej zapisti v parametrični obliki. Vse koordinate točk na krivulji moramo zapisati kot funkcije iste spremenljivke t. V našem primeru lahko iz druge enačbe

$$2x^2 - x - z = 0$$

izrazimo z kot funkcijo spremenljivke x in dobimo

$$z = 2x^2 - x,$$

potem pa lahko to vstavimo v prvo enačbo

$$3x^2 - y - 2z = 0$$

in izrazimo tudi y s spremenljivko x

$$y = 3x^2 - 2z = 3x^2 - 2(2x^2 - x) = -x^2 + 2x.$$

Seveda je tudi x identična funkcija spremenljivke x. Vse koordinate točk na krivulji smo izrazili kot funkcije iste spremenljivke x, zato bo imela spremenljivka x vlogo parametra t, torej lahko zapišemo

$$\vec{r}(t) = (t, -t^2 + 2t, 2t^2 - t).$$

Določiti moramo še tisti vrednosti parametra t, za kateri je

$$(0,0,0) = \vec{r}(t_0) = (t_0, -t_0^2 + 2t_0, 2t_0^2 - t_0)$$

in

$$(1,1,1) = \vec{r}(t_1) = (t_1, -t_1^2 + 2t_1, 2t_1^2 - t_1).$$

V prvem primeru dobimo, da je $t_0 = 0$, v drugem primeru pa je $t_1 = 1$. Ker je

$$\dot{x}(t) = 1, \;\; \dot{y}(t) = -2t + 2 \quad \text{in} \quad \dot{z}(t) = 4t - 1,$$

je dolžina loka l od točke $A(0,0,0)$ do točke $B(1,1,1)$ enaka

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1^2 + (-2t+2)^2 + (4t-1)^2}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 - 8t + 4 + 16t^2 - 8t + 1}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{20t^2 - 16t + 6}\, dt \\ &= 2.1211, \end{aligned}$$

pri čemer smo določeni integral izračunali s pomočjo matematičnega priročnika, lahko pa bi uporabili tudi računalnik.

2. Izrazi krivuljo

$$\vec{r}(t) = (3t^2, 12t, 8\sqrt{t^3})$$

s pomočjo naravnega parametra s.

Rešitev: Najprej naravni parameter s izrazimo s parametrom t s pomočjo enačbe

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\, dt \\ &= \int_0^t \sqrt{(6t)^2 + 12^2 + \left(8 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{t}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^t \sqrt{6^2t^2 + 12^2 + 12^2 t}\, dt \\ &= 6\int_0^t \sqrt{t^2 + 4t + 4}\, dt \\ &= 6\int_0^t \sqrt{(t+2)^2}\, dt = 6\int_0^t (t+2)\, dt \\ &= 6\left(\frac{t^2}{2} + 2t\right) \end{aligned}$$

Torej je

$$s = 3t^2 + 12t,$$

oziroma

$$t^2 + 4t - \frac{s}{3} = 0.$$

Sedaj izrazimo parameter t s pomočjo naravnega parametra s in dobimo

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot \frac{s}{3}}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 + \frac{s}{3}}.$$

Ker mora biti vrednost parametra t pozitivna, pride v poštev le možnost

$$t = -2 + \sqrt{4 + \frac{s}{3}}.$$

Preostane samo še, da vstavimo t v enačbo krivulje in dobimo

$$\vec{r}(s) = \left(3\left(-2 + \sqrt{4 + \frac{s}{3}}\right)^2, 12\left(-2 + \sqrt{4 + \frac{s}{3}}\right), 8\left(-2 + \sqrt{4 + \frac{s}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

3. Poišči enačbo tangente na krivuljo v dani točki.

   (a) $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, e^t), \quad T(0,0,1)$

   (b) $(x-1)^2 + y^2 - z = 0,\ x + 2y = 0, \quad T(2,-1,2)$

Rešitev: Če je krivulja podana v parametrični obliki

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

potem je smerni vektor tangente na to krivuljo v točki $(x(t), y(t), z(t))$ enak

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

(a) Krivulja $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, e^t)$ je podana v parametrični obliki, zato je njen smerni vektor

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, e^t).$$

Izračunati moramo še vrednost parametra t v točki $T(0,0,1)$. Izenačimo koordinate krivulje s koordinatami točke: $(t\cos t, t\sin t, e^t) = (0,0,1)$ in dobimo $t = 0$. Smerni vektor tangente je potem

$$\dot{\vec{r}}(0) = (1,0,1),$$

enačba tangente v točki $(0,0,1)$ pa

$$\frac{x-0}{1} = \frac{z-1}{1}, \;\; y = 0,$$

oziroma

$$x = z - 1, \;\; y = 0.$$

(b) Krivulja je podana kot presek dveh ploskev $(x-1)^2 + y^2 - z = 0$ in $x + 2y = 0$, zato jo moramo najprej parametrizirati. Vzemimo spremenljivko x za parameter (lahko bi izbrali tudi spremenljivko y ali tudi kakšen drug parameter). Potem je

$$y = -\frac{x}{2}.$$

To vstavimo v prvo enačbo in izrazimo z s spremenljivko x, tako da dobimo

$$z = (x-1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - 2x + 1 + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4} - 2x + 1.$$

Krivulja v parametrični obliki je

$$\vec{r}(x) = \left(x, -\frac{x}{2}, \frac{5x^2}{4} - 2x + 1\right).$$

Pri računanju smernega vektorja tangente torej odvajamo po spremenljivki x in dobimo

$$\vec{r}\,'(x) = (x', y'(x), z'(x)) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{5x}{2} - 2\right).$$

V točki $T(2,-1,2)$ je vrednost parametra $x = 2$, torej

$$\vec{t} = \vec{r}\,'(2) = \left(1, -\frac{1}{2}, 3\right).$$

Enačba tangente v točki $T(2,-1,2)$ je potem

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-2}{3},$$

oziroma

$$x - 2 = -2y - 2 = \frac{z-2}{3}.$$

1.2 Ploskve v prostoru

4. Poišči enačbo tangentne ravnine na ploskev v dani točki.

   (a) $\vec{r}(u,v) = (2u\cos v, u\sin v, u^3), \quad T(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 8)$

   (b) $z = (x-1)^2 y e^{-x^2}, \quad T(0,1,1)$

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = -17, \quad T(1,2,2)$

Rešitev: Ravnina je natanko določena z normalo in točko, ki leži na tej ravnini. Torej moramo v vsakem izmed primerov izračunati normalo tangentne ravnine v dani točki.

(a) Če je enačba ploskve podana v parametrični obliki

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

izračunamo normalo tangentne ravnine po formuli

$$\vec{n}(u,v) = \vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v).$$

Ker je

$$\vec{r}(u,v) = (2u\cos v, u\sin v, u^3),$$

je enačba normale na ploskev

$$\begin{aligned}
\vec{n}(u,v) &= \vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) \\
&= (2\cos v, \sin v, 3u^2) \times (-2u\sin v, u\cos v, 0) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\cos v & \sin v & 3u^2 \\ -2u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= -3u^3\cos(v)\vec{i} - 6u^3\sin(v)\vec{j} + 2u(\cos^2 v + \sin^2 v)\vec{k} \\
&= (-3u^3\cos v, -6u^3\sin v, 2u).
\end{aligned}$$

Zanima nas normala na ploskev v točki $(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 8)$, zato moramo izračunati, pri katerih vrednostih parametrov u in v je $\vec{r}(u,v) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 8)$, torej $2u\cos v = 2\sqrt{2}$, $u\sin v = \sqrt{2}$ in $u^3 = 8$. Iz zadnje enačbe dobimo, da je $u = 2$, zato iz prve enačbe dobimo, da je $\cos v = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in iz druge enačbe, da je $\sin v = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Torej je $v = \frac{\pi}{4}$.

Normala v točki $(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 8)$ pri vrednostih parametrov $u = 2$ in $v = \frac{\pi}{4}$ je enaka

$$\begin{aligned}\vec{n}(2, \tfrac{\pi}{4}) &= (-3 \cdot 2^3 \cos \tfrac{\pi}{4}, -6 \cdot 2^3 \sin \tfrac{\pi}{4}, 2 \cdot 2) \\ &= (-12\sqrt{2}, -24\sqrt{2}, 4).\end{aligned}$$

Normalo $(-12\sqrt{2}, -24\sqrt{2}, 4)$ in točko $(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 8)$ na tangentni ravnini sedaj poznamo, torej je enačba tangentne ravnine

$$-12\sqrt{2}x - 24\sqrt{2}y + 4z = d,$$

pri čemer smo pred x, y in z napisali koordinate normale, d pa določimo tako, da v to enačbo vstavimo točko $(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 8)$. Torej je

$$d = -12\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - 24\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot 8 = -48 - 48 + 32 = -64.$$

Enačba tangentne ravnine na ploskev v dani točki je

$$-12\sqrt{2}x - 24\sqrt{2}y + 4z = -64.$$

(b) Če je enačba ploskve podana v eksplicitni obliki

$$z = z(x, y),$$

je normala tangentne ravnine

$$\vec{n}(x, y) = (p(x, y), q(x, y), -1),$$

pri čemer je $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ in $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.
Ker je $z = (x-1)^2 e^{-x^2} y$, je

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2(x-1)e^{-x^2}y + (x-1)^2 e^{-x^2}(-2x)y \\ &= 2(x-1)e^{-x^2}y(1 - x(x-1))\end{aligned}$$

in

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x-1)^2 e^{-x^2}.$$

Torej je normala tangentne ravnine v poljubni točki $(x, y, z(x, y))$ na ploskvi enaka

$$\begin{aligned}\vec{n}(x, y) &= (p(x, y), q(x, y), -1) \\ &= (2(x-1)e^{-x^2}y(1 - x(x-1)), (x-1)^2 e^{-x^2}, -1).\end{aligned}$$

V točki $T(0,1,1)$, kjer je $x=0$ in $y=1$, pa je

$$\vec{n}(0,1) = (-2,1,-1).$$

Enačba tangentne ravnine, za katero poznamo normalo $(-2,1,-1)$ in točko $T(0,1,1)$, je

$$-2x + 1y - 1z = d,$$

pri čemer smo pred x, y in z napisali koordinate normale, d pa določimo tako, da v enačbo vstavimo koordinate točke $T(0,1,1)$. Torej je

$$d = -2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

Enačba tangentne ravnine na ploskev v dani točki je

$$-2x + y - z = 0.$$

(c) Če je enačba ploskve podana v implicitni obliki

$$F(x,y,z) = 0,$$

potem je normala tangentne ravnine

$$\vec{n}(x,y,z) = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)).$$

V našem primeru je

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 17,$$

torej je

$$F_x(x,y,z) = 2x - 2, \;\; F_y(x,y,z) = 2y - 4 \;\text{ in }\; F_z(x,y,z) = 2z - 6.$$

Enačba normale tangentne ravnine v poljubni točki (x,y,z) je potem

$$\vec{n}(x,y,z) = (2x-2, 2y-4, 2z-6),$$

v točki $T(1,2,2)$, kjer je $x=1$, $y=2$ in $z=2$, pa

$$\vec{n}(1,2,2) = (0,0,-2).$$

Enačba tangentne ravnine z normalo $(0,0,-2)$ in točko $T(1,2,2)$ je

$$0 \cdot x + 0 \cdot y - 2z = d,$$

pri čemer so pred x, y in z koordinate normale, d pa določimo tako, da v enačbo vstavimo koordinate točke $T(1,2,2)$. Torej je

$$d = -2 \cdot 2 = -4.$$

Enačba tangentne ravnine na ploskev v dani točki je $-2z = -4$, oziroma

$$z = 2.$$

5. Dana je ploskev

$$\vec{r}(u,v) = (\cos u \cos v, 2\cos u \sin v, 3\sin u).$$

Določi v kateri točki in pod kakšnim kotom se sekata koordinatni krivulji $\vec{r}(u,\pi)$ in $\vec{r}(\frac{\pi}{4}, v)$.

Rešitev: Naj bo $\vec{r}(u,v)$ ploskev podana v parametrični obliki. Ploskev je odvisna od dveh parametrov u in v in je dvodimenzionalni objekt v prostoru. Če enega izmed parametrov fiksiramo, na primer $v = v_0$, dobimo krivuljo $\vec{r}_k(u) = \vec{r}(u, v_0)$, ki je odvisna le od enega parametra u. Točke te krivulje seveda ležijo na ploskvi, krivuljo pa imenujemo koordinatna krivulja.

V našem primeru nas zanima, pod kakšnim kotom se na ploskvi

$$\vec{r}(u,v) = (\cos u \cos v, 2\cos u \sin v, 3\sin u)$$

sekata koordinatni krivulji

$$\vec{r}_1(u) = \vec{r}(u,\pi) = (\cos u \cos \pi, 2\cos u \sin \pi, 3\sin u) = (-\cos u, 0, 3\sin u)$$

in

$$\begin{aligned}\vec{r}_2(v) = \vec{r}\left(\frac{\pi}{4}, v\right) &= \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos v, 2\cos\frac{\pi}{4}\sin v, 3\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos v, 2\frac{\sqrt{2}}{2}\sin v, 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos v, 2\sin v, 3).\end{aligned}$$

Koordinatni krivulji se sekata v točki, kjer je $u = \frac{\pi}{4}$ in $v = \pi$, torej v točki

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\pi, 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\pi, 3\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Kot, pod katerim se sekata dve krivulji, je enak kotu, pod katerim se sekata tangenti na krivulji v presečišču, torej moramo izračunati smerna vektorja tangent za obe koordinatni krivulji. Dobimo

$$\vec{r}_1{}'(u) = (\sin u, 0, 3\cos u)$$

in

$$\vec{r}_2{}'(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin v, 2\cos v, 0).$$

Nas zanimata smerna vektorja tangent v presečišču, kjer je $u = \frac{\pi}{4}$ in $v = \pi$, zato izračunamo

$$\vec{r}_1{}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{4}, 0, 3\cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

in

$$\vec{r}_2{}'(\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin\pi, 2\cos\pi, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, -2, 0) = (0, -\sqrt{2}, 0).$$

Ker je skalarni produkt smernih vektorjev enak 0,

$$\vec{r}_1{}'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \vec{r}_2{}'(\pi) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (0, -\sqrt{2}, 0) = 0,$$

sta smerna vektorja tangent pravokotna, torej se koordinatni krivulji sekata pod pravim kotom.

6. Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev

$$x^2 - xy + 2y^2 - z - 1 = 0$$

v točki, kjer krivulja

$$\vec{r}(t) = (2t, t-1, 3t^2)$$

seka to ploskev.

Rešitev: Določimo najprej točko, v kateri krivulja $\vec{r}(t) = (2t, t-1, 3t^2)$ seka ploskev $x^2 - xy + 2y^2 - z - 1 = 0$. Točka mora ležati tako na krivulji, zato je $x = 2t$, $y = t - 1$ in $z = 3t^2$, kot tudi na ploskvi, zato je

$$(2t)^2 - 2t(t-1) + 2(t-1)^2 - 3t^2 - 1 = 0.$$

Izračunamo

$$4t^2 - 2t^2 + 2t + 2t^2 - 4t + 2 - 3t^2 - 1 = 0,$$

poenostavimo

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

in dobimo, da je rešitev kvadratne enačbe le ena in sicer $t = 1$. Torej je presečišče krivulje in ploskve v točki

$$\vec{r}(1) = (2 \cdot 1, 1 - 1, 3 \cdot 1^2) = (2, 0, 3).$$

Ploskev $x^2 - xy + 2y^2 - z - 1 = 0$ je dana v implicitni obliki, zato je normala tangentne ravnine na ploskev v poljubni točki (x, y, z) enaka

$$\vec{n}(x, y, z) = (2x - y, -x + 4y, -1),$$

v točki $(2, 0, 3)$ pa je potem

$$\vec{n} = (2 \cdot 2 - 0, -2 + 4 \cdot 0, -1) = (4, -2, -1).$$

Enačba tangentne ravnine je

$$4x - 2y - z = d,$$

konstanto d pa določimo tako, da v enačbo vstavimo koordinate točke $(2, 0, 3)$. Torej je

$$d = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = 5.$$

Enačba tangentne ravnine na ploskev v točki $(2, 0, 3)$ je

$$4x - 2y - z = 5.$$

2 Mnogoterni integrali

2.1 Integrali s parametrom

1. Izračunaj odvod funkcije F.

   (a)

$$F(y) = \int_0^2 \log(y + \sqrt{y^2 - x^2})dx$$

(b)
$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{y}} \frac{\tan^2(xy)}{2x}\, dx$$

Rešitev: Integral s parametrom
$$F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$
odvajamo po formuli
$$F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(v(y),y)v'(y) - f(u(y),y)u'(y).$$

(a) Ker sta v tem primeru meji integrala $F(y) = \int_0^2 \log(y+\sqrt{y^2-x^2})dx$ konstantni, sta zadnja dva člena vsote v formuli enaka nič, zato je
$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^2 \frac{1}{y+\sqrt{y^2-x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{y^2-x^2}}\right) dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{y+\sqrt{y^2-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{y^2-x^2}+y}{\sqrt{y^2-x^2}}\, dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{y}\Big|_0^2 = \arcsin\frac{2}{y} - \arcsin 0 \\ &= \arcsin\frac{2}{y} \end{aligned}$$

(b) Uporabimo formulo za odvod integrala s parametrom za funkcijo $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{y}} \frac{\tan^2(xy)}{2x}\, dx$ in dobimo
$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{y}} \frac{1}{2x} \cdot 2\tan(xy) \cdot \frac{1}{\cos^2(xy)} \cdot x\, dx + \frac{\tan^2(\frac{\pi}{y}\cdot y)}{2\frac{\pi}{y}} \left(-\frac{\pi}{y^2}\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{y}} \frac{\sin(xy)}{\cos^3(xy)}\, dx - \frac{\tan^2(\pi)}{2y} \\ &= \frac{1}{2y\cos^2(xy)}\Big|_0^{\frac{\pi}{y}} = \frac{1}{2y\cos^2(\frac{\pi}{y}y)} - \frac{1}{2y\cos^2 0} = 0. \end{aligned}$$

2. Določi stacionarne točke funkcije

$$F(x,y) = \int_0^1 \left(\frac{\sin(xt)}{t} + \frac{e^{yt+y}}{t+1} \right) dt.$$

Rešitev: Za stacinarno točko funkcije F mora veljati

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Izračunamo

$$F_x(x,y) = \int_0^1 \frac{\cos(xt)t}{t}\, dt = \left. \frac{\sin(xt)}{x} \right|_0^1 = \frac{\sin x}{x}$$

in

$$F_y(x,y) = \int_0^1 \frac{e^{yt+y}(t+1)}{t+1}\, dt = \left. \frac{e^{yt+y}}{y} \right|_0^1 = \frac{e^y}{y}(e^y - 1).$$

Torej iščemo tiste vrednosti za spremenljivki x in y, da je

$$\sin x = 0 \quad \text{in} \quad e^y - 1 = 0.$$

Iz prve enačbe sledi, da je $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, iz druge enačbe pa, da je $y = 0$. Torej so stacionarne točke funkcije F vse točke $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. S pomočjo odvajanja na parameter izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xy} - e^{-x}}{x}\, dx.$$

Rešitev: Integral $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ najprej odvajamo na parameter y in dobimo nov integral

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Novi integral izračunamo, nato pa moramo dobljeno funkcijo $F'(y)$ še integrirati, da dobimo $F(y)$. Na koncu moramo določiti še vrednost konstante, ki jo dobimo pri računanju nedoločenega integrala. V našem primeru je

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-xy} - e^{-x}}{x} \, dx.$$

Funkcijo F odvajamo in dobimo

$$F'(y) \;\; = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}(-x)}{x} \, dx = \left(\frac{e^{-xy}}{y} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{y} \; .$$

Torej je

$$F(y) = \int -\frac{1}{y} \, dy = -\log y + C.$$

Ker je po eni strani

$$F(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-x}}{x} \, dx = 0,$$

po drugi strani pa je

$$F(1) = -\log 1 + C = C,$$

je $C = 0$ in zato je

$$F(y) = -\log y.$$

2.2 Dvojni integral

4. Prevedi dvojni integral

$$\int \int_D f(x, y) \, dx dy$$

na dvakratni integral na dva načina. Območje D je določeno z neenakostima

$$y \leq -(x-1)^2 \quad \text{in} \quad y \geq -1.$$

Rešitev: Dvojni integral prevedemo na dvakratni integral tako, da najprej določimo minimalno in maksimalno vrednost ene izmed spremenljivk na območju, nato pa pri določeni vrednosti te spremenljivke določimo katere vrednosti lahko zavzame druga spremenljivka.

Dvojni integral lahko prevedemo na dvakratni integral na dva načina, odvisno od izbire vrstnega reda spremenljivk.

Določimo najprej minimalno in maksimalno vrednost, ki jo lahko zavzame spremenljivka y na območju D. Ker je $y \leq -(x-1)^2$, je lahko y največ 0. Torej je $-1 \leq y \leq 0$. Ker je

$$(x-1)^2 \leq -y,$$

sledi, da je

$$-\sqrt{-y} \leq x - 1 \leq \sqrt{-y},$$

oziroma

$$1 - \sqrt{-y} \leq x \leq 1 + \sqrt{-y}.$$

Pri neki določeni vrednosti spremenljivke y lahko torej spremenljivka x zavzame vrednosti od $1-\sqrt{-y}$ do $1+\sqrt{-y}$. Dvojni integral lahko torej zapišemo kot dvakratni na naslednji način

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{1-\sqrt{-y}}^{1+\sqrt{-y}} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Če je $y=-1$, potem iz enakosti $-1=-(x-1)^2$, oziroma $1=(x-1)^2$ sledi, da je $x=0$ ali $x=2$. Torej je vrednost spremenljivke x na območju D najmanj 0 in največ 2. Pri neki določeni vrednosti spremenljivke x lahko spremenljivka y zavzame vrednosti od -1 do $-(x-1)^2$. Torej lahko dvojni integral zapišemo kot dvakratni integral tudi na naslednji način

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_{0}^{2}\left(\int_{-1}^{-(x-1)^2} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

5. Izračunaj dvojni integral

$$\int\int_D (x-y)^2\,dxdy,$$

območje D je določeno z neenakostmi

$$y \leq 1,\ \ y \geq 1-x \quad \text{in} \quad y \geq x-1.$$

Rešitev: Najprej določimo minimalno in maksimalno vrednost, ki jo lahko zavzame spremenljivka y na območju D. Iz enačb $y = 1-x$

in $y = x - 1$, dobimo, da je $1 - x = x - 1$ in zato $x = 1$. Ko je vrednost spremenljivke x enaka 1, je vrednost spremenljivke y enaka $y = 1 - x = 0$. Torej je vrednost spemenljivke y najmanj 0 in največ 1, oziroma

$$0 \leq y \leq 1.$$

Ker je $y \geq 1 - x$, je $x \geq 1 - y$. Podobno je $y \geq x - 1$, oziroma $x \leq y + 1$. Torej je

$$1 - y \leq x \leq y + 1.$$

Pri neki določeni vrednosti spremenljivke y lahko torej spremenljivka x zavzame vrednosti od $1 - y$ do $y + 1$. Dvojni integral tako zapišemo kot dvakratni integral in dvakratnega nato izračunamo.

$$\begin{aligned}
&\int\int_D (x-y)^2\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{1+y} \left(x^2 - 2xy + y^2\right)\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2}\cdot y + xy^2\right)\Bigg|_{1-y}^{1+y} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1+y)^3}{3} - (1+y)^2\cdot y + (1+y)y^2\right. \\
&\qquad \left. - \frac{(1-y)^3}{3} + (1-y)^2\cdot y - (1-y)y^2\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y + y^2 + \frac{y^3}{3} - y - 2y^2 - y^3 + y^2 + y^3\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{3} + y - y^2 + \frac{y^3}{3} + y - 2y^2 + y^3 - y^2 + y^3\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{8}{3}y^3 - 4y^2 + 2y\right) dy = \left(\frac{4y^4}{3} - \frac{2y^3}{3} + y^2\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

6. Izračunaj dvojni integral

$$\int\int_D \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2}\,dxdy,$$

območje D je določeno z neenakostmi

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \;\; x \geq 0 \;\; \text{in} \;\; y \geq 0.$$

Rešitev: Tako pri funkciji, ki jo integriramo, kot tudi pri opisu območja D se pojavi izraz $x^2 + y^2$. Zato bomo v dvojni integral uvedli nove spremenljivke in sicer polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Ker je $x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, se v polarnih koordinatah izraz $x^2 + y^2$ poenostavi v izraz r^2. Funkcija je v polarnih koordinatah enaka

$$\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{1+(r^2)^2} = \frac{1}{1+r^4},$$

območje pa je v polarnih koordinatah določeno z neenakostima

$$1 \le r^2 \le 4 \quad \text{in} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Ko uvedemo nove koordinate $x(r,\varphi)$ in $y(r,\varphi)$ v dvojni integral, moramo upoštevati še Jacobijevo determinanto

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Dvojni integral je potem enak

$$\int\int_D \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,dxdy \;\; = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{1+r^4}\cdot r\,dr.$$

Integral po spremenljivki φ lahko že izračunamo, v drugem integralu pa uvedemo novo spremenljivko: $t = r^2$, $dt = 2rdr$, ko je $r = 1$, je $t = 1$, ko je $r = 2$, je $t = 4$. Torej

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{1+r^4}\cdot r\,dr \;\; &= \frac{\pi}{2}\int_1^4 \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{\pi}{4}\arctan t\Big|_1^4 \\ &= \frac{\pi}{4}(\arctan 4 - \arctan 1). \end{aligned}$$

7. Izračunaj posplošeni integral.

   (a)
   $$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{y+1}}\,dxdy,$$
   območje D je določeno z neenakostima $0 \le x \le 1$ in $0 \le y \le 1$.

(b)

$$\int\int_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,dxdy,$$

območje D je določeno z neenakostjo $0 \leq y \leq -x$.

Rešitev: Ločimo dve vrsti posplošenega integrala: posplošeni integral, pri katerem ima funkcija, ki jo integriramo, singularnost, ter posplošeni integral, pri katerem je integracijsko območje neomejeno.

(a) Funkcija $\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{y+1}}$, ki jo lahko zapišemo kot produkt dveh funkcij ene spremenljivke $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ in $\frac{1}{\sqrt{y+1}}$, ima singularnost za $x=1$ ali $y=-1$. Meji integracijskega območja sta glede na spremenljivki x in y konstantni, zato je

$$\begin{aligned}&\int\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{y+1}}\,dxdy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y+1}}\,dy \\ &= \frac{\sqrt{1-x}}{\frac{1}{2}}(-1)\Big|_0^1 \cdot \frac{\sqrt{y+1}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = -2(0-1)\cdot 2(\sqrt{2}-1) \\ &= 4(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

(b) Integracijsko območje je enako polovici drugega kvadranta in je zato neomejeno. Vpeljemo polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, Jacobijeva determinanta $J = r$. Ker je $y \geq 0$, mora biti polarni kot $0 \leq \varphi \leq \pi$, iz neenakosti $y \leq -x$ pa sledi, da je $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$. Za r ni drugega pogoja, razen, da je nenegativen. Torej je integracijsko območje določeno z neenakostima

$$\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi, \;\; 0 \leq r,$$

funkcija pa je v polarnih koordinatah enaka

$$\frac{1}{(x^2+y^2+4)^2} = \frac{1}{(r^2+4)^2}.$$

Sledi

$$\begin{aligned}&\int\int_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,dxdy = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{1}{(r^2+4)^2}\cdot r\,dr \\ &= \varphi\big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{r\,dr}{(r^2+4)^2} = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{r\,dr}{(r^2+4)^2}.\end{aligned}$$

Preostali integral izračunamo z vpeljavo nove spremenljivke: $t = r^2+4$, $dt = 2rdr$, ko je $r = 0$, je $t = 4$, ko je $r = \infty$, je $t = \infty$. Sledi

$$\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} \frac{r\,dr}{(r^2+4)^2} = \frac{\pi}{4}\int_4^{\infty} \frac{dt}{2t^2} = -\frac{\pi}{8}\left.\frac{1}{t}\right|_4^{\infty} = \frac{\pi}{32}.$$

8. Izračunaj ploščino lika, določenega z neenkostima

$$x \geq 5y^2 \quad \text{in} \quad x \leq 1+y^2.$$

Rešitev: Ploščina lika D je enaka

$$\int\int_D dxdy.$$

Da bomo lahko prevedli dvojni integral na dvakratnega, moramo določiti presečišči krivulj $x = 5y^2$ in $x = 1+y^2$. Izenačimo vrednosti x in dobimo $5y^2 = 1+y^2$, torej je $4y^2 = 1$, oziroma $y = \pm\frac{1}{2}$. Najmanjša vrednost spremenljivke y na območju D je $-\frac{1}{2}$, največja vrednost pa $\frac{1}{2}$. Pri neki določeni vrednosti spremenljivke y pa lahko spremenljivka x zavzame vrednosti od $5y^2$ do $1+y^2$. Torej je

$$\begin{aligned}
\int\int_D dxdy &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{5y^2}^{1+y^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+y^2-5y^2)dy \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-4y^2)dy = \left.\left(y - 4\cdot\frac{y^3}{3}\right)\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

9. Izračunaj prostornino telesa pod ploskvijo

$$z(x,y) = e^{x^2+y^2-1}$$

nad območjem D, določenim z neenakostjo

$$x^2+y^2-1 \leq 0.$$

Rešitev: Prostornina telesa pod ploskvijo $z(x,y)$ nad območjem D je enaka

$$\int\int_D z(x,y)dxdy.$$

V našem primeru bomo uvedli polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, Jacobijeva determinanta $J = r$. Funkcija in območje sta v polarnih koordinatah

$$e^{x^2+y^2-1} = e^{r^2-1} = e^{r^2} \cdot e^{-1}, \quad r^2 \leq 1, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

prostornina telesa pa je

$$\begin{aligned} \int\int_D e^{x^2+y^2-1} dxdy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{r^2} e^{-1} r\, dr \\ &= \frac{2\pi}{e} \int_0^1 e^t \frac{dt}{2} = \frac{\pi}{e}\, e^t\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{e}(e-1). \end{aligned}$$

10. Izračunaj površino na ploskvi

$$z(x,y) = \frac{x^2}{2}$$

nad območjem D, določenim z neenakostima

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{in} \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Rešitev: Površina ploskve $z(x,y)$ nad območjem D je enaka

$$\int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, dxdy.$$

V našem primeru dobimo

$$\begin{aligned} &\int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2}\right)^2 + 0^2}\, dxdy = \int_{-1}^1 dy \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \\ &= y\Big|_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})\right)\Big|_0^1 \\ &= (1-(-1))\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}) - 0\right)\Big|_0^1 \\ &= \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Pri računanju integrala si lahko pomagamo s priročnikom ali računalnikom.

2.3 Trojni integral

11. Prevedi trojni integral

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$$

na trikratnega. Območje V je dano z neenakostmi

$$x \geq 0,\;\; y \geq 0,\;\; z \geq 0 \;\;\text{in}\;\; 6x+3y+2z \leq 6.$$

Rešitev: Trojni integral $\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$ prevedemo na trikratni integral tako, da si najprej izberemo eno izmed spremenljivk x, y, z. Denimo, da izbremo spremenljivko z. Nato določimo minimalno vrednost z_1 in maksimalno vrednost z_2 te spremenljivke na območju V. Pri določeni vrednosti te spremenljivke $z_0 \in [z_1, z_2]$ dobimo dvodimenzionalno območje na ravnini $z = z_0$, ki je del območja V. Izberemo si eno izmed preostalih dveh spremenljivk. Denimo, da izberemo spremenljivko y. Potem določimo njeno minimalno vrednost $y_1(z_0)$ in maksimalno vrednost $y_2(z_0)$ na ravnini $z = z_0$ (minimalna in maksimalna vrednost spremenljivke y sta seveda odvisni od vrednosti z). Pri določeni vrednosti y_0 spremenljivke y iz območja $[y_1(z_0), y_2(z_0)]$ potem za tretjo spremenljivko, v našem primeru x, določimo minimalno vrednost $x_1(y_0, z_0)$ in maksimalno vrednost $x_2(y_0, z_0)$. Trojni integral je potem enak trikratnemu integralu

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx.$$

Trojni integral lahko prevedemo na trikratni integral na različne načine, odvisno od izbire vrstnega reda spremenljivk. Vseh možnih načinov, torej vseh možnih vrstnih redov treh spremenljivk je šest.

V našem primeru je območje omejeno s štirimi ravninami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ in $6x + 3y + 2z = 6$, torej je naše območje tetraeder. Njegova oglišča so presečišča treh ravnin in so $T_1(0,0,0)$, $T_2(1,0,0)$, $T_3(0,2,0)$ in $T_4(0,0,3)$.

Denimo, da izberemo najprej spremenljivko z. Njena minimalna vrednost na območju je $z_1 = 0$, njena maksimalna vrednost na območju pa je $z_2 = 3$. Izberimo si sedaj spremenljivko y. Maksimalna vrednost spremenljivke y pri dani vrednosti spremenljivke z je takrat, ko je $x = 0$. Torej lahko spremenljivka y pri neki vrednosti spremenljivke z zavzame vrednosti od 0 do $y = \frac{6-2z-6\cdot 0}{3} = 2 - \frac{2}{3}z$. Pri nekih vrednostih spremenljivk y in z je minimalna vrednost spremenljivke $x = 0$, njena maksimalna vrednost pa $x = \frac{6-2z-3y}{6} = 1 - \frac{1}{3}z - \frac{1}{2}y$. Trojni integral lahko torej zapišemo kot trikratni na naslednji način

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int_0^3 dz \int_0^{2-\frac{2}{3}z} dy \int_0^{1-\frac{1}{3}z-\frac{1}{2}y} f(x,y,z)dx.$$

Če bi spremenljivke izbrali v vrstnem redu z, x in na koncu y, bi na podoben način dobili

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int_0^3 dz \int_0^{1-\frac{1}{3}z} dx \int_0^{2-x-\frac{2}{3}z} f(x,y,z)dy,$$

če pa bi spremenljivke izbrali v vrstnem redu x, y in z, bi dobili

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z)dz.$$

Trojni integral bi lahko zapisali kot trikratni integral še na tri načine.

12. Izračunaj trojni integral

$$\int\int\int_V \frac{z(1-x)}{y} dxdydz,$$

pri čemer je območje V dano z neenakostmi

$$x \geq -1,\ \ 1 \leq y \leq e,\ \ z \geq 0 \ \ \text{in} \ \ z \leq 1-x.$$

Rešitev: Trojni integral izračunamo tako, da ga prevedemo na trikratnega. Najprej si izberemo spremenljivko y. Njena minimalna vrednost na območju V je $y_1 = 1$, njena maksimalna vrednost na območju V pa je $y_2 = e$. Ostali dve spremenljivki sta neodvisni od spremenljivke y. Ker je $x \geq -1$ in je $z \leq 1-x$, je lahko vrednost spremenljivke z največ $z = 1-(-1) = 2$. Minimalna vrednost spremenljivke z je 0 zaradi pogoja

$z \geq 0$. Pri nekem z je minimalna vrednost spremenljivke x enaka -1 zaradi pogoja $x \geq -1$, njena maksimalna vrednost pa $x \leq 1-z$ zaradi pogoja $z \leq 1-x$. Trojni integral je torej enak

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V \frac{z(1-x)}{y} dxdydz &= \int_1^e dy \int_0^2 dz \int_{-1}^{1-z} \frac{z(1-x)}{y} dx \\
&= \int_1^e dy \int_0^2 \frac{z}{y} \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1-z} dz \\
&= \int_1^e dy \int_0^2 \frac{z}{y} \left((1-z) - \frac{(1-z)^2}{2} - (-1) + \frac{(-1)^2}{2}\right) dz \\
&= \int_1^e dy \int_0^2 \frac{z}{y} \left(2 - \frac{z^2}{2}\right) dz = \int_1^e \frac{1}{y} \left(2\frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^2 dy \\
&= \int_1^e \frac{1}{y} \cdot 2dy = 2 \log y|_1^e = 2.
\end{aligned}$$

13. Z vpeljavo cilindričnih koordinat izračunaj trojni integral

$$\int\int\int_V z e^{x^2+y^2} dxdydz,$$

pri čemer je območje V dano z neenakostima $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ in $z \leq 2$.

Rešitev: Če se pri opisu integracijskega območja ali pri funkciji, ki jo integriramo, pojavi izraz x^2+y^2, običajno uvedemo v trojni integral nove spremenljivke in sicer cilindrične koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{in} \quad z = z.$$

Ko uvedemo nove koordinate v trojni integral, moramo upoštevati še Jacobijevo determinanto, ki je za cilindrične koordinate enaka $J = r$.

Ker je $x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, se v cilindričnih koordinatah izraz x^2+y^2 poenostavi v izraz r^2. Funkcija je v cilindričnih koordinatah enaka

$$z e^{x^2+y^2} = z e^{r^2},$$

območje pa je v cilindričnih koordinatah določeno z neenakostima

$$z \geq \sqrt{r^2} = r \quad \text{in} \quad z \leq 2.$$

Spremenljivka r je enaka razdalji od točke do osi z, zato vrednost r ne more biti negativna. Torej je minimalna vrednost spremenljivke z na območju V enaka 0 zaradi pogoja $z \geq r$, njena maksimalna vrednost pa je 2 zaradi pogoja $z \leq 2$. Pri neki določeni vrednosti spremenljivke z je $r \leq z$ in ker je seveda $r \geq 0$, zavzame r vrednosti med 0 in z. Območje je simetrično glede na os z, saj za spremenljivko φ nimamo nobenih pogojev, torej φ lahko zavzame katerokoli vrednost od 0 do 2π. Trojni integral v cilindričnih koordinatah je potem enak

$$\int\int\int_V ze^{x^2+y^2} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dz \int_0^z ze^{r^2} rdr.$$

Integral po spremenljivki φ lahko že izračunamo, integral po spremenljivki r pa bomo izračunali s pomočjo nove spremenljivke $t = r^2$, $dt = 2rdr$, ko je $r = 0$, je $t = 0$, ko je $r = z$, je $t = z^2$. Sledi

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dz \int_0^z ze^{r^2} rdr &= 2\pi \int_0^2 dz \int_0^{z^2} ze^t \frac{dt}{2} \\ &= \pi \int_0^2 z \left(e^t\right)\Big|_0^{z^2} dz = \pi \int_0^2 z \left(e^{z^2} - 1\right) dz \\ &= \pi \int_0^2 ze^{z^2} dz - \pi \int_0^2 zdz.\end{aligned}$$

Za prvi integral ponovno uvedemo novo spremenljivko $u = z^2$, $du = 2zdz$, ko je $z = 0$, je $u = 0$, in ko je $z = 2$, je $u = 4$. Torej je

$$\begin{aligned}\pi \int_0^2 ze^{z^2} dz - \pi \int_0^2 zdz &= \pi \int_0^4 e^u \frac{du}{2} - \pi \left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \left(e^u\right)\Big|_0^4 - 2\pi = \frac{\pi}{2}\left(e^4 - 1\right) - 2\pi = \frac{\pi}{2}(e^4 - 5).\end{aligned}$$

Trojni integral je enak $\frac{\pi}{2}(e^4 - 5)$.

14. Z vpeljavo sferičnih koordinat izračunaj trojni integral

$$\int\int\int_V \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz,$$

pri čemer je območje V dano z neenakostmi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \geq 0$ in $y \geq 0$.

Rešitev: Kadar pri opisu integracijskega območja ali pri funkciji, ki jo integriramo, nastopa izraz $x^2+y^2+z^2$, običajno uvedemo v trojni integral sferične koordinate

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \;\; y = r\sin\varphi\cos\theta \quad \text{in} \quad z = r\sin\theta.$$

Če uvedemo v trojni integral nove koordinate, moramo upoštevati še Jacobijevo determinanto, ki je za sferične koordinate enaka $J = r\cos\theta$.

V sferičnih koordinatah je $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, zato je funkcija, ki jo integriramo, v sferičnih koordinatah enaka

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1} = \frac{1}{r^2+1},$$

območje pa je v sferičnih koordinatah določeno z neenakostmi

$$r^2 \leq 1, \;\; r\cos\varphi\cos\theta \geq 0 \quad \text{in} \quad r\sin\varphi\cos\theta \geq 0.$$

Spremenljivka r je enaka razdalji od točke do osi koordinatnega izhodišča, zato vrednost r ne more biti negativna. V sferičnih koordinatah je kot $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, zato je $\cos\theta \geq 0$. Torej lahko zadnji dve neenakosti delimo z $r\cos\theta$ in dobimo, da mora biti $\cos\varphi \geq 0$ in $\sin\varphi \geq 0$. To pa je res za $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Za spremenljivko r imamo pogoj $0 \leq r \leq 1$, za kot θ pa ni pogojev, torej lahko zavzame vse vrednosti med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$.

Trojni integral v sferičnih koordinatah je enak

$$\int\int\int_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1} dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{r^2+1} r\cos\theta dr.$$

Integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$ in $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta$ lahko že izračunamo, integral po spremenljivki r pa izračunamo s pomočjo substitucije $t = r^2+1$, $dt = 2rdr$, ko je $r = 0$, je $t = 1$, in ko je $r = 1$, je $t = 2$. Potem je

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{r^2+1} r\cos\theta dr &= \frac{\pi}{2} \left(\sin\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2} \\ &= \frac{\pi}{4}(1-(-1)) \log t\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}\log 2.\end{aligned}$$

Torej je trojni integral enak $\frac{\pi}{2}\log 2$.

15. Telo je podano z neenakostima

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1 \quad \text{in} \quad z \geq \sqrt{x^2+y^2},$$

gostota telesa pa je

$$\rho(x,y,z) = 1 - z.$$

(a) Določi prostornino telesa.

(b) Določi maso telesa.

(c) Določi težišče telesa.

(d) Določi vztrajnostni moment telesa glede na os vrtenja z.

Rešitev:

(a) Prostornina telesa V je kar enaka

$$\text{vol}(V) = \int\int\int_V dxdydz.$$

V našem primeru bomo uvedli sferične koordinate $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, Jacobijeva determinanta $J = r\cos\theta$. Tudi v novih koordinatah je telo določeno z dvema neenakostima. Ker je $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, je $r^2 \leq 1$ in zato $r \leq 1$. Zapišimo v novih koordinatah še drugo neenakost

$$\begin{aligned} r\sin\theta &\geq \sqrt{(r\cos\varphi\cos\theta)^2 + (r\sin\varphi\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{r^2\cos^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} \\ &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

torej $\sin\theta \geq \cos\theta$. Ta neenakost pa velja za kote $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Dobimo

$$\begin{aligned} \int\int\int_V dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 (\sin\theta)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Torej je prostornina telesa enaka $\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(b) Masa telesa z gostoto ρ je enaka

$$m = \int\int\int_V \rho(x,y,z)dxdydz.$$

Ponovno uvedemo sferične koordinate in dobimo

$$\begin{aligned}
m &= \int\int\int_V (1-z)dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - r\sin\theta) r\cos\theta d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta - r^2\sin\theta\cos\theta)d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(r\sin\theta - r^2\frac{\sin^2\theta}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(r\sin\frac{\pi}{2} - r^2\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{2} - r\sin\frac{\pi}{4} + r^2\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{2}\right) dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(r - r^2\frac{1}{2} - r\frac{\sqrt{2}}{2} + r^2\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}\right) dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(r\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{4}r^2\right) dr \\
&= 2\pi \left(\frac{r^2}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right) \\
&= \pi\left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Torej je masa telesa enaka $\pi\left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(c) Naj bo točka $T(x_T, y_T, z_T)$ težišče telesa z gostoto ρ. Potem je masa telesa $m = \int\int\int_V \rho(x,y,z)dxdydz$, koordinate težišča pa izračunamo s pomočjo formul

$$x_T = \frac{\int\int\int_V x\rho(x,y,z)dxdydz}{\int\int\int_V \rho(x,y,z)dxdydz} = \frac{\int\int\int_V x\rho(x,y,z)dxdydz}{m},$$

$$y_T = \frac{\int\int\int_V y\rho(x,y,z)dxdydz}{\int\int\int_V \rho(x,y,z)dxdydz} = \frac{\int\int\int_V y\rho(x,y,z)dxdydz}{m}$$

in

$$z_T = \frac{\int\int\int_V z\rho(x,y,z)dxdydz}{\int\int\int_V \rho(x,y,z)dxdydz} = \frac{\int\int\int_V z\rho(x,y,z)dxdydz}{m}.$$

Če hočemo izračunati koordinate težišča, moramo torej izračunati x_T, y_T in z_T. Ker pa je v našem primeru telo simetrično glede na os z in tudi gostota je funkcija, ki je neodvisna od spremenljivk x in y, leži težišče telesa na osi z, torej je $x_T = 0$ in $y_T = 0$. Seveda bi dobili $x_T = y_T = 0$ tudi, če bi šli računati prvi koordinati težišča. Izračunati moramo torej le

$$z_T = \frac{\int\int\int_V z\rho(x,y,z)dxdydz}{m},$$

tretjo koordinato težišča. Ker že poznamo maso telesa, ki je $m = \pi\left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, moramo izračunati le še integral

$$\int\int\int_V z\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Zopet uporabimo sferične kordinate in dobimo

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V z\rho(x,y,z)dxdydz &= \int\int\int_V z(1-z)dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta(1 - r\sin\theta)r\cos\theta d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2\sin\theta - r^3\sin^2\theta)\cos\theta d\theta.
\end{aligned}$$

Integral po spremenljivki θ izračunamo tako, da uvedemo novo spremenljivko $t = \sin\theta$, $dt = \cos\theta d\theta$, ko je $\theta = \frac{\pi}{4}$, je $t = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, in ko je $\theta = \frac{\pi}{2}$, je $t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Torej je

$$\begin{aligned}
&2\pi \int_0^1 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \sin\theta - r^3 \sin^2\theta)\cos\theta d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 dr \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} (r^2 t - r^3 t^2) dt \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(r^2 \frac{t^2}{2} - r^3 \frac{t^3}{3} \right)\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(r^2 \frac{1}{2} - r^3 \frac{1}{3} - r^2 \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} + r^3 \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} \right) dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{3} r^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \right) dr \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{r^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r^4}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \right)\Bigg|_0^1 \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{24}.
\end{aligned}$$

Tretja koordinata težišča je potem

$$z_T = \frac{\frac{\pi\sqrt{2}}{24}}{\pi\left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{20 - 12\sqrt{2}},$$

težišče pa je v točki $\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{20-12\sqrt{2}}\right)$.

(d) Vztrajnostni moment telesa glede na os vrtenja z je

$$J_z = \int\int\int_V \rho(x,y,z)(x^2+y^2)dxdydz.$$

Ponovno uvedemo sferične koordinate, upoštevamo, da je $x^2 + y^2 = (r\cos\varphi\cos\theta)^2 + (r\sin\varphi\cos\theta)^2 = r^2\cos^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\cos^2\theta$, in dobimo

$$
\begin{aligned}
J_z &= \int\int\int_V (1-z)(x^2+y^2)dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - r\sin\theta) r^2 \cos^2\theta \, r\cos\theta d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (r^3\cos^2\theta - r^4\cos^2\theta\sin\theta)\cos\theta d\theta.
\end{aligned}
$$

Integral po spremenljivki θ rešimo tako, da pišemo $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, nato pa uvedemo novo spremenljivko $t = \sin\theta$, $dt = \cos\theta d\theta$, ko je $\theta = \frac{\pi}{4}$, je $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, in ko je $\theta = \frac{\pi}{2}$, je $t = 1$. Torej je

$$
\begin{aligned}
J_z &= 2\pi \int_0^1 dr \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (r^3(1-t^2) - r^4(1-t^2)t)dt \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(r^3 t - r^3\frac{t^3}{3} - r^4\frac{t^2}{2} + r^4\frac{t^4}{4} \right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{8-5\sqrt{2}}{12} r^3 - \frac{1}{16} r^4 \right) dr \\
&= 2\pi \left(\frac{8-5\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{r^4}{4} - \frac{1}{16} \cdot \frac{r^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{37}{120} - \frac{5\sqrt{2}}{24} \right).
\end{aligned}
$$

Vztrajnostno moment telesa glede na os vrtenja z je $\pi\left(\frac{37}{120} - \frac{5\sqrt{2}}{24}\right)$.

2.4 Teorija polja

16. Dano je skalarno polje

$$
u(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.
$$

(a) Določi nivojske ploskve skalarnega polja u.

(b) Izračunaj gradient skalarnega polja u

(c) Izračunaj smerni odvod skalarnega polja u v točki $(3,4,1)$ v smeri vektorja $(1,1,0)$.

Rešitev: Skalarno polje je preslikava iz $\mathbb{R}^3$ v $\mathbb{R}$. Torej skalarno polje u točki (x,y,z) v tridimenzionalnem prostoru $\mathbb{R}^3$ priredi realno število $u(x,y,z)$. Število včasih imenujemo tudi skalar.

(a) Nivojska ploskev skalarnega polja u je dana z enačbo $u(x,y,z)=c$, pri čemer je c konstanta. Za različne konstante dobimo različne nivojske ploskve. V našem primeru je enačba nivojske ploskve

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=c.$$

Če je $c=0$, potem je $x=y=0$ in dobimo degeneriran primer, ko je nivojska ploskev kar os z. Naj bo sedaj $c\neq 0$. Enačbo preuredimo in dobimo

$$z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}.$$

To pa je ravno enačba stožca z vrhom v točki $(0,0,0)$. Nivojske ploskve skalarnega polja u so torej stožci z vrhom v koordinatnem izhodišču.

(b) Gradient skalarnega polja u je vektorsko polje

$$\operatorname{grad} u(x,y,z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\right).$$

Torej moramo izračunati vse parcialne odvode skalarnega polja u. Dobimo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)=\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)=\frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}}$$

in

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)=-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}.$$

Gradient skalarnega polja u je

$$\operatorname{grad} u(x,y,z)=\left(\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\right).$$

(c) Smerni odvod skalarnega polja u v smeri vektorja $\vec{l}$ izračunamo po formuli

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(x,y,z) = \operatorname{grad} u(x,y,z) \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

V našem primeru je $\vec{l} = (1,1,0)$, iščemo pa smerni odvod v točki $(3,4,1)$. Gradient skalarnega polja smo že izračunali zato dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(x,y,z) &= \left(\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2} \right) \cdot \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x+y}{z\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Smerni odvod skalarnega polja v točki $(3,4,1)$ je potem

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(3,4,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3+4}{1\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

17. Izračunaj divergenco in rotor vektorskega polja $\vec{v}$.

(a)

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(\frac{x-yz}{x}, \frac{y-xz}{y}, \frac{z-xy}{z} \right)$$

(b)

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{r\vec{r}}{2}$$

Rešitev: Vektorsko polje je preslikava iz $\mathbb{R}^3$ v $\mathbb{R}^3$. Torej vektorsko polje $\vec{v}$ točki (x,y,z) v tridimenzionalnem prostoru $\mathbb{R}^3$ priredi neko točko $\vec{v}(x,y,z)$ prav tako v $\mathbb{R}^3$. Točke v prostoru $\mathbb{R}^3$ identificiramo z njihovimi krajevnimi vektorji, zato vektorsko polje $\vec{v}$ priredi vektorju nek drug vektor.

Divergenca vektorskega polja $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je skalarno polje

$$\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}(v_1,v_2,v_3) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Rotor vektorskega polja $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je vektorsko polje

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{v} &= \mathrm{div}\left(\frac{x - yz}{x}, \frac{y - xz}{y}, \frac{z - xy}{z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x - yz}{x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y - xz}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z - xy}{z} \right) \\ &= \frac{x - (x - yz)}{x^2} + \frac{y - (y - xz)}{y^2} + \frac{z - (z - xy)}{z^2} \\ &= \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x - yz}{x} & \dfrac{y - xz}{y} & \dfrac{z - xy}{z} \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{x}{z} + \frac{x}{y}, \frac{y}{z} - \frac{y}{x}, -\frac{z}{y} + \frac{z}{x} \right). \end{aligned}$$

(b) Z $\vec{r}$ označimo krajevni vektor $\vec{r} = (x, y, z)$, z r pa njegovo dolžino

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Potem je

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{r\vec{r}}{2}\right) &= \operatorname{div}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)}{2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right. \\
&\qquad \left. + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sqrt{x^2+y^2+z^2} + z\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2r.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} & \dfrac{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} & \dfrac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{yz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{yz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\right. \\
&\qquad -\frac{xz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{xz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\
&\qquad \left.\frac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= (0,0,0).
\end{aligned}
$$

18. Preveri, če je vektorsko polje $\vec{v}$ potencialno. Če je $\vec{v}$ potencialno, poišči potencial.

    (a)
    $$\vec{v}(x,y,z) = \left(2xy^2z^2 - xz, 2x^2yz^2 - xz, 2x^2y^2z - yz\right).$$

(b)
$$\vec{v}(x, y, z) = (-zy\sin(xy), -zx\sin(xy), 1 + \cos(xy)) \,.$$

Rešitev: Vektorsko polje $\vec{v}$ je potencialno, če obstaja tako skalarno polje u, da je
$$\vec{v}(x, y, z) = \mathrm{grad} u(x, y, z).$$
To skalarno polje imenujemo potencial vektorskega polja $\vec{v}$. Ali je vektorsko polje $\vec{v}$ potencialno, preverimo tako, da izračunamo rotor vektorskega polja $\vec{v}$. Če je rotor različen od nič, potem vektorsko polje $\vec{v}$ ni potencialno. Če pa je $\mathrm{rot}\vec{v} = (0, 0, 0)$, lahko računamo potencial.

(a)
$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{v} &= \mathrm{rot}\left(2xy^2z^2 - xz, 2x^2yz^2 - xz, 2x^2y^2z - yz\right) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2z^2 - xz & 2x^2yz^2 - xz & 2x^2y^2z - xy \end{vmatrix} \\
&= \big(4x^2yz - x - 4x^2yz + x, -4xy^2z + y + 4xy^2z - x, \\
&\qquad 4xyz^2 - z - 4xyz^2\big) \\
&= (0, -x + y, -z).
\end{aligned}$$

Vidimo, da je rotor različen od nič, zato vektorsko polje ni potencialno.

(b)
$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{v} &= \mathrm{rot}\left(-zy\sin(xy), -zx\sin(xy), 1 + \cos(xy)\right) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -zy\sin(xy) & -zx\sin(xy) & 1 + \cos(xy) \end{vmatrix} \\
&= (-\sin(xy)x + x\sin(xy), -\sin(xy)y + y\sin(xy), \\
&\qquad -z\sin(xy) - zx\cos(xy)y + z\sin(xy) + zy\cos(xy)x) \\
&= (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Rotor vektorskega polja $\vec{v}$ je enak 0, vektorsko polje je potencialno, zato lahko izračunamo skalarno polje u, za katerega bo

$$\vec{v} = \mathrm{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Torej mora veljati

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) &= -zy\sin(xy),\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) &= -zx\sin(xy),\\
\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) &= 1 + \cos(xy).
\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= \int -zy\sin(xy)dx = -zy\frac{-\cos(xy)}{y} + K(y, z)\\
&= z\cos(xy) + K(y, z).
\end{aligned}$$

Pri računanju integrala moramo upoštevati, da je u funkcija treh spremenljivk in zato ne dobimo na koncu konstante, temveč funkcijo, ki je odvisna samo od spremenljivk y in z. Funkcijo K določimo s pomočjo preostalih dveh enačb. Velja namreč

$$-zx\sin(xy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) = z(-\sin(xy))x + \frac{\partial K}{\partial y}(y, z),$$

torej je

$$\frac{\partial K}{\partial y}(y, z) = 0.$$

Sledi, da je funkcija K neodvisna od spremenljivke y, torej je

$$K(y, z) = L(z)$$

in

$$u(x, y, z) = z\cos(xy) + L(z).$$

Funkcijo L spremenljivke z določimo s pomočjo še zadnje enakosti

$$1 + \cos(xy) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = \cos(xy) + L'(z).$$

Dobimo, da je

$$L'(z) = 1, \quad \text{torej} \quad L(z) = z + C,$$

pri čemer je C konstanta. Iskano skalarno polje je

$$u(x, y, z) = z\cos(xy) + z + C.$$

2.5 Krivuljni in ploskovni integral

19. Izračunaj krivuljni integral prve vrste

$$\int_C (x^2 - 2xy + z^2)ds,$$

pri čemer je krivulja C daljica od točke $T_1(1,1,1)$ do točke $T_2(2,3,4)$.

Rešitev: Če hočemo izračunati krivuljni integral

$$\int_C f(x,y,z)ds$$

po krivulji C od začetne točke T_1 do končne točke T_2, potem najprej parametriziramo krivuljo C, torej jo zapišemo kot $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, nato določimo vrednosti parametrov t_1 in t_2, tako da je $\vec{r}(t_1) = T_1$ in $\vec{r}(t_2) = T_2$. Ker je $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$, je krivuljni integral potem enak

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

V našem primeru je krivulja daljica od točke $T_1(1,1,1)$ do točke $T_2(2,3,4)$, torej je

$$\vec{r}(t) = (1,1,1) + t((2,3,4) - (1,1,1)) = (1+t, 1+2t, 1+3t),$$

pri čemer je točka na daljici T_1T_2, če je $t \in [0,1]$. Ker je za točke na krivulji $x(t) = 1+t$, $y(t) = 1+2t$ in $z(t) = 1+3t$, je $\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = 2$ in $\dot{z}(t) = 3$. Torej je

$$\begin{aligned}
&\int_C (x^2 - 2xy + z^2)ds \\
&\quad = \int_0^1 \left((1+t)^2 - 2(1+t)(1+2t) + (1+3t)^2\right)\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\, dt \\
&\quad = \sqrt{14}\int_0^1 \left(1 + 2t + t^2 - 2(1 + 3t + 2t^2) + 1 + 6t + 9t^2\right)\, dt \\
&\quad = \sqrt{14}\int_0^1 \left(2t + 6t^2\right)\, dt = \sqrt{14}\left(2\frac{t^2}{2} + 6\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 3\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

20. Izračunaj krivuljni integral druge vrste

$$\int_C \left(e^x + \frac{z}{y}, \frac{xz}{y^2}, z^2\right) d\vec{r},$$

pri čemer je krivulja C dana v parametrični obliki

$$\vec{r}(t) = \left(2t^2, t, \sin t\right), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Rešitev: Naj bo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorsko polje. Če želimo izračunati krivuljni integral druge vrste

$$\int_C \vec{v} d\vec{r}$$

po krivulji C, potem najprej parametriziramo krivuljo C, torej jo zapišemo v obliki $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, nato pa izračunamo

$$d\vec{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\, dt.$$

Določimo še vrednosti parametrov t_1 in t_2, tako da je $\vec{r}(t_1) = T_1$ in $\vec{r}(t_2) = T_2$. Krivuljni integral je potem enak

$$\int_C \vec{v} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left(v_1(t)\dot{x}(t) + v_2(t)\dot{y}(t) + v_3(t)\dot{z}(t)\right)\, dt.$$

V našem primeru je krivulja $\vec{r}(t) = (2t^2, t, \sin t)$ že parametrizirana. Izračunamo

$$d\vec{r} = (4t, 1, \cos t).$$

Torej je

$$\begin{aligned}
&\int_C \left(e^x + \frac{z}{y}, \frac{xz}{y^2}, z^2\right) d\vec{r} \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\left(e^{2t^2} + \frac{\sin t}{t}\right) 4t + \frac{2t^2 \sin t}{t^2} \cdot 1 + \sin^2 t \cos t\right) dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2t^2} 4t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 6 \sin t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t \cos t\, dt.
\end{aligned}$$

Prvi integral rešimo s pomočjo substitucije $u = 2t^2$, $du = 4t\, dt$, če je $t = \frac{\pi}{2}$, je $u = \frac{\pi^2}{2}$, in če je $t = \pi$, je $u = 2\pi^2$. Tretji integral pa rešimo s pomočjo substitucije $v = \sin t$, $dv = \cos t\, dt$, če je $t = \frac{\pi}{2}$, je $v = 1$, in če je $t = \pi$, je $v = -1$. Dobimo

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2t^2} 4t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 6 \sin t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t \cos t\, dt \\
&= \int_{\frac{\pi^2}{2}}^{2\pi^2} e^u\, du - 6 \cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_1^{-1} v^2\, dv = e^u\Big|_{\frac{\pi^2}{2}}^{2\pi^2} + 6 + \frac{v^3}{3}\Big|_1^{-1} \\
&= e^{2\pi^2} - e^{\frac{\pi^2}{2}} + 6 + \frac{1}{3}(-1-1) = e^{2\pi^2} - e^{\frac{\pi^2}{2}} + \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Torej je krivuljni integral druge vrste enak

$$\int_C \left(e^x + \frac{z}{y}, \frac{xz}{y^2}, z^2 \right) d\vec{r} = e^{2\pi^2} - e^{\frac{\pi^2}{2}} + \frac{16}{3}.$$

21. Izračunaj ploskovni integral prve vrste

$$\int\int_S \left(1 + 4\sqrt{z(x^2+y^2)}\right) dS,$$

pri čemer je ploskev S dana z $z = x^2 + y^2$ in $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rešitev: Če hočemo izračunati ploskovni integral prve vrste

$$\int\int_S f(x,y,z) dS$$

po ploskvi S, moramo ploskev S najprej parametrizirati z dvema parametroma $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, parametra u in v sta z območja D, nato pa izračunamo $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$ in $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$. Potem je

$$\int\int_S f(x,y,z) dS = \int\int_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

V našem primeru ploskev parametriziramo s polarnim kotom φ in razdaljo r, torej $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ in $z = x^2 + y^2 = r^2$. Torej je

$$\vec{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r^2).$$

Izračunamo

$$\vec{r}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r) \quad \text{in} \quad \vec{r}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0),$$

zato je

$$\begin{aligned}
E &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r) \\
&= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 4r^2 = 1 + 4r^2, \\
F &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r) \cdot (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0) = 0, \\
G &= (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0) \cdot (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0) \\
&= r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = r^2
\end{aligned}$$

in

$$\sqrt{EG - F^2} = r\sqrt{1+4r^2}.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned}
&\int\int_S \left(1 + 4\sqrt{z(x^2+y^2)}\right) dS \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1 + 4\sqrt{r^2 \cdot r^2}\right) r\sqrt{1+4r^2}\, dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}} r\, dr.
\end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = 1 + 4r^2$, $dt = 8r\,dr$, če je $r = 0$, je $t = 1$, in če je $r = 1$, je $t = 5$. Potem je

$$2\pi \int_0^1 \left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}} r\, dr = 2\pi \int_1^5 t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{8} = \frac{\pi}{4} \cdot \left.\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_1^5 = \frac{\pi}{10}\left(5^{\frac{5}{2}} - 1\right).$$

Torej je ploskovni integral prve vrste

$$\int\int_S \left(1 + 4\sqrt{z(x^2+y^2)}\right) dS = \frac{\pi}{10}\left(5^{\frac{5}{2}} - 1\right).$$

22. Izračunaj ploskovni integral druge vrste

$$\int\int_S \left(e^{y+1}, \frac{1}{x+y}, \frac{1}{1+z}\right) d\vec{S},$$

pri čemer je ploskev S podana z $z = x^2$, $|x| \leq 1$ in $|y| \leq 1$.

Rešitev: Naj bo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorsko polje. Če bi radi izračunali ploskovni integral druge vrste

$$\int\int_S \vec{v} d\vec{S}$$

po ploskvi S, moramo ploskev S najprej parametrizirati z dvema parametroma $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, parametra u in v sta z območja D, nato pa izračunamo dvojni integral

$$\int\int_S \vec{v}d\vec{S} = \int\int_D (v_1(u,v), v_2(u,v), v_3(u,v)) \cdot (\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v))dudv.$$

V našem primeru bomo za parametra vzeli kar spremenljivki x in y. Potem je $\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2)$, $-1 \leq x \leq 1$ in $-1 \leq y \leq 1$. Izračunamo

$$\vec{r}_x(x,y) = (1, 0, 2x) \quad \text{in} \quad \vec{r}_y(x,y) = (0, 1, 0),$$

torej je

$$\vec{r}_x(x,y) \times \vec{r}_y(x,y) = (1, 0, 2x) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2x, 0, 1)\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
&\int\int_S \left(e^{y+1}, \frac{1}{x+y}, \frac{1}{1+z}\right) d\vec{S} \\
&= \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \left(e^{y+1}, \frac{1}{x+y}, \frac{1}{1+x^2}\right) \cdot (-2x, 0, 1)\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \left(e^{y+1}(-2x) + \frac{1}{1+x^2}\right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-2xe^{y+1} + \frac{y}{1+x^2}\right)\Big|_{-1}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-2xe^2 + \frac{1}{1+x^2} + 2xe^0 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(2x\left(1-e^2\right) + \frac{2}{1+x^2}\right) dx \\
&= \left(x^2\left(1-e^2\right) + 2\arctan x\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= 2\arctan 1 - 2\arctan(-1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

23. Z uporabo Greenove formule izračunaj krivuljni integral

$$\int_C y^2dx - xdy,$$

pri čemer je krivulja C rob trikotnika z oglišči $(0,0)$, $(0,1)$ in $(1,0)$. Integriramo v pozitivni smeri.

Rešitev: Krivuljni integral po zaključeni krivulji C, ki je rob nekega območja D v ravnini (xy), lahko prevedemo na dvojni integral po tem območju. Greenova formula pravi

$$\int_C (f(x,y)dx + g(x,y)dy) = \int\int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

V našem primeru je $f(x,y) = y^2$ in $g(x,y) = -x$. Uporabimo Greenovo formulo in dobimo, da je

$$\int_C y^2dx - xdy = \int\int_D (-1-2y)\, dxdy,$$

pri čemer je D trikotnik

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}.$$

Izračunamo dvojni integral:

$$\begin{aligned}
\int\int_D (-1-2y)\, dx\, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-1-2y)\, dy \\
&= \int_0^1 dx \left(-y - 2 \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x} = \int_0^1 (-(1-x) - (1-x)^2)\, dx \\
&= \int_0^1 (-x^2 + 3x - 2)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Dobili smo, da je

$$\int_C y^2dx - xdy = -\frac{5}{6}.$$

24. Z uporabo Stokesove formule izračunaj krivuljni integral

$$\int_C (x,y,z)d\vec{r},$$

pri čemer je C sklenjena krivulja, ki je presek ploskev $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ in $x^2 + (z-1)^2 = 1$, $y \geq 0$.

Rešitev: Krivuljni integral vektorskega polja $\vec{v}$ po zaključeni krivulji C je enak ploskovnemu integralu rotorja tega polja po ploskvi S, katerega rob je krivulja C. Torej Stokesova formula pravi, da je

$$\int_C \vec{v} d\vec{r} = \int\int_S \mathrm{rot}\vec{v}\, d\vec{S}.$$

Ker je

$$\mathrm{rot}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0),$$

je po Stokesovi formuli integral

$$\int_C (x,y,z) d\vec{r} = 0$$

po vsaki, še tako čudni, sklenjeni krivulji.

25. Z uporabo Gaussove formule izračunaj ploskovni integral

$$\int\int_S (x^2 z, x^2+z^2, z^2 x) d\vec{S},$$

pri čemer je ploskev S rob območja, danega z neenakostima $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $x \geq 0$ in $z \geq 0$.

Rešitev: Ploskovni integral vektorskega polja $\vec{v}$ po zaključeni ploskvi S je enak trojnemu integralu divergence tega polja po območju V, katerega rob je ploskev S. Torej Gaussova formula pravi, da je

$$\int\int_S \vec{v} d\vec{S} = \int\int\int_V \mathrm{div}\vec{v}\, dxdydz.$$

V našem primeru računamo ploskovni integral po zaključeni ploskvi, zato lahko uporabimo Gaussovo formulo. Izračunamo

$$\mathrm{div}(x^2 z, x^2+z^2, z^2 x) = 2xz + 2zx = 4xz.$$

Torej je

$$\int\int (x^2 z, x^2+z^2, z^2 x) d\vec{S} = \int\int\int_V 4xz\, dxdydz.$$

V trojni integral uvedemo sferične koordinate $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$ in $z = r\sin\theta$, Jacobijeva determinanta je $J = r^2\cos\theta$. Potem je $r^2 \leq 1$, torej $r \leq 1$, zaradi $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ zaradi $x \geq 0$, in $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ zaradi $z \geq 0$. Sledi

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_V 4xz\, dxdydz \\
&\quad = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4r\cos\varphi\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r^2\cos\theta d\theta \\
&\quad = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin\theta d\theta
\end{aligned}$$

Zadnji integral izračunamo s substitucijo $t = \cos\theta$, $dt = -\sin\theta d\theta$, ko je $\theta = 0$, je $t = 1$, in ko je $\theta = \frac{\pi}{2}$, je $t = 0$. Sledi

$$\begin{aligned}
&4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin\theta d\theta \\
&\quad = 4\left(\sin\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 \cdot \int_1^0 t^2(-dt) \\
&\quad = 4\cdot 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^0 = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Dobili smo, da je

$$\int\int_S (x^2z, x^2+z^2, z^2x)d\vec{S} = \frac{8}{15}.$$

3 Kompleksna analiza

3.1 Kompleksne funkcije

1. Preveri, ali je funkcija f analitična.

   (a)
   $$f(z) = (\mathrm{Re}z)^2 - z\overline{z}$$

   (b)
   $$f(z) = \frac{\overline{z}^2 + z + 4\mathrm{i}(\mathrm{Re}z)(\mathrm{Im}z)}{\mathrm{i}}$$

Rešitev: Kompleksno funkcijo f kompleksne spremenljivke $z = x + \mathrm{i}y$ lahko zapišemo v obliki $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, pri čemer sta u in v realni funkciji dveh spremenljivk. Ali je funkcija f analitična ali ne, preverimo s pomočjo Cauchy-Riemannovih enačb

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{in} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Funkcija f je namreč analitična natanko tedaj, ko zadošča Cauchy-Riemannovima enačbama.

(a) Kompleksno funkcijo f kompleksne spremenljivke $z = x + \mathrm{i}y$ zapišemo najprej kot vsoto njenega realnega dela u in imaginarnega dela v

$$f(z) = x^2 - (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - (x^2 - xy\mathrm{i} + xy\mathrm{i} + y^2) = -y^2.$$

Torej je $u(x, y) = -y^2$ in $v(x, y) = 0$. Izračunamo $u_x(x, y) = 0$, $v_y(x, y) = 0$ in dobimo, da je $u_x = v_y$. Vendar pa je $u_y(x, y) = -2y$ in $v_x(x, y) = 0$, torej $u_y \neq -v_x$, zato funkcija f ni analitična.

(b) Ponovno kompleksno funkcijo f najprej zapišemo kot vsoto njenega realnega dela u in imaginarnega dela v

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(x - \mathrm{i}y)^2 + x + \mathrm{i}y + 4\mathrm{i}xy}{\mathrm{i}} \\ &= \frac{x^2 - 2xy\mathrm{i} - y^2 + x + \mathrm{i}y + 4\mathrm{i}xy}{\mathrm{i}} \\ &= \frac{x^2 - y^2 + x + \mathrm{i}(y + 2xy)}{\mathrm{i}} \cdot \frac{-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} \\ &= y + 2xy - \mathrm{i}(x^2 - y^2 + x). \end{aligned}$$

Torej je

$$u(x, y) = y + 2xy \quad \text{in} \quad v(x, y) = -x^2 + y^2 - x.$$

Izračunamo $u_x(x, y) = 2y$, $u_y(x, y) = 1 + 2x$, $v_x(x, y) = -2x - 1$ in $v_y(x, y) = 2y$. Hitro se prepričamo, da je $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$, torej je funkcija f analitična.

2. Poišči analitično funkcijo f, za katero je $f(i) = 0$, realni del funkcije f pa je
$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y + x - 1.$$

Rešitev: Funkcija f je analitična, zato za njen realni del u in imaginarni del v veljata Cauchy-Riemannovi enačbi $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$. Izračunamo
$$u_x(x,y) = -6xy + 1$$
in to mora biti enako $v_y(x,y)$. Torej je
$$v(x,y) = \int(-6xy+1)dy = -3xy^2 + y + K(x).$$
Ker je v funkcija dveh spremenljivk, smo pri integriranju namesto konstante dobili funkcijo K, ki je odvisna od spremenljivke x. Funkcijo K določimo s pomočjo druge Cauchy-Riemannove enačbe $u_y = -v_x$. Zato najprej izračunamo
$$u_y(x,y) = 3y^2 - 3x^2,$$
nato pa izenačimo
$$3y^2 - 3x^2 = u_y(x,y) = -v_x(x,y) = -(-3y^2 + K'(x)).$$
Torej je
$$K'(x) = 3x^2 \quad \text{in} \quad K(x) = x^3 + C.$$
Dobimo, da je
$$v(x,y) = -3xy^2 + y + x^3 + C,$$
funkcija f pa je
$$f(z) = y^3 - 3x^2y + x - 1 + \mathrm{i}(-3xy^2 + y + x^3 + C).$$
Ker je $f(i) = 0$, vstavimo za $x = 0$ in $y = 1$ in dobimo
$$1 - 1 + \mathrm{i}(1 + C) = 0,$$
torej je $C = -1$.

Če hočemo funkcijo f, namesto kot funkcijo spremenljivk x in y, zapisati kot funkcijo spremenljivke z, vstavimo
$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{in} \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}},$$

poračunamo in dobimo

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}\right)^3 - 3\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} + \frac{z+\overline{z}}{2} - 1 \\
&\quad + \mathrm{i}\left(-3\frac{z+\overline{z}}{2}\left(\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} + \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^3 - 1\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{8}(z^3 - 3z^2\overline{z} + 3z\overline{z}^2 - \overline{z}^3) + \frac{3\mathrm{i}}{8}(z^3 + z^2\overline{z} - z\overline{z}^2 - \overline{z}^3) \\
&\quad + \frac{3\mathrm{i}}{8}(z^3 - z^2\overline{z} - z\overline{z}^2 + \overline{z}^3) + \frac{\mathrm{i}}{8}(z^3 + 3z^2\overline{z} + 3z\overline{z}^2 + \overline{z}^3) \\
&\quad + z - 1 - \mathrm{i} \\
&= \mathrm{i}z^3 + z - 1 - \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

3. Dana je funkcija

$$f(z) = \frac{z\cosh(\mathrm{i}z^2)}{z+1}.$$

Določi $f(\mathrm{i})$.

Rešitev: Hiperbolični kosinus je enak $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, torej je

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{i}) &= \frac{\mathrm{i}\cosh(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2)}{\mathrm{i}+1} = \frac{\mathrm{i}\cosh(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}+1}\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\cdot\frac{e^{-\mathrm{i}}+e^{\mathrm{i}}}{2} \\
&= \frac{1+\mathrm{i}}{4}(\cos(-1) + \mathrm{i}\sin(-1) + \cos 1 + \mathrm{i}\sin 1) \\
&= \frac{1+\mathrm{i}}{2}\cos 1.
\end{aligned}$$

4. Reši enačbo

$$\sin z - \mathrm{i} = 0.$$

Rešitev: V izraz $\sin z - \mathrm{i}$ vstavimo $z = x + \mathrm{i}y$, pri čemer upoštevamo, da je $\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$, in dobimo

$$
\begin{aligned}
\sin z - \mathrm{i} &= \frac{e^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} - e^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}}{2\mathrm{i}} - \mathrm{i} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(e^{\mathrm{i}x-y} - e^{-\mathrm{i}x+y}\right) - \mathrm{i} \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(e^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) - e^{y}(\cos x - \mathrm{i}\sin x)\right) - \mathrm{i} \\
&= \frac{1}{2}\sin x\left(e^{-y} + e^{y}\right) - \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\cos x\left(e^{-y} - e^{y}\right) + 1\right).
\end{aligned}
$$

Ker je $\sin z - \mathrm{i} = 0$, mora biti realni in imaginarni del enak nič. Najprej obravnavamo realni del

$$\frac{1}{2}\sin x\left(e^{-y} + e^{y}\right) = 0.$$

Ker je izraz $\frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right)$ vedno pozitiven, mora biti $\sin x = 0$, torej je

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ločimo dve možnosti. Če je k sodo število, potem je $\cos(k\pi) = 1$. Tudi imaginarni del mora biti enak nič, tako da v prvem primeru dobimo

$$\frac{1}{2}\left(e^{-y} - e^{y}\right) + 1 = 0.$$

Enačbo pomnožimo z $2e^{y}$ in jo preoblikujemo

$$e^{2y} - 2e^{y} - 1 = 0.$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = e^{y}$ in dobimo kvadratno enačbo

$$t^2 - 2t - 1 = 0,$$

katere rešitvi sta

$$t_1 = \frac{2 + \sqrt{4+4}}{2} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{in} \quad t_2 = \frac{2 - \sqrt{4+4}}{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

Ker je e^{y} za vsako vrednost spremenljivke y pozitivno število, druga rešitev kvadratne enačbe ne pride v poštev. Torej je

$$e^{y} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{in zato} \quad y = \log(1 + \sqrt{2}).$$

Obravnavati moramo še primer, ko je k liho število. Potem je $\cos(k\pi) = -1$. Imaginarni del enačbe mora biti enak nič, torej v drugem primeru dobimo

$$-\frac{1}{2}\left(e^{-y} - e^{y}\right) + 1 = 0.$$

Tudi to enačbo pomnožimo z $2e^y$ in jo preoblikujemo

$$e^{2y} + 2e^y - 1 = 0.$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = e^y$ in dobimo kvadratno enačbo

$$t^2 + 2t - 1 = 0,$$

katere rešitvi sta

$$t_1 = \frac{-2 + \sqrt{4+4}}{2} = -1 + \sqrt{2} \quad \text{in} \quad t_2 = \frac{-2 - \sqrt{4+4}}{2} = -1 - \sqrt{2}.$$

Ponovno upoštevamo, da je e^y za vsako vrednost spremenljivke y pozitivno število, zato druga rešitev kvadratne enačbe ne pride v poštev. Torej je

$$e^y = -1 + \sqrt{2} \quad \text{in zato} \quad y = \log(-1 + \sqrt{2}).$$

V odvisnosti od tega, ali je k sodo ali liho število, smo dobili različni rešitvi. Za sode k so rešitve $k\pi + \mathrm{i}\log(1+\sqrt{2})$, za lihe k pa $k\pi + \mathrm{i}\log(-1+\sqrt{2})$. Lahko pa rešitve zapišemo tudi enotno. Rešitve kompleksne enačbe so kompleksna števila

$$k\pi + \mathrm{i}\log((-1)^k + \sqrt{2}).$$

3.2 Integracija v kompleksni ravnini

5. Izračunaj integral

$$\int_C (3\overline{z} - 2z)dz,$$

pri čemer je krivulja C dana s predpisom $|z| = 1$ in $\mathrm{Re}z \geq 0$.

Rešitev: Integral funkcije f kompleksne spremenljivke $z = x + \mathrm{i}y$ po krivulji C izračunamo kot krivuljni integral druge vrste

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y))(dx + \mathrm{i}dy) \\ &= \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + \mathrm{i}\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy,\end{aligned}$$

pri čemer je u realni in v imaginarni del funkcije f.

Če ima kompleksna funkcija kako lepo lastnost, če je na primer analitična, potem raje računamo integral take funkcije na kakšen drug način.

V našem primeru funkcija f ni analitična, saj konjugiranje ni analitična funkcija. Integral moramo torej izračunati kot krivuljni integral. Najprej parametriziramo krivuljo C. Krivulja C je desna polovica krožnice s polmerom 1 in središčem v koordinatnem izhodišču, torej jo lahko parametriziramo

$$x = \cos t, \;\; y = \sin t \quad \text{in} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Potem je

$$dx = \dot{x}\, dt = -\sin t\, dt \quad \text{in} \quad dy = \dot{y}\, dt = \cos t\, dt.$$

Ker je

$$\begin{aligned} f(z) &= 3(x - \mathrm{i}y) - 2(x + \mathrm{i}y) = 3x - 3y\mathrm{i} - 2x - 2y\mathrm{i} \\ &= x - 5y\mathrm{i}. \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C xdx - (-5y)dy + \mathrm{i} \int_C (-5y)dx + xdy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t(-\sin t) + 5 \sin t \cos t)dt \\ &\quad + \mathrm{i} \int_{-\pi}^{\pi} (-5 \sin t(-\sin t) + \cos t \cos t)dt. \end{aligned}$$

Prvi integral $\int_{-\pi}^{\pi} 4 \sin t \cos t dt$ je integral lihe funkcije na simetričnem intervalu in zato enak nič. Drugi integral pa izračunamo z uporabo dvojnih kotov

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (5 \sin^2 t + \cos^2 t)dt &= \int_{-\pi}^{\pi} (4 \sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t)dt \\ = \int_{-\pi}^{\pi} (4 \sin^2 t + 1)dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(4 \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2} + 1\right) dt \\ = \int_{-\pi}^{\pi} (3 - 2\cos(2t))\ dt &= (3t - \sin(2t))|_{-\pi}^{\pi} = 6\pi. \end{aligned}$$

Torej je

$$\int_C (3\overline{z} - 2z)dz = 6\pi\mathrm{i}.$$

6. Izračunaj integral

$$\int_C (e^{\mathrm{i}z} - \mathrm{i}z^2)dz$$

od točke $z_1 = \mathrm{i}$ do točke $z_2 = \pi - \mathrm{i}$.

Rešitev: Funkcija $e^{\mathrm{i}z} - \mathrm{i}z^2$ je analitična, zato je integral te funkcije neodvisen od poti. Torej je

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{i}}^{\pi-\mathrm{i}} (e^{\mathrm{i}z} - \mathrm{i}z^2)dz &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{\mathrm{i}} - \mathrm{i}\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{\mathrm{i}}^{\pi-\mathrm{i}} \\ &= -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\pi+1} - \mathrm{i}\frac{(\pi-\mathrm{i})^3}{3} + \mathrm{i}e^{-1} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{i}^3}{3} \\ &= -\mathrm{i}e(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) - \frac{\mathrm{i}}{3}(\pi^3 - 3\mathrm{i}\pi^2 - 3\pi + \mathrm{i}) + \mathrm{i}e^{-1} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} - \pi^2 + \mathrm{i}\left(e + e^{-1} - \frac{\pi^3}{3} + \pi\right)\end{aligned}$$

7. Izračunaj integral

$$\oint_C \frac{z\sin z}{(z-\mathrm{i})^2}dz$$

po zaključeni krivulji $C : |z - \mathrm{i}| = 1$.

Rešitev: Če je f analitična funkcija in je C zaključena krivulja, potem po Cauchyevi formuli velja

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

V našem primeru je $z_0 = \mathrm{i}$, funkcija $f(z) = z\sin z$ in $n = 1$. Najprej izračunamo

$$f'(z) = \sin z + z\cos z$$

in nato

$$\begin{aligned}f'(\mathrm{i}) &= \sin\mathrm{i} + \mathrm{i}\cos\mathrm{i} = \frac{e^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - e^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} + e^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2} \\ &= -\mathrm{i}\frac{e^{-1} - e}{2} + \mathrm{i}\frac{e^{-1} + e}{2} = \mathrm{i}e.\end{aligned}$$

Torej je

$$\oint_C \frac{z\sin z}{(z-\mathrm{i})^2}dz = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}e = -2\pi e.$$

3.3 Laurentova vrsta

8. Razvij funkcijo
$$e^{\mathrm{i}(z+\frac{\pi}{2})}$$
v Laurentovo vrsto okrog točke $z_0 = 0$.

Rešitev: Pri razvoju funkcije si pomagamo z razvojem eksponentne funkcije
$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$
Ker je
$$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = 1,$$
je
$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}(z+\frac{\pi}{2})} &= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} e^{\mathrm{i}z} = \mathrm{i}\left(1 + \frac{(\mathrm{i}z)}{1!} + \frac{(\mathrm{i}z)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}z)^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \mathrm{i} - z - \frac{\mathrm{i}z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \end{aligned}$$

9. Razvij funkcijo
$$\frac{z}{2\mathrm{i}}\sin\frac{2\mathrm{i}}{z}$$
v Laurentovo vrsto okrog točke $z_0 = 0$.

Rešitev: Pri razvoju funkcije si pomagamo z razvojem sinusne funkcije
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$
Torej je
$$\begin{aligned} \frac{z}{2\mathrm{i}}\sin\frac{2\mathrm{i}}{z} &= \frac{z}{2\mathrm{i}}\left(\frac{2\mathrm{i}}{z} - \frac{\left(\frac{2\mathrm{i}}{z}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{2\mathrm{i}}{z}\right)^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{2\mathrm{i}}{z}\right)^2}{3!} + \frac{\left(\frac{2\mathrm{i}}{z}\right)^4}{5!} - \cdots \\ &= 1 + \frac{2}{3z^2} + \frac{2}{15z^4} + \cdots \end{aligned}$$

10. Zapiši prve tri neničelne člene pri razvoju funkcije

$$\frac{1}{1-z^2}$$

v Laurentovo vrsto okrog točke $z_0 = \mathrm{i}$.

Rešitev: Če razvijamo funkcijo v Laurentovo vrsto okrog točke z_0, ki je različna od nič, uvedemo novo spremenljivko $w = z - z_0$ in razvijemo novo funkcijo, ki je odvisna od spremenljivke w, v Laurentovo vrsto okrog točke $w_0 = 0$. V našem primeru pišemo $w = z - \mathrm{i}$, torej je $z = w + \mathrm{i}$ in dobimo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z^2} &= \frac{1}{1-(w+\mathrm{i})^2} = \frac{1}{(1-(w+\mathrm{i}))(1+w+\mathrm{i})}\\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-w-\mathrm{i}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+w+\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

Pri razvoju nove funkcije pa si bomo pomagali z razvojem funkcije

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots,$$

pri čemer vrsta konvergira, če je $|z| < 1$. Vsakega izmed sumandov razvijemo v vrsto

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}}{1-w-\mathrm{i}} &= \frac{1}{2(1-\mathrm{i})} \cdot \frac{1}{1-\frac{w}{1-\mathrm{i}}}\\ &= \frac{1}{2(1-\mathrm{i})}\left(1 + \frac{w}{1-\mathrm{i}} + \left(\frac{w}{1-\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{w}{1-\mathrm{i}}\right)^3 + \cdots\right)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}}{1+w+\mathrm{i}} &= \frac{1}{2(1+\mathrm{i})} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{w}{1+\mathrm{i}}\right)}\\ &= \frac{1}{2(1+\mathrm{i})}\left(1 - \frac{w}{1+\mathrm{i}} + \left(\frac{w}{1+\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\frac{w}{1+\mathrm{i}}\right)^3 + \cdots\right).\end{aligned}$$

Funkcija $\frac{1}{1-(w+\mathrm{i})^2}$ je vsota členov obeh sumandov. Če označimo

$$\frac{1}{1-(w+\mathrm{i})^2} = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots,$$

potem je

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2(1-\mathrm{i})} + \frac{1}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}}{2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{2}{2(1+1)} = \frac{1}{2},\\
a_1 &= \frac{1}{2(1-\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{i}} + \frac{1}{2(1+\mathrm{i})}\left(-\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right) = \frac{(1+\mathrm{i})^2-(1-\mathrm{i})^2}{2(1-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i})^2}\\
&= \frac{1+2\mathrm{i}-1-(1-2\mathrm{i}-1)}{2(1+1)^2} = \frac{\mathrm{i}}{2},\\
a_2 &= \frac{1}{2(1-\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{(1-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{2(1+\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{(1+\mathrm{i})^2}\\
&= \frac{(1+\mathrm{i})^3+(1-\mathrm{i})^3}{2(1-\mathrm{i})^3(1+\mathrm{i})^3} = \frac{1+3\mathrm{i}-3-\mathrm{i}+1-3\mathrm{i}-3+\mathrm{i}}{2(1+1)^3} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{1-(w+\mathrm{i})^2}$ in $w = z-\mathrm{i}$, ter dobimo

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i}) - \frac{1}{4}(z-\mathrm{i})^2 + \cdots$$

3.4 Teorija residuov

11. Določi residuum funkcije f v dani točki.

(a)

$$f(z) = \frac{\cosh z}{z-\mathrm{i}\pi}, \quad z = \mathrm{i}\pi$$

(b)

$$f(z) = \frac{iz^3}{(z+1-\mathrm{i})^3}, \quad z = -1+\mathrm{i}$$

(c)

$$f(z) = \sin\frac{1}{\mathrm{i}-z}, \quad z = \mathrm{i}$$

Rešitev: Residuum funkcije f v točki z_0 je koeficient a_{-1} pri členu $\frac{1}{z-z_0}$ pri razvoju funkcije $f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i(z-z_0)^i$ v Laurentovo vrsto okrog točke z_0. Če ima funkcija f v točki z_0 pol prve stopnje, potem izračunamo residuum funkcije f v točki z_0 s pomočjo formule

$$\mathrm{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z),$$

če pa je v točki z_0 pol m-te stopnje, izračunamo residuum funkcije f v tej točki s pomočjo formule

$$\mathrm{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z)).$$

(a) Funkcija $f(z) = \frac{\cosh z}{z-\mathrm{i}\pi}$ ima v točki $z = \mathrm{i}\pi$ pol prve stopnje, zato je njen residuum v tej točki enak

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{z=\mathrm{i}\pi} \frac{\cosh z}{z-\mathrm{i}\pi} &= \lim_{z\to \mathrm{i}\pi} (z-\mathrm{i}\pi)\frac{\cosh z}{z-\mathrm{i}\pi} = \cosh(\mathrm{i}\pi) = \frac{e^{i\pi}+e^{-\mathrm{i}\pi}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi + \cos(-\pi) + \mathrm{i}\sin(-\pi)) \\
&= \frac{1}{2}(-1+(-1)) = -1.
\end{aligned}$$

(b) Funkcija $f(z) = \frac{iz^3}{(z+1-\mathrm{i})^3}$ ima v točki $z = -1+\mathrm{i}$ pol tretje stopnje, torej je $m = 3$, residuum funkcije f v tej točki pa je enak

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{z=-1+\mathrm{i}} \frac{iz^3}{(z+1-\mathrm{i})^3} &= \frac{1}{2} \lim_{z\to -1+\mathrm{i}} \left((z+1-\mathrm{i})^3 \frac{iz^3}{(z+1-\mathrm{i})^3}\right)'' \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to -1+\mathrm{i}} \mathrm{i}\cdot 3\cdot 2\cdot z \\
&= 3\mathrm{i}(-1+\mathrm{i}) = -3-3\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

(c) Funkcija $f(z) = \sin\frac{1}{\mathrm{i}-z}$ ima v točki $z = \mathrm{i}$ bistveno singularnost, zato jo moramo razviti v Laurentovo vrsto okrog točke $z_0 = \mathrm{i}$, če hočemo določiti njen residuum v točki $z = \mathrm{i}$. Pri razvoju si pomagamo z razvojem sinusne funkcije

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$$

funkcija $\sin\frac{1}{\mathrm{i}-z}$ pa je potem razvita v Laurentovo vrsto okrog točke $z_0 = \mathrm{i}$, torej po potencah $(z-\mathrm{i})$, na naslednji način

$$\begin{aligned}
\sin\frac{1}{\mathrm{i}-z} &= \frac{1}{\mathrm{i}-z} - \frac{\left(\frac{1}{\mathrm{i}-z}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{\mathrm{i}-z}\right)^5}{5!} - \cdots \\
&= \frac{-1}{z-\mathrm{i}} + \frac{1}{6\,(z-\mathrm{i})^3} - \frac{1}{120\,(z-\mathrm{i})^5} + \cdots
\end{aligned}$$

Torej je

$$\operatorname{res}_{z=\mathrm{i}} \sin \frac{1}{\mathrm{i}-z} = -1.$$

12. S pomočjo izreka o residuih izračunaj integrala po zaključeni krivulji C. Integriraj v pozitivni smeri.

   (a)
   $$\oint_C \frac{1}{(z^2+4)(z-\mathrm{i})} dz, \quad C : |z-\mathrm{i}| = 2$$

   (b)
   $$\oint_C (1+\mathrm{i}) z e^{\frac{1}{z}} dz, \quad C : |z| = 1$$

Rešitev: Integral po zaključeni krivulji C funkcije f, ki je analitična, razen v končno mnogo točkah z_1, z_2, ..., z_n, je enak

$$\oint f(z)dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{z=z_i} f(z).$$

Če hočemo izračunati integral, zadošča, da določimo residuum funkcije v vseh njenih singularnih točkah, ki so znotraj krivulje.

(a) Singularne točke funkcije

$$\frac{1}{(z^2+4)(z-\mathrm{i})} = \frac{1}{(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}$$

so $2\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$ in i. Vse singularne točke so poli prve stopnje. Znotraj krivulje $|z-\mathrm{i}| = 2$, to je krožnice s središčem v i in polmerom 2, sta samo singularni točki $2\mathrm{i}$ in i. Izračunajmo residuum funkcije v teh dveh točkah

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=2\mathrm{i}} \frac{1}{(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} &= \lim_{z\to 2\mathrm{i}} (z-2\mathrm{i}) \frac{1}{(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} \\
&= \frac{1}{(2\mathrm{i}+2\mathrm{i})(2\mathrm{i}-\mathrm{i})} = -\frac{1}{4} \\
\operatorname{res}_{z=\mathrm{i}} \frac{1}{(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} &= \lim_{z\to \mathrm{i}} (z-\mathrm{i}) \frac{1}{(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} \\
&= \frac{1}{(\mathrm{i}-2\mathrm{i})(\mathrm{i}+2\mathrm{i})} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+4)(z-\mathrm{i})}dz = 2\pi\mathrm{i}(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}) = \frac{\mathrm{i}\pi}{6}.$$

(b) Singularna točka funkcije

$$(1+\mathrm{i})ze^{\frac{1}{z}}$$

je samo ena in sicer $z=0$. Singularna točka je bistvena singularnost in je znotraj krivulje $|z|=1$, to je krožnice s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 1. Residuum funkcije v bistveni singularnosti določimo tako, da razvijemo funkcijo v Laurentovo vrsto. Pri razvoju si pomagamo z razvojem eksponentne funkcije

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Dobimo

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})ze^{\frac{1}{z}} \quad &= (1+\mathrm{i})z\left(1+\frac{\frac{1}{z}}{1!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{3!}+\cdots\right)\\ &= (1+\mathrm{i})z+1+\mathrm{i}+\frac{1+\mathrm{i}}{2z}+\frac{1+\mathrm{i}}{6z^2}+\cdots\end{aligned}$$

Torej je

$$\mathrm{res}_{z=0}(1+\mathrm{i})ze^{\frac{1}{z}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$$

in

$$\oint_C (1+\mathrm{i})ze^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1+\mathrm{i}}{2} = (-1+\mathrm{i})\pi.$$

3.5 Konformne preslikave

13. Določi, v katerih točkah kompleksne ravnine je preslikava

$$f(z) = e^{z^3+3\mathrm{i}z}$$

konformna.

Rešitev: Preslikava je konformna, če ohranja kote. Analitična funkcija je konformna v vseh točkah, razen v točkah, kjer je $f'(z)=0$. Kompleksna funkcija $f(z) = e^{z^3+3iz}$ je analitična, torej moramo najprej izračunati njen odvod

$$f'(z) = e^{z^3+3iz}(3z^2 + 3i),$$

nato pa poiskati tista kompleksna števila, za katera je ta odvod enak nič. Ker je $e^w \neq 0$ za vsako kompleksno število $w \in \mathbb{C}$, moramo poiskati rešitve enačbe

$$3z^2 + 3i = 0, \quad \text{oziroma} \quad z^2 = -i.$$

Rešitvi te enačbe sta dve, poiščemo pa ju s pomočjo polarnega zapisa kompleksnega števila $-i$. Ker je

$$|-i| = 1 \quad \text{in je polarni kot} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2},$$

sta rešitvi

$$z_1 = 1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

in

$$z_2 = 1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{2}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Kompleksna funkcija f je konformna v vseh točkah kompleksne ravnine, razen v točkah $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ in $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. Dana je lomljena linearna transformacija

$$f(z) = \frac{z - 1 - i}{z}.$$

Določi območje, kamor ta preslikava preslika območje D, dano z neenakostima

$$|z - 1| \leq 1 \quad \text{in} \quad \mathrm{Re}(z) \leq 1.$$

Rešitev: Lomljena linearna transformacija je preslikava oblike

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Za lomljeno linearno transformacijo velja, da preslika množico premic in krožnic v množico premic in krožnic. To pomeni, da se premica preslika v krožnico ali premico, krožnica pa se prav tako preslika v krožnico ali premico. Naše območje D je omejeno z delom krožnice s središčem v 1 in polmerom 1 ter premico $x = 1$. Ta krožnica in premica se bosta z lomljeno linearno transformacijo preslikali v krožnico ali premico. Torej moramo preveriti, kam se preslikajo na primer točke 0, $1-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$ in 1. Dobimo

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{0-1-\mathrm{i}}{0} = \infty \\
f(1-\mathrm{i}) &= \frac{1-\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \cdot \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-2(\mathrm{i}-1)}{2} = 1-\mathrm{i} \\
f(1+\mathrm{i}) &= \frac{1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 0 \\
f(1) &= \frac{1-1-\mathrm{i}}{1} = -\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Točke $1-\mathrm{i}$, 0 in $1+\mathrm{i}$ ležijo na krožnici in ker je $f(0) = \infty$, se krožnica preslika v premico, ki gre skozi točki $f(1-\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$ in $f(1+\mathrm{i}) = 0$, to je premico $y = -x$. Točke $1-\mathrm{i}$, 1 in $1+\mathrm{i}$ ležijo na premici in ker je $f(1-\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$, $f(1) = -\mathrm{i}$ in $f(1+\mathrm{i}) = 0$, se premica preslika v krožnico, ki je s točkami $1-\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$ in 0 natanko določena. Hitro ugotovimo, da je to krožnica s središčem v točki $\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}$ in polmerom $\frac{\sqrt{2}}{2}$, torej krožnica $|z - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Meje območja $f(D)$ so torej določene s premico $y = -x$ in krožnico $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Preveriti moramo samo še, ali je območje $f(D)$ omejeno ali neomejeno. Izberemo si eno točko iz območja D, na primer $\frac{1}{2}$, in izračunamo

$$
f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - 1 - \mathrm{i}}{\frac{1}{2}} = 2\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\right) = -1 - 2\mathrm{i}.
$$

Ker je $-1 - 2\mathrm{i}$ zunaj krožnice $|z - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, je $f(D)$ neomejeno območje.