MATEMATIKA IV -- vprašanja za ustni izpit – 14.06.2005

1. Reši PDE
2. Lastnosti Besselovih funkcij
3. Lastnosti Laplaca
4. Konvolucija
5. Binomska slučajna spremenljivka
6. Lastnosti zveznih spremeneljivk
7. Kaj je ekstrem funkcionala
8. Maxwellove enačbe
9. Fourier-Sinus izplejava
10. Robni pogoji
11. Matematično upanje – Binomske porazdelitve
12. Valovna enačba
13. Nihanje okrogle membrane
14. Centralni momenti
15. Računanje z dogodki
16. Difuzijska enačba
17. Eulerjeva DE
18. Possionova porazdelitev
19. Osnovni variaciski izrek
20. Prevajanje toplote v tanki palici
21. Nehomogene PDE – postopek reševanja
22. Kompleksna inverzna laplaceova transofrmacija
23. Enakomerna zvezna porazdelitev
24. Izopirametrični problemi
25. Valovna enačba v dveh dimenzijah
26. Besselove DE
27. Verjetnost hipoteze
28. Kdaj sta dva dogodka nezdružljiva
29. Nihanje strune
30. Telegrafska enačba – pogoji – izpeljava
31. Kaj je elementaren dogodek
32. Inverzna Laplaceova transformacija z parcialnimi ulomki $\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$
33. Gasussova porazdelitev – račuanje integrala
34. Laplacova enačba v prostoru
35. Direktne metode
36. Laplaceova transformacija z residumi
37. Ortogonalonst Bessela in Legendrovi polinomi
38. Kombinacije
39. Polna verjetnost – formula
40. Euler DE za f(x, y') in f(x,y,y')
41. Vsota dveh slučajnih spremenljivk
42. Hermitovi polinomi – enačba, utenžna funkcija, interval in izračunaj H1
43. Laplac enotine stopnice, dane na listu – analitično in z lapalcom

44. Kaj je PDE
45. Sistem popolnih elementranih dogodkov
46. Fourier transform odvoda
47. Kdaj je porazdelitev simetrična
48. Reši DE z laplacom, maš dane na listku $\dot{x}+x=0 \quad \dot{y}+y=r(t)$
49. Iztačunaj $\int_0^\infty e^{-x^n}dx$
50. Definicija Fourierove transformacije – kdaj obstaja
51. Kdaj sta dogodka neodvisna
52. Beta funkcija
53. Ortogonalnost
54. $L\left[e^{at}f(t)\right]$
55. Permutacije
56. Inverzni fourier
57. Matematično upanje – diskretne in zvezne
58. Pojem funkcionala
59. Splošna PDE drugega reda
60. Osnovni zakon kombinatorike
61. Legendrova DE – kje je orotogonalna
62. Izračunja disperzijo enakomerne zvezne spremenljivke
63. Fourier – Cosinusna transformacija – lastnosti
64. Disperzija za Possionovo porazdelitev
65. Matematično upanje za normalno porazdelitev
66. Funkcional za funkcije – kakšne
67. Kdaj je rešitev enolično določena variacijskega računa
68. Integracija Eulerjeve enačbe
69. Kako rešimo DE z vrstami
70. Slučajne spremenljivke in porazdelitvena funkcija
71. Potrebni pogoj za Laplaceovo transformacijo -- z besedo
72. Laplac PDE, katere in pri kakšnih pogojih ga lahko rešimo ---- Reševanje Laplaca v pravokotnem koordinatem sistemu
73. Bernulijeva – binomska slučanja spremenljivka
74. Laplac z zakasnitvijo enotine stopnice
75. Parsevalova enčba
76. Standardna deviacija
77. Struna, lastne vrednosti, valovna dolžina
78. Izpelji $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$
79. Polinomi Čebiševa
80. Izračunaj asimetrijo funkcije e^{-x}
81. Imaš dano funkcijo na listku, ali lahko uporabiš fourierov odvod
82. Asimetrija slučajne spremenljivke
83. Eulerjeva DE f(y, y')
84. Lastnosti Fourierjeve transformacije – sam napišeš
85. Kaj je slučajna spremenljivka – osnovna definicija

86. Izračunat Fourire-Cosinusne za funkcijo e^{-t}
87. Matematično upanje za Possionovo porazdelitev
88. Reši $t \cdot \dot{x}(t) + x(t) = 2t$
89. Prevajanje toplote – splošna enačba in opis
90. Prevajanje toplote v dolgi tanki palci – rešit nalogo
91. Povezava med centralnimi in začentimi momenti
92. Laplacova periodične funkcije – formula
93. PDE nehomgeni robni pogoji – postopek reševanja
94. Kdaj sta funkciji – korelirani
95. Gama funkcija, lastnosti, definicija
96. Verjetnostna funkcija diskretne spremenljivke
97. Osnovna o Brahistrohoni
98. cela knjiga, ...

1. **Reši PDE**

Imamo podano PDE in pogoje, da dobimo enolično rešitev. Reševanje poteka v treh korakih. 1 korak: z metodo seperacije spremenljivk dobimo dve navadni DE. 2 korak: Izberemo tiste rešitve DE, ki ustrezajo robnim pogojem. 3 korak:Doblejen rešitve sestavimo tako, da je rezlutat rešitev iskana PDE in da ustreza začetnim pogojem.

2. **Lastnosti Besselovih funkcij**

Poznamo dve vrste Besselovih funkcij. Besselova funkcija prve vrste ima Besselovo DE oblike $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$. Parameter ν je nenegativno celo število. Rešitev iščemo v obliki potenčne vrste $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ eksponent r je poljuben in izbran tako, da je $c_0 \neq 0$. Po celotnem postopku računanja dobimo ven splošno rešitev Besselove DE $J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m+\nu+1)}$ ta rešitev je znana kot Besselova funkcija prve vrste reda ν. Če mi ν ni celo število sta funkciji $J_\nu(x)$ in $J_{-\nu}(x)$ linearno neodvisni. Splošna rešitev Besselove enačbe za vsak $x \neq 0$ se glasi $y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 J_{-\nu}(x)$. Če je $\nu = n$ naravno število dobimo Besselovo funkcijo prve vrste reda n in dobimo funkcijo $J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!}$. Sedaj sta Besselovi funkciji linearno odvisni in velja zveza $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad n = 1, 2, \ldots$. Da dobimo splošno rešitev Besselove funkcije potrebujemo še Besselovo funkcijo druge vrste. Besselova DE $xy'' + y' + xy = 0$ je za drugo vrsto. Drugo partiklurano rešitev iščemo v obliki $y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$.
Splošna rešitev Besselove enačbe za vse vrednosti ν je $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$

3. **Lastnosti Laplacove transformacije**

Funkcijo F(s) imenujemo Laplacove transformiranka funkcije f(t). $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad t \geq 0$. Inverzna Laplacova transformiranka $f(t) = L^{-1}[F(s)]$.

Transformacija je linearna. $L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)]$. Zadosten pogoj za eksistenco transformiranke je da je funkcija odeskom zvezna in da ne narašča hitreje od neke eksponentne funkcije. $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. (črka L je velika pisana)

4. Konvolucija

Funkcija h(t) definirana z integralom $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du$ imenujemo konvolucija funkcije f(t) in g(t). $h(t)=f(t)*g(t)$. Funkcije f(t) in g(t) $\in(-\infty,\infty)$ vsaj ena naj bo omejena $|f(t)\leq M|$ potem funkcija h(t) obstaja. Če funkciij f(t) in g(t) zamenjamo se znak * zamenja z produktom.

Lastnosti:

$[af(t)]*g(t)=a[f(t)*g(t)]$

$f(t)*[g(t)+h(t)]=f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$

$f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$

$[f(t)*g(t)]*h(t)=f(t)*[g(t)*h(t)]$

5. Binmska slučajna spremenljivka

Zapordeje Bernulijevih poskusov priredimo slučajno spremenljivko X, ki zavzame vrednosti k takih, ko je v zaporedju n poskusov k ugodnih in n-k ne ugodnih. Verjetnostna funkcija P(n,p,k) za slučajno spremenljivko jo imenujemo Binomska slučajna spremenljivka in ustreza porazdelitvi je Binomska porazdelitev. Spremenljivke lahko zavzamejo vrednosti k=0,1,2... Verjenostna shema Binomske porazdelitve:

$$X:\left(\frac{0}{\binom{n}{0}q^n},\frac{1}{\binom{n}{1}pq^{n-1}},\frac{2}{\binom{n}{2}p^2q^{n-2}},.....\frac{n}{\binom{n}{n}p^n}\right)$$

(Izraz je brez ulomkovih črt)

6. Lastnosti zvezne porazdelitve (slučajne spremenljivke)

Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena, če se njena porazdelitvna funkcija izražena z $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$.

p(x) – gostotna verjetnosti, F(x) – porazdelitvena funkcija. Velja integral $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=1$.

Porazdelitvena funkcija je monotono naraščajoča $p(x)\geq 0$. Tam kje je p(x) zvezna velja $p(x)=F'(x)$. Če je p(x) zvezna na intervalu [a, b] potem velja izrek o srednji vrednosti

$$P(a\leq X\leq b)=\int_a^b p(x)dx=p(x_0)(b-a)\quad\Rightarrow\quad p(x_0)=\frac{P(a\leq X\leq b)}{b-a}$$

$p(x_0)$ - povprečna verjetnost na danem intervalu.

7. Kaj je ekstrem funkcionala

Ekstrem funkcioanla je najmanjša ali največja vrednost, ki jo integral doseže. Fukcija je definirana na intervalu in je dovolj gladka in v robih zavezema prepisane vrednosti.

$$I\left[y(x)\right] = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y')dt$$

8. Maxwellove enačba

Spremijanje elektromagnetnega polja opisujejo Maxwellove enačbe. Elektromagnetno polje je določeno s parom vektroskih funkcij $E(t,r)$, $H(t,r)$ to sta električna in magnetna poljska jakost. Omejeni smo na del prostora kjer polji, po katerih se širi valovanje nimata izvorov in snov naj ima konstanto permiabilnosti in dielektričnosti.

Enačbe se glasijo: $divE = 0$, $divH = 0$ $rotE = -\mu\mu_0 H_t$, $rotH = \varepsilon\varepsilon_0 E_t$

9. Fourier-Sinusna transoformacija – izpeljava

Naj bo funkcija f(t) liha, f(-t)=-f(t). Zapišemo definicijo Fourierjeve transformacije na dveh integralih $F(w) = \int_0^\infty e^{iwt} f(t)dt + \int_{-\infty}^0 e^{iwt} f(t)dt$. V drugem integralu zamenjamo predznak pred t-ji in obrenmo meje tako, da integrala skupaj pašeta in izpostavimo integral. $\int_0^\infty f(t) \times \left[e^{iwt} - e^{-iwt}\right]dt$. Preko zveze $Sin(wt) = \dfrac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}$ dobimo ven sinus.

$F(w) = 2i\int_0^\infty f(t)\sin(wt)dt$ in inverz je $f(t) = -\dfrac{i}{\pi}\int_0^\infty F(w)\sin(wt)dw$. To pripelje do Fourierove sinusne transformacije $F_s\left[f(t)\right] = F_s(w) = \int_0^\infty f(t)\sin(wt)dt$ in inverzne transformacije $f(t) = F^{-1}\left[F_s(w)\right] = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(w)\sin(wt)dw$.

10. Robni pogoji

Če ima PDE rešitev, jih ima več. Enolično rešitev PDE, ki ustreza danemu fizikalnemu problemu, dobimo z dodatnimi informacijami, ki izhajajo iz konkretne fizikalne situacije. V nekaterih primerih so na meji območja prepisane vrednosti iskane funkcije in (ali) njeni odovdi. Take pogoje imenujemo robni pogoji. Odvisni so od fizikalne situacije, na primer, kje in kako je pritrjeno nihajajoče telo.

11. Matematično upanje – Binomske porazdelitve (disperzija, deviacija)

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} p^k q^{n-k}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=np\sum_{l=0}^{n-1} p^l q^{(n-1)-l}\binom{n-1}{l}=$$

$$=np(p+q)^{n-1}=np \qquad l=k-1$$

$$D(X_i)=\sum_{i=1}^{2}(x_i-p)^2 p_i=(1-p)^2p+(0-p)^2q=q^2p+p^2q=pq$$

$$E(X)=nE(X_i)=np, \qquad D(X)=nD(X_i)=npq$$

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}$$

12. Valovna enačba

Enačba valovanja se glasi: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})+f(x,y,z,t)$.

Iskana funkcija u opisuje odmik masne točke iz mirovne lege, f je zuanja sila in a je konstnta, ki je odvinsa od tega s kakšnim fizikalnim problemom se ukvrajamo (opna, struna,..). Začetna pogoja: $u(x,0)=f_1(x,y,z)$ je začetni odmik in $u_t(x,0)=f_2(x,y,z)$ je začetna hitrost. Robni pogoji so odvisni od fizikalne situacije, na primer, kje in kako je pritrjeno nihajajoče telo.

13. Nihanje okrogle membrane

Okrogla membrana s polemrom R. Uoprabimo polarne koordinate in zapišemo Laplceov opertor z polarnimi kooradinatami: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2})$. Iščemo le tiste rešitve u(x,t) enačbe, ki so radialno simetrične in niso odvisne od kota fi. In dobimo enačbo: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r})$. Za nadalnje reševanje s seperacijo spremenljvik vstavimo not novo neodovino spremenljivko in prevedmo na Besselovo DE. In ven izračunamo Besselovo splošno rešitev, katro omejomo z robnimo pogoji.

14. Centralni moment

Posebno vlogo imaoj momenti glede na povprečno vrrednost, ki jih imenujemo centralni momenti in jih zaznamijemo z m_k :

$$m_k=m_k\left[E(X)\right]=E\left[(x-E(X))^k\right]$$

15. Računanje z dogodki

Nad dogodki se opravlajo iste oprecije kot nad množicami.

$A+B=A\cup B \qquad A\times B=A\cap B \qquad A+B=B+A \qquad AB=BA$

$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad A(BC)=(AB)C$

$(A+B)C=(AC)+(BC) \qquad A+A=A \qquad A\times A=A$

16. Difuzijska enačba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad a^2=RC$$

$$u(0,t)=E(t), \qquad \lim_{x\to\infty} u(x,t)<\infty \qquad u(x,0)=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}L\left[u(x,t)\right]=a^2 sL\left[u(x,t)\right]-u(x,0)$$

$$L\left[u(x,t)\right]=U(x,s)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)-a^2 sU(x,s)=0$$

$$U(x,s)=A(s)e^{-a\sqrt{s}x}+B(s)e^{a\sqrt{s}x}$$

$$L\left[u(0,t)\right]=L\left[E(t)\right]=A(s)$$

$$L\left[u(x,t)\right]=L\left[E(t)\right]e^{-ax\sqrt{s}}$$

$$L\left[\frac{be^{-b^2/4t}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}\right]=e^{-b\sqrt{s}}$$

$$u(x,t)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz=(1-erf(\frac{ax}{2\sqrt{t}}))$$

17. Eulerjeva DE

Eulerjeva DE pripada variaciskemu problemu. Med tistimi rešitvami Eulerjeve enačbe, ki ustrezajo pogojem $y(a_1)=b_1$ in $y(a_2)=b_2$. Dobimo ekstremalo variaciskega računa.

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y'})=0$$

18. Possionova porazdelitev

Slučajna spremenljivka, ki je porazdeljena po poissonovem zakoni, lahko zavzame vsako nenegativno celoštevilsko vrednost k in to z verjetnostjo: $p_k = \frac{a^k e^{-a}}{k!} \quad a \geq 0$.

Porazdelitvena funkcija possionove porazdelitve:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}}{0}; & \frac{m < x \leq m+1}{x \leq 0}; \quad m = 0,1,2.. \end{cases}.$$

19. Osnovni varijaciski izrek

Naj bosta P(x) in Q(x) zvezni funkciji na intervalu [a,b], za vsako zvezno odveljivo funkcijo $\eta(x)$, ki ustreza pogoju $\eta(a) = \eta(b) = 0$ naj bo izpolnjen pogoj: $\int_a^b [P(x)\eta(x) + Q(x)\eta'(x)]dx = 0$. Potem je Q(x) todvedljiva funkcija in je P(x)=Q'(x)

20. Prevajanje toplote v tanki palici

Omjeni smo na x os, in na eni strani je prvi odvod po času, na drugi pa kvakdrat konstante in drugi odvod po x-u.

Postopek:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

$u(x,t) = F(x)G(t) \qquad F = F(x) \quad G = G(t)$ v tej obliki iščemo rešitev in poenostaviteh, da je manj zapisat.

$$FG' = c^2 F''G \quad /: c^2 FG$$

$$\frac{G'}{Gc^2} = \frac{F''}{F} = -k^2$$

$$F'' + k^2 F = 0 \qquad G' + c^2 k^2 G = 0$$

$$F(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

$$F(0) = A \times 1 + B \times 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0; \quad B \neq 0 \quad \Rightarrow B = 1$$

$$F(l) = B\sin kl = 0 \quad \Rightarrow \quad kl = n\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\pi}{l}$$

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1,2,..$$

$$G(t) = Ce^{-c^2k^2t} = Ce^{-\frac{c^2n^2\pi^2t}{l^2}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{cn\lambda}{l} \quad \Rightarrow \quad G_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$u_n(x,t) = C_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

21. Nehomogena PDE z homogenimi robnimi pogoji – postopek reševanja

Nehomogena PDE: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$

Homogeni robni pogoji: $u(0,t) = u(a,t) = 0$ in začetni pogoji:

$u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x)$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad u_n^*(x,t) = X_n(x) T_n(t) \quad \Rightarrow \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \Rightarrow \quad F_n(t) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x,t) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$g(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \Rightarrow \quad T_n(0) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$h(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \Rightarrow \quad T_n'(0) = \frac{2}{a} \int_0^a h(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} c^2 T_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(x)$$

$$X_n'(x) = \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad X_n''(x) = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \sin \frac{n\pi x}{a} = -\frac{n^2 \pi^2}{a^2} X_n(x)$$

$$T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{a} \right)^2 T_n(t) = F_n(t)$$

22. Kompleksna inverzna Laplaova transformacija

Če je $F(s)=L\left[f(t)\right]$, potem je orginalna funkcija $f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st}ds \qquad t>0 \\ f(t) &= 0 \qquad t<0 \end{aligned}$$

. To je kompleksna inverzna ali Bromwhicheva integralska formula. Integral potek vzdolž premice $s=\gamma+iy$ v kompleksni ranivni. Realno število gama je tako izbrano da premica $s=\gamma$ leži desno od vseh singulranosti. To so največkrat poli. Sicer pa je gama poljuben. Integral računamo kot krivulnji integral $\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}F(s)\,ds$ Tako funkcijo f(t) izrazimo kot $f(t)=\sum res\, e^{st}F(s)$ pri polih funkcije F(s).

Formula za računanje residiumov:

$$res_i = \lim_{s\to s_1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\frac{1}{(n-1)!}\left[e^{st}F(s)(s-s_1)^n\right]$$

23. Enakomerna zvezna porazdelitev

Enakomerno zvenzo porazdelitev definirana z gostoto verjetnosti.

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b; \quad a<b \\ 0, & izven\end{cases}$$

. Takoa gostota verjetnosti je nenegativna in ustreza integralu: $\int_{-\infty}^{\infty}p(t)dt=\int_a^b\frac{1}{b-a}dt=1$. Verjetnsot je odvisna le od dolžine intervala, nič pa od lege.

24. Izopirametrični problemi

Med vsemi funkcijamo y(x), ki so na definiranem intervalu $\left[a_1,a_2\right]$, zvezno odvedljive in ustrezajo pogoju $y(a_1)=b_1 \quad y(a_2)=b_2$ je treba poiskat tisto, pri kateri ima funkcional $I\left[y(x)\right]=\int_{a_1}^{a_2}f(x,y,y')dx$ ekstrem, hkrati pa ima funkcional $K\left[y(x)\right]=\int_{a_1}^{a_2}g(x,y,y')dx$ predpisano vrednost $K\left[y(x)\right]=l$.

25. Valovna enačba v dveh dimenzijah

Primer valovne enčbe v dveh dimenzijah je valovanje membrane.
Enačba se glasi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$.
Robni pogoji =0, začetni pogoji so $u(x, y, 0) = f(x, y), \qquad u_t(x, y, 0) = g(x, y)$
Rešitev iščemo v ogliki $u(x, y, t) = F(x, y)G(t)$. Pridemo do Helmholtzove PDE. Za reševanje uporabljamo seperacijo spremenljivk. $F(x, y) = H(x)Q(t)$
Rešimo enačbo in vstavimo robne pogoje. Rešimo enačbo G(t) in združimo skupaj rešitve in uporabimo začetne pogoje.
V rešitiv nastopajo dvojne vsote in pri koeficentih dvojni integrali.

26. Besselove DE

Poznamo dve vrste. Prva vrsta Besselove funkcije ima DE obliko
$x^2 y'' + xy' + (x^2 + \nu^2)y = 0$. Rešujemo jih v obliki potenčne vrste $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$.
Splošna rešitev prve vrste $y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 J_{-\nu}(x)$
Druga vrste Besselove funkcije ima DE obliko
$xy'' + y' + xy = 0$.
Splošna rešitev Besselove DE je oblike $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$.

27. Verjetnost hipoteze

Bayesova formula:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

28. Kdaj sta dva dogodka nezdružljiva

Naj bosta A in B taka dogodka, da se nemoreta zgodit hkrati. Taka dva dogodka imenujemo nezdružljiva. Produkt nezdružljivih dogodkov je nemogoč dogodek AB=N.

29. Nihanje strune

Postopek reševanja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad u(x,0) = f_1(x) \quad u_t(x,0) = f_2(x)$$

$u(x,t) = F(x)G(t)$ $\quad F = F(x) \quad G = G(t)$ v tej obliki iščemo rešitev in poenostaviteh, da je manj zapisat.

$$FG'' = a^2 F'' G \quad / : a^2 FG$$

$$\frac{G''}{Ga^2} = \frac{F''}{F} = -k^2$$

$$F'' + k^2 F = 0 \qquad G'' + a^2 k^2 G = 0$$

$$F(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

$$F(0) = A \times 1 + B \times 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0; \quad B \neq 0 \quad \Rightarrow B = 1$$

$$F(l) = B\sin kl = 0 \quad \Rightarrow \quad kl = n\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\pi}{l}$$

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1, 2, ..$$

$$G_n(t) = C_n \cos akt + D_n \sin akt$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) G_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x \left[C_n \cos a\frac{n\pi}{l}t + D_n \sin a\frac{n\pi}{l}t \right]$$

$$u(x,0) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u_t(x,0) = f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

$$D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l f_2(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

30. Telegrafska enačba – izpeljava – pogoji

Imamo homogeno linijo dolžine l na osi x. R – upornost, L – induktivnost, C – kapacitivnost, G – izgube. u(x,t) – napetost in i(x,t) tok. Telegrafka enačba je hiperbolična PDE. Enačba ima nehomogene robne pogoje. Pri u(0,t)=E je konstantna napetost, pri u(l,t)=0 je kratek stik.

Izpeljava:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \qquad \frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial t} + Gu = 0$$

Levo enačbo odvajamo še enkrat po x, desno pa po t.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} + R\frac{\partial i}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Desno enačbo pomnočimo z –L in dobimo $-L\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - LG\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ in odštejemo od leve. In dobimo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\frac{\partial i}{\partial x} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - LG\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ sedaj pa prvotno desno enačbo pomnožimo z R in dobimo $R\frac{\partial i}{\partial x} = RC\frac{\partial u}{\partial t} - RGu$ in jo vstavimo v enačbo. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - RC\frac{\partial u}{\partial t} - RGu - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - LG\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ enačbo še malo polepšamo in dobimo: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (RC + LG)\frac{\partial u}{\partial t} - RGu = 0$ za tok je vse isto in dobimo ven $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + LG)\frac{\partial i}{\partial t} - RGi = 0$.

Postopek reševanja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (RC+LG)\frac{\partial u}{\partial t} - RGu = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{x=0} = E, u|_{x=l} = 0, u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0$$

$$F(x) = u(x,t) \quad \Rightarrow \quad t = konst. \qquad F(x) \quad \Rightarrow \quad F(0) = E, \qquad F(l) = 0$$

$$F''(x) - RGF(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad RG = b^2 \quad \Rightarrow \quad F''(x) - b^2 F(x) = 0$$

$$F(x) = A\sinh bx + B\cosh bx = C\sinh b(d-x)$$

$$F(0) = E = C\sinh bd, \quad F(l) = 0 = C\sinh b(d-l) \quad \Rightarrow \quad d = l \quad \Rightarrow \quad C = \frac{E}{\sinh bl}$$

$$F(x) = E\frac{\sinh b(l-x)}{\sinh bl}$$

$$w(x,t) = u(x,t) - F(x)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0, \quad w|_{t=0} = -F(x), \quad w_t = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F''(x) - LC\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (LG+RC)\frac{\partial w}{\partial t} - RGw(x,t) - RGF(x) = 0$$

$$F''(x) - RGF(x) = 0$$

$$a^2 = LC, \quad b^2 = RG, \quad 2h = LG + RC$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial w}{\partial t} - b^2 w = 0 \quad \Rightarrow \quad w(x,t) = P(x)G(t)$$

$$\frac{P''(x)}{P(x)} = a^2\frac{G''(t)}{G(t)} + 2h\frac{G'(t)}{G(t)} + b^2 = -k^2$$

$$P'' + k^2 P = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 G'' + 2hG' + (b^2 + k^2)G = 0$$

$$P(0) = P(l) = 0$$

$$P_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad G_n(t) = A_n e^{\alpha_n t} + B_n e^{\beta_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\alpha_n, \quad \beta_n \quad \Rightarrow \quad a^2 r^2 + 2hr + (b^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}) = 0$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\alpha_n t} + B_n e^{\beta_n t})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$w|_{t=0} = -F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad \Rightarrow \quad A_n + B_n = -\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$w_t|_{t=0} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\alpha_n + B_n\beta_n)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad \Rightarrow \quad A_n\alpha_n + B_n\beta_n = 0$$

$$u(x,t) = E\frac{\sinh b(l-x)}{\sinh bl} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\alpha_n t} + B_n e^{\beta_n t})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

31. Kaj je elementaren dogodek – kaj je sestavljen dogodek

Dogodku, ki ni sestavljen, rečemo elementaren dogodek. Sestavljen dogodek, če lahko dogodek A izrazimo, kot vsota vsaj dveh ne odvisnih dogodkov.

32. Inverzna Laplaceova transformacija z parcialnimi ulomki

$$L\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s-2}$$

33. Gasussova porazdelitev – računanje integrala

Porazdelitev je definirana z gostoto verjetnosti $p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$. Gostota verjetnosti je odvisna od dveh parametrov a in sigma. a je poljubno sigma pa pozitivno število. Porazdelitev zaznamujemo z $N(a,\sigma)$. Funkcija p(t) je povsod pozitivna, v točki x=a ima maksimum $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ in v točkah $a-\sigma,\quad a+\sigma$ obračaj. Fumkcija je tudi simetrična glede na vrednost a. Od parametra a je odvisna lega krivlje, od sigme pa oblika krivulje. Čim manjši je sgima, bolj izraziro je teme in je krivulja oblj stisnjena okorg temena. Če je slučajna spremenljivka X porazdeljena po noramlem zakonu $N(a,\sigma)$, lahko izračunamo verjetnost dogodkov povezanih s spremenljivko X s pomočjo tabelirane funkcije $\Phi(x)$. Oblika funkije $\Phi(x)$ je: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$. Značilno je tudi, da je ta funkcija liha.

34. Laplacova enačba v prostoru

Imao sfero s polmerom R. Na robu sfere naj bo dan električni potencial. $u(R,\vartheta,\varphi)=f(\varphi)$. Kjer so r,ϑ,φ sferične koordinate in $f(\varphi)$ dana funkcija.

Statični potencial na robu sfere naj ne bo odvisen od kota ϑ, potem je tudi notranjost sfere $\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2}=0$. Laplacov operator se v sferičnih koordinatah glasi: $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2}$ tako se enačba zmanjša zaradi kota $\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi})=0$ Enačbo rešujemo pri danih pogoji in z seperacijo spremenljivk. Za konstnato si izberemo k.