Izpit Matematika IV

16.januar.2008

Rešitve

1. naloga

$\mathcal{L}\left[\sin^2 t\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{2}{s^2+4}) = F(s)$

$\mathcal{L}\left[e^{-t}\sin^2 t\right] = F(s+1) = \frac{2}{(s+1)^2+4} = \boxed{\dfrac{2}{s^2 + 2s + 5}}$

2. naloga

$sY - 2 + 5Y \frac{s}{s^2+4} = \frac{10}{s}$

$Y \left(\frac{s^3+4s+5s}{s^2+4} \right) = \frac{10}{s} + 2 = \frac{2(5+s)}{s}$

$Y = \frac{2(s+5)(s^2+4)}{(s^3+9s)s} = \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}$

$Y = \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+9} = \frac{(As+B)(s^2+9)+(Cs+D)s^2}{s^2(s^2+9)}$

$ks^3 \quad \rightarrow \quad A + C = 2$

$ks^2 \quad \rightarrow \quad B + D = 10$

$ks \quad \rightarrow \quad 9A = 8$

$k \quad \rightarrow \quad 9B = 40$

$A = \frac{8}{9} , \ B = \frac{40}{9} , \ C = \frac{10}{9} , \ D = \frac{50}{9}$

$Y = \frac{8}{9}\frac{1}{s} + \frac{40}{9}\frac{1}{s^2} + \frac{10}{9}\frac{s}{s^2+9} + \frac{50}{9}\frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9}$

$$y(t) = \frac{8}{9} + \frac{40}{9}t + \frac{10}{9}\cos 3t + \frac{50}{27}\sin 3t$$

3. naloga

Najprej izrazimo odvode funkcije u po starih spremenljivkah x, y z odvodi po novih spremenljivkah v, z z uporabo *formule za posredni odvod* funkcij več neodvisnih spremenljivk.

$u_y = u_z x$
$u_{yy} = u_{zz} x^2$
$u_{xy} = (u_{zv} + u_{zz}y)x + u_z$

$(u_{zv} + u_{zz}y)x^2 + u_z x = x^2 u_{zz} y + u_z x$
$u_{zv} = 0$

Integriramo najprej po v in nato še po z. Aditivna konstanta (kot pri vsakem nedoločenem integralu) je odvisna od tiste spremenljivke, po kateri se ne integrira.
$u_z = C(z)$
$u = \int C(z)dz = D(z) + E(v)$, kjer sta $D(z)$ in $E(z)$ poljubni odvedljivi funkciji

$$\boxed{u = D(xy) + E(x)}$$

4. naloga

$-2y - (2y')' = 0$
$y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda_{1,2} = \pm i$
$y = A\cos x + B\sin x$

$x = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$
$x = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad B\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\boxed{y = \sin x}$

5. naloga

$A = ($ dve enaki števili $)$ $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = ($ produkt je sodo št. $)$ $P(B) = 1 - P($ na obeh je liho $) = 1 - \frac{3}{6}\frac{3}{6} = \frac{3}{4}$

$A \cap B = ($ 22 ali 44 ali 66 $)$ $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{5}{6}}$$