MATEMATIKA IV
odgovori na ustna vprašanja

Šolsko leto	2008 / 2009
Izvajalec	Tomaž Slivnik
Avtor dokumenta	Dominik Peruško
Sodelavci	

UREJANJE DOKUMENTA

VERZIJA	01	**REVIZIJA**	01
DATUM	14. 8. 2009		

ZADNJI POPRAVLJAL
PREGLEDAL

OPOMBE

Še ena verzija odgovorov na ustna vprašanja.

POPRAVKI

IZPITNA VPRAŠANJA MAT IV

1. Kako je definirana F.t.? Kdaj obstaja?

$f(t) \xrightarrow{\text{preslika}} F(\omega)$

časovni prostor — frekvenčni prostor

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t)\,dt \quad , \omega\in\mathbb{R}$$

Veljati mora: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$

Ker $|F(\omega)|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|e^{i\omega t}||f(t)|\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$

ker $|e^{i\omega t}|=1$ - krožnica

2. Naštejte nekaj lastnosti F.t.

1. $\boxed{\mathcal{F}(af(t)+bg(t))=a\mathcal{F}[f(t)]+b\mathcal{F}[g(t)]}$

Dokaz: $\mathcal{F}[af(t)+bg(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}(af(t)+bg(t))\,dt=$

$$=a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}f(t)\,dt}_{\mathcal{F}[f(t)]}+b\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}g(t)}_{\mathcal{F}[g(t)]}$$

2. $\boxed{\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)}$

Dok: $\mathcal{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{i\omega t}\,dt \underset{\substack{a\cdot t=u\\ dt=\frac{du}{a}}}{=} \frac{1}{a}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\frac{\omega}{a}u}\,du}_{F\left(\frac{\omega}{a}\right)}$

3. $\boxed{\mathcal{F}[\overline{f(t)}]=\overline{F(-\omega)}}$

Dok: $\mathcal{F}[\overline{f(t)}]=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}e^{i\omega t}\,dt \overset{?}{=} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt}=\overline{F(-\omega)}$

4. $\boxed{\mathcal{F}[f(t-a)]=e^{ia\omega}\mathcal{F}[f(t)]}$

Dok: $\mathcal{F}[f(t-a)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{i\omega t}\,dt \underset{\substack{t-a=u\\ dt=du}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega(u+a)}\,du=$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega u}\cdot e^{i\omega a}\,du=e^{ia\omega}F(\omega)$$

5. $\mathcal{F}[e^{iat}f(t)]=F(\omega+a)$

Dok: $\mathcal{F}[e^{iat}f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(\omega+a)t}\,dt=$

$$=F(\omega+a)$$

3. Čemu je enako $\mathcal{F}[f(t-a)]$ in $\mathcal{F}[e^{iat}\cdot f(t)]$

Glej vpr. 2, točki 4 in 5

4. Odvajanje pri F.t. $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$

V prostoru ω:

$$F'(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} it\, f(t)e^{i\omega t}\,dt = \boxed{\mathcal{F}[it\, f(t)]}$$

odvajanje integrala s parametrom

$$\boxed{F^{(n)}(\omega)=\mathcal{F}[(it)^n f(t)]}$$

V prostoru t:

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(t)] = -i\omega\, \mathcal{F}[f(t)]}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (-i\omega)^n\, \mathcal{F}[f(t)]}$$

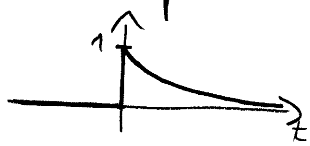
Dok.: $\mathcal{F}[f'(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{i\omega t}\,dt = \overbrace{f(t)e^{i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty}}^{0} - i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt =$

Per partes: $f'(t)dt=du \quad e^{i\omega t}=v$
$u=f(t) \quad dv=i\omega e^{i\omega t}dt$

$= -i\omega\,\mathcal{F}[f(t)]$

5. Ali lahko na fji e_+^{-t} uporabite $\mathcal{F}[f'(t)]=-i\omega\mathcal{F}[f(t)]$

$$e_+^{-t}=\begin{cases} e^{-t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$



V točki 0 ni odvedljiva!

Če uporabimo definicijo

$$\mathcal{F}[(e_+^{-t})']=\int_0^\infty(-e^{-t})e^{i\omega t}\,dt = -\int_0^\infty e^{-t(1-i\omega)}\,dt = -\frac{1}{1-i\omega}$$

Če uporabimo formulo:

$$\mathcal{F}[(e_+^{-t})'] = -i\omega\,\mathcal{F}[e_+^{-t}] = -i\omega\int_0^\infty e^{-t(1-i\omega)} = -\frac{i\omega}{1-i\omega}$$

Torej $\mathcal{F}[(e_+^{-t})'] \neq -i\omega\,\mathcal{F}[e_+^{-t}]$

6. Inverzna F. t.

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega u}\,du$$

$f(t)$ in $F(\omega)$ Fourierjev par

7. Konvolucija in njene lastnosti

$f(t), g(t) \in L(-\infty,\infty)$ - absolutno integrabilni fji (to ni konstanta, sinus, kosinus ...)

$|f(t)| < M$ - f omejena (lahko bi bila tudi g)

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = f * g$$

Velja: $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt$

Lastnosti:

$$[a f(t)] * g(t) = a(f(t) * g(t))$$

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

$$f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t)$$

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

$$\mathcal{F}[h(t)] = \mathcal{F}[f(t)]\cdot\mathcal{F}[g(t)]$$

Dok: $\mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dt\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+u)} f(u)du =$$

$t - \tau = u$

$t = u + \tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} g(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega u}du = \mathcal{F}[f(t)]\,\mathcal{F}[g(t)]$$

8. Parsevalova enačba

$f(t) \in L(-\infty,\infty)$, $F(\omega) \in L(-\infty,\infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Dok: $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)}F(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)}d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)}e^{i\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{f(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)}e^{+i\omega t}dt$$

9. F. sinusna transf. in lastnosti

$f(t)$ liha $\longrightarrow$ $f(-t) = -f(t)$

$$F(\omega) = 2i\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt$$

$$f(t) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\sin(\omega t)d\omega$$

$$\boxed{F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\,dt}$$

Lastnosti:

$$\mathcal{F}_s[f'(t)] = -\omega\mathcal{F}_c[f(t)]$$

$$\mathcal{F}_s[f''(t)] = \omega f(0) - \omega^2\mathcal{F}_s[f(t)]$$

Veljati mora:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\sin(\omega t) = 0$$

Pars. teorem za F.s.t:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} |F_s(\omega)|^2 d\omega$$

(10) Fourierova kosinusna transf. in lastnosti

$f(-t) = f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt =$$

$$= -\int_{\infty}^{0} f(-u)e^{-i\omega u}du + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt =$$

$u = -t$

$du = -dt$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$

$$F(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\cos(\omega t)dt$$

$$\boxed{F_c(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_c(\omega)\cos(\omega t)d\omega}$$

Lastnosti:

$$\mathcal{F}_c[f'(t)] = -f(0) + \omega\mathcal{F}_s[f(t)]$$

$$\mathcal{F}_c[f''(t)] = -f'(0) - \omega^2\mathcal{F}_c[f(t)]$$

Veljati mora

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\cos(\omega t) = 0$$

Parseval za F.k.t.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F_c(\omega)|^2 d\omega$$

(11) na novi strani

(12) Definicija Laplaca! Kdaj obstaja?

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[f(t)]$$ f definirana za vse $t>0$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

? Obstaja, ko integral konvergira za vse s kakšnega dela kompleksne ravnine.

Linearen: $\mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$

(11) Določite F.k.t za e^{-t}

glej vpr. 5.

$$\int_0^\infty e^{-t}e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{1-i\omega} = \int_0^\infty e^{-t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\,dt =$$

$$= \mathcal{F}_c[e^{-t}] + i\,\mathcal{F}_s[e^{-t}] = \frac{1+i\omega}{1+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}_c[e^{-t}] = \frac{1}{1+\omega^2}$$

(13) Čemu je enako $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$?

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Dok: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}\,dt =$

$$= F(s-a)$$

(14) Navedite zadostne pogoje za eksistenco L.t.! Ali poznate kakšno f-jo, za katero L.t. ne obstaja?

Naj bo $f(t)$ odsekoma zvezna (da se jo razdeliti na končno mnogo intervalov, na katerih je zvezna) in naj velja: $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ za vse $t>0$ za nek M in α. Potem L.t. f-je $f(t)$ obstaja

Dok: $|F(s)| \le \int_0^\infty |f(t)|e^{-st} \le \int_0^\infty e^{-st}Me^{\alpha t}\,dt = \frac{M}{s-\alpha}$

$s>\alpha$ oziroma $Re[s]>\alpha$

L.t. ne obstaja za e^{t^2}

15 L.t. odvoda in integrala

Odvod:

$f(t)$ zvezna za $t \geq 0$, naj obstaja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$$\boxed{\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)}$$

Dokaz: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt =$

$f'(t)\,dt = dv \qquad v = f(t)$

$e^{-st} = u \qquad du = -se^{-st}\,dt$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty f(t)se^{-st}\,dt = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s\cdot\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[f'''(t)] = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{n-1}(0)$$

Integral:

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\} = \frac{F(s)}{s}, \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Če $f(t)$ odsekoma zvezna

16 Kompl. inverzna formula za L.t.

Naj bo $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

Potem je $\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)e^{st}\,ds, \; t > 0}$

Izpeljava $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-st}\,dt = \qquad f^*(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$s = \gamma + i\omega \longrightarrow = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-(\gamma + i\omega)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}(f^*(t)e^{-\gamma t})e^{-i\omega t}\,dt$

$$f^*(t)e^{-\gamma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

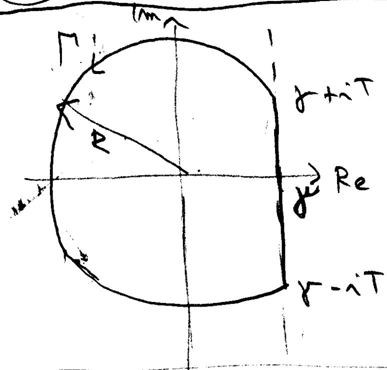
$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma + i\omega)e^{(\gamma + i\omega)t}\,d\omega$$

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)e^{st}\,ds \longleftarrow \text{subst } \gamma + i\omega = s, \; i\,d\omega = ds$$

γ leži desno od vseh singularnosti

integriramo po tej premici

17. Kako izračunamo $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ s pomočjo residuumov?



$$\frac{1}{2\pi i}\oint F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi i}2\pi i\sum \mathrm{Res}[F(s)e^{st}] =$$
$$= \sum \mathrm{Res}[F(s)e^{st}] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} F(s)e^{st} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(s)e^{st}ds$$
$$\Rightarrow f(t) \quad \left(\text{ker } \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(s)e^{st}ds = 0\right)$$

$$\boxed{f(t) = \sum \mathrm{Res}[F(s)e^{st}]}$$

18. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right]$?

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right] = \mathrm{Res}_{s=-1}\left[\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right] + \mathrm{Res}_{s=2}\left[\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right] \stackrel{*}{=}$$

$$\mathrm{Res}_{s=-1}\left[\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right] = \lim_{s\to -1}\frac{e^{st}}{(s-2)^2} = \frac{e^{-t}}{9}$$

$$^{*}\mathrm{Res}_{s=s_0} f(s) = \lim_{s\to s_0}(s-s_0)f(s) \quad \text{1. red}$$
$$\mathrm{Res}_{s=s_0} f(s) = \lim_{s\to s_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}f(s)(s-s_0)^n$$

$$\mathrm{Res}_{s=2}\left[\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right] = \lim_{s\to 2}\frac{d}{ds}\frac{e^{st}}{s+1} =$$
$$= \lim_{s\to 2}\frac{te^{st}(s+1) - e^{st}}{(s+1)^2} = \frac{3te^{2t}}{9} - \frac{e^{2t}}{9}$$
$$\stackrel{*}{=} \frac{e^{-t}}{9} + \frac{3te^{2t} - e^{2t}}{9}$$

19. Kako rešujemo D.E. s pomočjo $\mathcal{L}$? $y'' + \omega^2 y = r(t)$, $\cancel{y(0) = y_0}$, $y'(0) = y_0'$

Upoštevamo: $\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$
$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$
$\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + \omega^2Y(s) = R(s)$$
$$(s^2+\omega^2)Y(s) = R(s) + sy(0) + y'(0)$$
$$Y(s) = \frac{R(s) + sy(0) + y'(0)}{s^2+\omega^2}$$

Zadnji korak je inverzna transformacija $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

20) Opišite iskanje $\mathcal{L}^{-1}$ s pomočjo razcepa na parcialne ulomke! (9)

Naj bo $Y(s)=\frac{G(s)}{H(s)}$

a) $H(s)$ ima enkratno ničlo $H(s)=(s-a)H_1(s)$ v točki a

$$\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{A}{s-a}+W(s)$$ v a nima pola

$$\underbrace{(s-a)\frac{G(s)}{H(s)}}_{Q(s)}=A+(s-a)W(s)$$

$$A=\lim_{s\to a}(s-a)\frac{G(s)}{H(s)}=\lim_{s\to a}\frac{G(s)}{\frac{H(s)}{s-a}}=\lim_{s\to a}\frac{G(s)}{\frac{H(s)-H(a)}{s-a}}=\frac{G(a)}{H'(a)}$$

$$y(t)=A\cdot e^{at}+\ldots=\frac{G(a)}{H'(a)}e^{at}+\ldots$$

Pri večih realnih polih $a_1,a_2,\ldots a_n$:

$$y(t)=\frac{G(a_1)}{H'(a_1)}e^{a_1t}+\frac{G(a_2)}{H'(a_2)}e^{a_2t}+\ldots+\frac{G(a_n)}{H'(a_n)}e^{a_nt}$$

b) $H(s)$ ima kompl. rešitev $a=\alpha+i\beta,\ \bar{a}=\alpha-i\beta$

$$Y(s)=\frac{A}{s-a}+\frac{B}{s-\bar{a}}+W_1(s)$$

$$y(t)=Ae^{at}+Be^{\bar{a}t}+\ldots$$ izkaže se, da $\bar{A}=B$

$$y(t)=Ae^{at}+\bar{A}e^{\bar{a}t}+\ldots$$ $$A=\frac{G(a)}{H'(a)}=Q_1+iQ_2$$

$$y(t)=(Q_1+iQ_2)e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+(Q_1-Q_2 i)e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)+\ldots=$$
$$=2e^{\alpha t}(Q_1\cos\beta t-Q_2\sin\beta t)+\ldots$$

c) $H(s)$ ima večkratno ničlo stopnjen m

$$H(s)=(s-a)^m H_1(s)$$

$$Y(s)=\frac{A_m}{(s-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_1}{s-a}+W_2(s)$$ Množiš z $(s-a)^m$ in dobiš vse koeficiente

$$Q(s)=(s-a)^m Y(s)=A_m+A_{m-1}(s-a)+\ldots+A_1(s-a)^{m-1}+W_2(s-a)^m$$

$$A_m=\lim_{s\to a}Q(s)=Q(a)\ ;\ A_{m-1}=Q'(a)\ ;\ A_{m-2}=\frac{Q''(a)}{2!}$$

$$A_{m-k}=\frac{Q^{(k)}(a)}{k!}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^k}\right\}=\frac{e^{at}t^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$y(t)=e^{at}\left[A_m\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+A_{m-1}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}+\ldots+A_1\right]+\ldots=e^{at}P_m(t)+\ldots$$

d) $H(s)$ ima več konjugiranih kompl. ničel, ki so m-kratne

$$Y(s)=\left[\frac{A_m}{(s-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}}+\dots+\frac{A_1}{s-a}\right]+ \qquad a=\alpha+\beta i$$
$$+\left[\frac{B_m}{(s-\bar a)^m}+\frac{B_{m-1}}{(s-\bar a)^{m-1}}+\dots+\frac{B_1}{s-\bar a}\right]+W_2(s)$$

$$A_{m-k}=\frac{Q^{(k)}(a)}{k!},\quad B_{m-k}=\frac{Q^{(k)}(\bar a)}{k!}=\bar A_{m-k}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_k}{(s-a)^k}+\frac{\bar A_k}{(s-\bar a)^k}\right\}=A_k e^{at}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}+\bar A_k e^{\bar a t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}=$$
$$=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t}\left[(A_k+\bar A_k)\cos\beta t+i(A_k-\bar A_k)\sin\beta t\right]$$

21 Reševanje sistemov DE z $\mathcal{L}$; Primer: $\dot x+x=0 \quad x(0)=0$, $\dot y+2y=r(t) \quad y(0)=0$

$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$ $\qquad R(s)=\mathcal{L}\{r(t)\}$

$Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$

$$sX(s)-x(0)+X(s)=0$$
$$sY(s)-y(0)+2Y(s)=R(s)$$

Dobimo linearen sistem enačb

$$sX(s)+X(s)=0$$
$$X(s)(s+1)=0 \Rightarrow X(s)=0$$
$$x(t)=0$$

$$sY(s)+2Y(s)=R(s)$$
$$Y(s)=\frac{R(s)}{s+2}$$

$$y(t)=r(t)\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=r(t)e^{-2t}$$

22 Odvajanje in integriranje Laplaceovih transformacij

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$F'(s)=\int_0^\infty -t f(t)e^{-st}\,dt \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\{t f(t)\}=-F'(s)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s')\,ds'} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} \text{ mora biti končna}$$

Dokaz

$$\int_s^\infty F(s')\,ds'=\int_s^\infty ds'\int_0^\infty f(t)e^{-s't}\,dt=\int_0^\infty f(t)\,dt\int_s^\infty e^{-s't}\,ds'=$$
$$=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt \leftarrow \text{ker } \int_s^\infty e^{-s't}\,ds'=\left.\frac{-e^{-s't}}{t}\right|_s^\infty=\frac{e^{-st}}{t}$$

23 Rešite $t\dot{x}(t)+x(t)=2t$

$$\mathcal{L}\{t\dot{x}(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[sX(s)-x(0)\right] = -\left[X(s)+sX'(s)\right]$$

$$-X(s)-sX'(s)+X(s)=\frac{2}{s^2}$$

$$X'(s) = -\frac{2}{s^3} = \frac{dX}{ds}$$

$$X = -2\frac{s^{-2}}{-2}+C = \frac{1}{s^2}+C$$

$$x(t) = t + C\cdot\mathcal{L}^{-1}[1]$$

24 Konvolucija in L.t.

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}}$$

Dok: $\left.\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\\ \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt\end{aligned}\right\}$ $f(t)$ in $g(t)$ za $t<0$ sta 0

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-su}\,du =$$

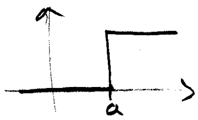
$u = t-\tau$

$du = dt$

$$= \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}$$

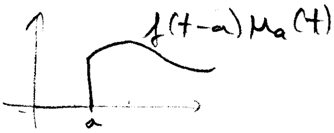
25 Čemu je enako $\mathcal{L}\{f(t-a)\,u_a(t)\}$?

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t>0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int_0^{\infty} u_a(t)e^{-st}\,dt = \int_a^{\infty} e^{-st}\,dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_a^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s}$$

$f(t-a)\,u_a(t)$



$$\mathcal{L}\{f(t-a)u_a(t)\} = e^{-as}F(s)$$

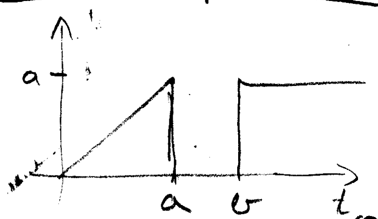
Dok: $\mathcal{L}\{f(t-a)\,u_a(t)\} = \int_0^{\infty} f(t-a)u_a(t)e^{-st}dt = \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st}dt =$

$$= \int_0^{\infty} f(u)e^{-s(u+a)}du = e^{-as}\int_0^{\infty} f(u)e^{-su}\,du = e^{-as}F(s)$$

$t-a=u$

$dt = du$

26 Zapišite fjo in poiščite $\mathcal{L}$:



$$f(t) = t\cdot(u_0(t) - u_a(t)) + a\cdot u_b(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^a te^{-st}dt + \int_b^\infty ae^{-st}dt =$$

$t = u \qquad dt = du$

$e^{-st}dt = dv \qquad \frac{e^{-st}}{-s} = v$

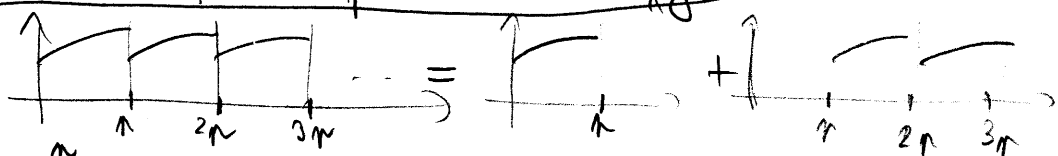
$$= -\frac{te^{-st}}{s}\Big|_0^a + \frac{1}{s}\int_0^a e^{-st}dt + a\int_b^\infty e^{-st}dt =$$

$$= -\frac{ae^{-as}}{s} + \frac{1}{s}\,\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^a + a\,\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_b^\infty =$$

$$= -\frac{ae^{-as}}{s} - \frac{e^{-at}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{ae^{-s\cdot b}}{s}$$

27 Laplaceova transf. in periodične fje

$f(t+p) = f(t)$



$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^p f(t)e^{-st}dt + e^{-ps}F(s)$$

$$F(s)(1-e^{-ps}) = \int_0^p f(t)e^{-st}dt$$

$$\boxed{F(s) = \frac{\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-ps}}}$$

28 Gama fja: definicija in lastnosti

$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad ; \quad x>0$

Ko ta integral obstaja, obstaja tudi $\Gamma(x)$ - zvezna in odvedljiva, integral $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ enakomerno konvergenten. Glej še razl. upr.

29 Pokažite, da $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \frac{e^{-t}t^x}{x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty t^x e^{-t}dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

$t^{x-1}dt = dv \qquad v = \frac{t^x}{x}$

$u = e^{-t} \qquad du = -e^{-t}$

$\Gamma(n+1) = n!$

30 Izračunajte $\int_0^\infty e^{-x^n} dx$

$$\int_0^\infty e^{-x^n} dx = \int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

$x^n = t$

$x = t^{\frac{1}{n}}$

$dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$

31 Funkcija beta

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad ; \ x>0,\ y>0$$

$B(x,y) = B(y,x)$

Dok: $u = 1-t$ $\qquad B(x,y) = -\int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1} du$

$du = -dt$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

32 Kako rešujemo DE s pomočjo vrst

Iščemo rešitev oblike $y = \sum_{n=0}^\infty c_n (x-a)^n$

Torej, ko $a=0$: $\quad y = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n$

$y' = \sum_{n=1}^\infty n \cdot c_n x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=2}^\infty n(n-1) c_n x^{n-2}$

Zapišemo še $p(x)$ in $g(x)$ v obliki vrste, vstavimo, in dobimo izraz:

$$K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \ldots + K_n x^n + \ldots = 0$$

Velja: $K_0 = 0$

$K_1 = 0$

$K_2 = 0$

$\vdots$

Sistem rešimo

33 Rešite $xy' - y = 0$ s pomočjo vrst!

$$xy' - y = 0 \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n c_n - c_n) x^n - c_0 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (n-1) x^n - c_0 = 0$$

$$-c_0 + 0 \cdot c_1 x + c_2 x^2 + 2c_3 x^3 + \dots = 0$$

$c_0 = 0$, $c_1 =$ poljuben, $c_1 = c_2 = \dots = 0$

$$y = C_1 \cdot x$$

34 Legendrova DE in njene rešitve

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \; ; \; n \in \mathbb{R}$$

Rešitve so Legendrove funkcije. Rešujemo s pomočjo

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) c_n x^{n-2}$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + n(n+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$y(x) = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x)$ na intervalu $-1 < x < 1$ (ker y_1 in y_2 konvergirata samo za $|x|<1$)

Če n sodo, y_1 polinom n-te stopnje in y_2 neskončno, če n liho ravno obratno – Legendrovi polinomi $P_n(x)$

y_1 in y_2 alternirajoči vrsti

$$y_1 = 1 - a_2 x^2 + a_4 x^4 - \dots$$

$$y_2 = x - a_3 x^3 + a_5 x^5 - \dots$$

35 Besselova enačba in njene rešitve

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad \nu \in \mathbb{R}, \nu \geq 0$$

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{x^2 - \nu^2}{x^2}}_{g(x)} y = 0$$

$p(x)$ in $g(x)$ imata v $x=0$ singularnost

Zato iščemo rešitev oblike $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) x^{m+r-2}$$

$c_0 \neq 0$

r je poljuben

Vstavimo:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r} + (x^2 - \nu^2) \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

Lihi koeficienti c_{2l-1} so enaki nič, za c_0 izberemo $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ in izračunamo $c_2, c_4, \dots$ do $J_\nu(x)$

Če ν ni celo število:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

Če ν celo število, sta $J_\nu(x)$ in $J_{-\nu}(x)$ linearno odvisni, velja $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, rešitev je takrat

$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$ – Neumannova formula, za vse vrednosti ν

36 Lastnosti Besselovih f-ij

$$[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$[x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J_\nu'(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$-\nu x^{-\nu-1} J_\nu(x) + x^{-\nu} J_\nu'(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x) &= J_{\nu-1}(x) \\ -\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x) &= -J_{\nu+1}(x) \end{aligned}\right) +$$

$$J_\nu'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)\right]$$

$$\boxed{\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)}$$

37 Ortogonalni sistemi funkcij

$g(x)$, $f(x)$ realni fji, definirani na $[a, b]$

$(g(x), f(x)) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ - skalarni produkt dveh fij naj eksistira

Dve fji sta ortogonalni, če:

$(g(x), f(x)) = 0$

Če imamo sistem fij: $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots g_m(x) \dots$

in za poljubni fji velja $(g_i, g_j) = \int_a^b g_i(x) g_j(x) dx = 0, \ i \neq j$, je sistem ortogonalen

Če imamo sistem fij, ki je ortogonalen, in ima vsaka fja normo $\|g_i\| = \sqrt{(g_i, g_i)} = \sqrt{\int_a^b g_i(x)^2 dx} = 1$, je sistem ortonormiran

Za ortogonalnost z utežjo imamo $\rho(x)$:

$(g_i, g_j) = \int_a^b g_i(x) g_j(x) \rho(x) dx = 0 \quad , i \neq j$

38 Kako je z ortogonalnostjo Legendrovih polinomov in Besselovih funkcij?

Legendreovi polinomi so na intervalu $[-1, 1]$ ortogonalni

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad , n \neq m$$

$$\|P_n\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

Besel:

$$\int_0^R x \cdot J_m\left(\frac{\alpha_{km}}{R} x\right) J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R} x\right) dx = 0 \quad ; m \neq k$$

α_{mn} ničle ustrezne Besselove fje

39 Polinomi Čebiševa

$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ 1. vrste

$U_n(x) = \sin(n \cdot \arccos x)$ 2. vrste

Na intervalu $[-1,1]$ sestavljajo ortogonalen sistem glede na utežno funkcijo $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. So tudi rešitev D.E: $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$

40 Laguerrovi polinomi

$L_0 = 1$

$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$, $n = 1, 2, \ldots$

Množica Laguerrovih polinomov je ortogonalna na $[0,\infty)$ z utežjo $p(x) = e^{-x}$, torej

$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0$, $m \neq n$

So rešitev DE: $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

41 Hermitovi polinomi

$H_0 = 1$

$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$ $n = 1, 2, \ldots$

So ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ z utežjo $p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, torej:

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x) dx = 0$, $m \neq n$

So rešitev DE: $y'' - xy' + ny = 0$

$$\left(\begin{array}{l} H_{n+1}(x) = x H_n(x) - H_n'(x) \\ H_n'(x) = n \cdot H_{n-1}(x) \end{array} \right)$$

(42) Poiščite Hermitov polinom $H_1(x)$, če veste, da (18)

$H_0(x)=1$, H_0 in H_1 pa sta ortogonalna z ustrezno utežjo!

$$p(x)=e^{-x^2/2}$$

$$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=a+bx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cdot 1\cdot(a+bx)\,dx=0$$

$$a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + b\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2}dx}_{\text{liha na sim intervalu } = 0}=0$$

$$a=0 \Rightarrow H_1(x)=b\cdot x,\ b \text{ poljuben}$$

(43) Problem brahistohrone

V navpični ravnini dani točki T_1 in T_2, ki ne ležita na isti navpični premici, T_2 leži nižje kot T_1. Najti je treba krivuljo, po kateri točkasta masa pod vplivom težnosti najhitreje zdrsne od T_1 do T_2. Koordinatno izhodišče postavimo v točko T_1, točka T_2 ima koordinate (a, b). Čas, ki ga točka potrebuje je

$$t[y(x)]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$$

Med vsemi krivuljami moramo najti tisto, pri kateri je t najmanjši

WWW. STROMAR. SI

44 Pojem funkcionala

$$I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y')\,dx$$

interval $[a_1, a_2]$ na krajiščih zahtevani vrednosti $y(a_1) = b_1$, $y(a_2) = b_2$

Predpis $I[y(x)]$ priredi funkciji $y(x)$ neko realno število.

Definicijsko območje funkcionala D_f sestavljajo zvezno odvedljive fje, ki v krajiščih zasedejo zahtevani vrednosti.

Iščemo tisto fjo, kjer $I(y)$ doseže maks. ali min. vrednost

45 Kako je definiran lokalni ekstrem funkcionala?

Funkcional $I(y)$ doseže v funkciji $u(x)$ lokalni maksimum, če obstaja vsaj ena taka okolica ε, da je za vsako $y(x)$ iz okolice izpolnjena neenačba

$$I(y) - I(u) \leq 0$$

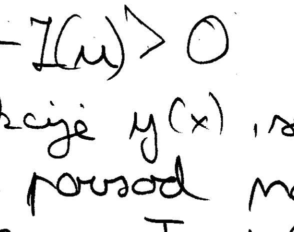
Minimum: $I(y) - I(u) > 0$

(Okolico ε funkcije $y(x)$, sestavljajo tiste fje $Y(x) \in D_f$, za katere velja povsod na intervalu $[a_1, a_2]$ neenačba $|Y(x) - y(x)| < \varepsilon$ - Torej ležijo v pasu 2ε okoli $y(x)$)

46 Funkcionali za fje dveh spremenljivk

$$I[z(x,y)] = \iint_D f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Ekstrem iščemo med vsemi zadosti gladkimi fjami, ki na robu področja D zavzamejo predpisano vrednost



(47) Kako izgleda izoperimetričen problem

Podani naj bosta točki $T_1(a_1,0)$ in $T_2(a_2,0)$. Povežemo ju s krivuljo $y(x)$, ki ima dolžino l. Med vsemi krivuljami hočemo najti tisto, ki zabaiso oklepa največjo ploščino.

Iščemo ekstrem funkcionala $I(y(x)]=\int_{a_1}^{a_2} y\,dx$

pri pogoju $l=\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$

V splošnem: Dana sta dva funkcionala $I[y(x)]$ in $K[y(x)]$, definirana na istem definicijskem območju. Iščemo tisto $y(x)$, kjer ima $K(y)$ predpisano vrednost, $I(y)$ pa ekstrem

(48) Osnovni izrek variacijskega računa

Naj bosta $P(x)$ in $Q(x)$ zvezni na $[a_1,a_2]$. Za vsako zvezno funkcijo $\eta(x)$, za katero velja $\eta(a_1)=\eta(a_2)=0$ naj bo:

$$I=\int_{a_1}^{a_2}(P(x)\eta(x)+Q(x)\eta'(x))dx=0$$

Potem je $P(x)-Q'(x)=0$

Glej še dokaz stran 123

(49) Eulerjeva diferencialna enačba

Iščemo pogoj, kjer ima $I[y(x)]=\int_{a_1}^{a_2} f(y,y',x)dx$ lokalni minimum.

Naj bo minimum pri $u(x)$. Potem velja $w(x)=y(x)-u(x)$; $|w(x)|<\varepsilon$, $w(a_1)=0$, $w(a_2)=0$. $\eta(x)$ naj bo poljubna fja, ki je na $[a_1,a_2]$ zvezno odvedljiva, $\eta(a_1)=\eta(a_2)=0$

Izberemo realno število α, da $w(x)=\alpha\cdot\eta(x)$, potem je $y(x)=u(x)+\alpha\eta(x)$

$$I[u(x)+\alpha\eta(x)]=\int_{a_1}^{a_2} f(x,u(x)+\alpha\eta(x),u'(x)+\alpha\eta'(x))dx=J(\alpha)$$

Fja doseže pri $\alpha=0$ $\Rightarrow$ $F'(0)=0$. Integral odvajamo po α in dobimo pogoj $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0}$

50 Integracija Eulerjeve DE

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Eulerjeva DE je DE 2. reda. Torej splošna rešitev odvisna od dveh konstant $y = y(x, C_1, C_2)$, ki jih določimo, tako, da ekstremala izpolni pogoja $y(a_1, C_1, C_2) = b_1$, $y(a_2, C_1, C_2) = b_2$. Eulerjeva DE nima vedno rešitve, če jo ima, se lahko zgodi, da jih ima več

51 Eulerjeva DE, ko $f = f(x, y')$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ integriramo in dobimo

$f_{y'}(x, y') = C_1$ DE 1. reda

52 Eulerjeva DE, ko $f = f(y, y')$

Eulerjeva enačba ima prvi integral

$$f - y' f_{y'} = C_1 \quad y'' = 0$$

$$\frac{d}{dx}(f - y' f_{y'}) = 0$$

53 Rotacijska ploskev z najmanjšo površino

Imamo točki v ravnini xy: $T_1(a_1, b_1)$ in $T_2(a_2, b_2)$. Med njima povlečemo krivuljo $y(x)$, zanima nas najmanjša površina, ki jo dobimo, če zavrtimo $y(x)$ za cel krog okoli osi x. Funkcional je oblike:

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad , f = y\sqrt{1+y'^2}$$

Ker $f = f(y, y')$ zapišemo $f - y' f_{y'} = C_1$

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y y' y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

$$y\left(\frac{(1+y'^2) - y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = C_1 \Rightarrow y = C_1\sqrt{1+y'^2} \quad \text{Enačbo rešimo,}$$

in določimo konstante, da gre y skozi T_1 in T_2

54) Variacijski problem za več funkcij

Ekstrem funkcionala odvisen od večih funkcij

$$I(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

Velja: $y_1(a_1) = b_{11}$ $y_2(a_1) = b_{12}$ ... $y_n(a_1) = b_{1n}$
$y_1(a_2) = b_{21}$ $y_2(a_2) = b_{22}$ ... $y_n(a_2) = b_{2n}$

Naj pri $u_1(x), u_2(x) \ldots u_n(x)$ doseže ekstrem.
$u_2(x) \ldots u_n(x)$ fiksiramo in spreminjamo $u_1(x)$. Izpolnjen mora biti Eulerjev pogoj

$$f_{y_1} - \frac{d}{dx} f_{y_1'} = 0$$

Podobno za ostale, dobimo n DE:

$$f_{y_k} - \frac{d}{dx} f_{y_k'} = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

55) Reševanje izoperimetričnega problema

Med vsemi fjami $y(x)$ na intervalu $[a_1, a_2]$, za katere velja $y(a_1) = b_1$, $y(a_1) = b_2$ iščemo take, kjer ima funkcional $I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y')\,dx$ ekstrem in

$K[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} g(x, y, y')\,dx$ predpisano vrednost $K[y(x)] = l$

Naj bo $u(x)$ rešitev problema. Izberemo dve zvezno odvedljivi fji $\eta_1(x)$ in $\eta_2(x)$, $\eta_1(a_1) = \eta_1(a_2) = 0$, $\eta_2(a_1) = \eta_2(a_2) = 0$.
Če izberemo dovolj majhne α in β, leži $y(x) = u(x) + \alpha\eta_1(x) + \beta\eta_2(x)$ v ε-okolici ekstremale $u(x)$. Ko to vstavimo v funkcionala, postaneta funkciji α in β

$$I[u(x) + \alpha\eta_1(x) + \beta\eta_2(x)] = J(\alpha, \beta)$$
$$K[u(x) + \alpha\eta_1(x) + \beta\eta_2(x)] = G(\alpha, \beta)$$

Nalogo smo prevedli na reševanje vezanega ekstrema
Definiramo $F(\alpha, \beta) = J(\alpha, \beta) + \lambda G(\alpha, \beta)$, veljati mora $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0$. Iz tega dobimo Eulerjevo DE.
Za funkcional $I + \lambda K = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')\,dx$.
Torej rešujemo variacijsko nalogo za funkcional $I + \lambda K$.
Za določitev konstant in λ v rešitvi uporabimo $T_1 = (a_1, b_1)$, $T_2 = (a_2, b_2)$ in pogoj da $K(y) = l$

56) Direktne metode variacijskega računa

Iščemo ekstrem funkcionala $I(y)$. Izberemo zaporedje koordinatnih funkcij: $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ na območju D_i

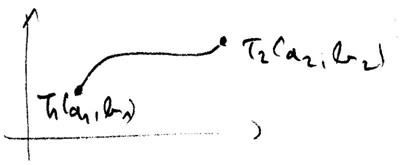
Vse njihove lin. kombinacije $y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$ ležijo v D_i.

To je podmnožica D_i, kjer ekstremala v splošnem ni ena izmed teh lin. kombinacij, iščemo pa ekstremalo teh funkcij $-y_n(x)$.

Če večamo število n preko vseh meja, konvergira $y_n(x)$ proti $y(x)$.

Ko vstavimo funkcije v funkcional dobimo funkcijo koeficientov $c_1, c_2, \dots c_n$. Če hočemo najti njen ekstrem, moramo rešiti sistem enačb $\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \dots \frac{\partial I}{\partial c_n} = 0$

57) Poiščite krivuljo, ki veže 2 točki in ima najmanjšo dolžino



Med vsemi $y(x)$, za katere je $y(a_1) = b_1$ in $y(a_2) = b_2$ iščemo tisto, za katero je $l = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ najmanjši

$$f = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C_1$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \quad /()^2$$

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = C_1^2$$

$$y'^2 = C_1^2 + y'^2 C_1^2$$

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}$$

$$dy = \underbrace{\frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}}_{C_1^*} dx \Rightarrow y = C_1^* x + C_2$$

krivulja je premica

58 Opišite definicijsko območje funkcionala $I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} f(x,y,y')dx$!

To so vse zvezno odvedljive fje $y(x)$, za katere velja $y(a_1)=b_1$ in $y(a_2)=b_2$

59 Kaj je ε-okolica funkcije $y(x)$

Vse fje $Y(x)$, za katere velja
$|Y(x)-y(x)| < \varepsilon$ za vsak x na intervalu $[a_1,a_2]$.
Torej so to vse funkcije ki ležijo na pasu širine 2ε okoli $y(x)$

60 Kako izgleda kvadratni funkcional?

Funkcional, za katerega je
$\frac{\partial I}{\partial C_1}=0$, $\frac{\partial I}{\partial C_2}=0$, ... $\frac{\partial I}{C_n}=0$ (glej npr. 56)
sistem linearnih algebrskih enačb, ki ga ne znamo rešiti.
npr.: $I(y)=\int_{a_1}^{a_2}[p(x)y'^2+g(x)y^2+f(x)y]dx$ $y(a_1)=b_1$ $y(a_2)=b_2$

61 Rešite variacijski problem $I=\int_0^1(y^2+2xy')dx$, $y(0)=0$ $y(1)=1$

$f=y^2+2xy' \Longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$
$\frac{\partial f}{\partial y'}=2x$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=2$

$2y-2=0$
$y=1$ ekstremala ne obstaja, ker ne ustreza pogoju $y(0)=0$

(62) Kaj je to PDE? Navedite nekaj primerov! (25)

Enačba, ki vsebuje enega ali več parcialnih odvodov neznane funkcije. Red najvišjega odvoda = red PDE

PDE 2. reda: $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$

Pr.:

- Enodimenzijska enačba valovanja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Tridimenzijska enačba valovanja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(t, x, y, z)$$

- Telegrafska enačba:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial w}{\partial t} - RGw = 0$$

(L, C, R, G) parametri električne linije

- Laplaceova enačba:

$$\Delta u = 0 \quad , \text{kjer} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- Difuzijska enačba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

(63) Zapišite splošno lin. PDE 2. reda za $u = u(x, y)$

$$A \cdot u_{xx} + B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G(x, y)$$

$u(x, y)$ iskana fja, koeficienti odvisni le od x in y

$H = B^2 - 4AC$

Če
$H < 0$ - eliptični tip
$H = 0$ - parabolični tip
$H > 0$ - hiperbolični tip

64 Napišite PDE elektromagnetnega polja

ELMG polje določeno s parom funkcij $\vec{E}(t,\vec{r})$ in $\vec{H}(t,\vec{r})$
Omejimo se na prostor, kjer polji nimata izvorov, znov ima permeabilnost μ in dielektričnost ε.

Maxwelove enačbe:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$
$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \vec{H}_t$$
$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_t$$

Zveza med ΔE in $\vec{E}_{tt}$ je

$$c^2 \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$ hitrost svetlobe

65 Klasificirajte lin. PDE 2. reda

Glej: vprašanje 63.

66 Kakšne dodatne pogoje je treba predpisati pri enačbah posameznega tipa, da je rešitev enolično določena

Če ima PDE rešitev jih ima več. Za določevanje potrebujemo dodatne pogoje:

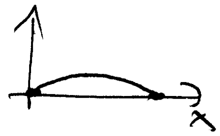
- Če imamo dane vrednosti funkcije in njene odvode na robu območja - robni pogoji
- če imamo dano vrednost rešitve pri $t=0$ - zač. pogoji

Za določanje enolične rešitve potrebujemo robne in začetne pogoje

WWW. STROMAR. SI

67 Enačba za nihanje strune. Rešite jo z metodo separacije spremenljivk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ Struna, dolga l, na koncih pritrjena



$u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$ - robna pogoja

$u(x,0)=f_1(x)$, $\dot{u}(x,0)=f_2(x)$ začetna pogoja

$u(x,t)=F(x)\,G(t)$ - V tej obliki iščemo rešitev

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\ddot{G}(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

Vstavimo v enačbo: $F(x)\ddot{G}(t) = a^2 F''(x)G(t)$ delimo z a^2FG

$$\frac{\ddot{G}(t)}{a^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -k^2$$

1.DE: $F''(x) + k^2 F(x) = 0$

2.DE: $\ddot{G}(t) + a^2k^2 G(t) = 0$

Rešimo 1.DE: $F(x) = A\cos kx + B\cdot\sin kx$

Robni pogoji: $F(0)=0$, $F(l)=0$

$F(0) = A = 0$

$F(l) = B\cdot\sin(k\cdot l) = 0 \Rightarrow k\cdot l = n\pi \Rightarrow k = k_n = \frac{n\pi}{l}$, $n=0,\pm1,\pm2$

Postavimo $B=1$: $F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$

Rešimo še 2.DE: $G(t) = C\cdot\cos akt + D\sin akt$

$$G_n(t) = C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t$$

$$u_n(x,t) = F_n(x)\cdot G_n(t) = \left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

so rešitve PDE - lastne funkcije strune. Množico $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \dots$ kjer $\lambda_n = \frac{an\pi}{l}$ imenujemo spekter

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ - šele ta f-ja lahko zadosti zač. pogojem

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Uporabimo še zač. pogoja $u\Big|_{t=0} = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

$$\dot{u}\Big|_{t=0} = f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Iz teh enačb dobimo koeficiente C_n in D_n, saj sta to razvoji $f_1(x)$ in $f_2(x)$ v Fourierjevo vrsto:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad , \quad D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l f_2(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

68. Kaj so to stojni valovi, lastne vrednosti in lastne funkcije strune?

$$u_n(x,t) = F_n(x)\cdot G_n(t) = \left(C_n\cos\frac{n\pi}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$n = 1,2,3,\dots$ so rešitve valovne enačbe, ki ustrezajo robnim pogojem. Te funkcije so lastne funkcije strune, vrednosti $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ so lastne vrednosti.

$u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$ - stojni val, ki je produkt dveh faktorjev, prvi je odvisen le od kraja x, drugi le od časa t.

69. d'Alambertova rešitev za nihanje strune

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Vpeljemo novi spremenljivki: $v = x + ct$
$z = x - ct$

$$u_x = u_v\cdot v_x + u_z z_x$$
$$u_x = u_v + u_z$$
$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial v}(u_v + u_z)\cdot v_x + \frac{\partial}{\partial z}(u_v + u_z)z_x$$
$$= u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

$$u_t = u_v\cdot v_t + u_z z_t$$
$$= c\cdot u_v - c\cdot u_z = c(u_v - u_z)$$
$$u_{tt} = c\left[\frac{\partial}{\partial v}(u_v - u_z)v_t + \frac{\partial}{\partial z}(u_v - u_z)z_t\right]$$
$$= c^2\left[u_{vv} - 2u_{zv} + u_{zz}\right]$$

Vstavimo v enačbo:

$$c^2\left[u_{vv} - 2u_{zv} + u_{zz}\right] = c^2\left[u_{vv} + 2u_{zv} + u_{zz}\right]$$
$$-2u_{zv} = 2u_{zv}$$
$$u_{zv} = 0 \quad \text{- transformirana enačba}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

$$u = \int h(v)\,dv + \psi(z) = \varphi(v) + \psi(z)$$

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Rešitev je vsota dveh potujočih valov

$\varphi(x+ct)$ in $\psi(x-ct)$ določimo še z dodatnimi začetnimi pogoji:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

(70) Enačba za prevajanje toplote - kako izgleda in kakšne vrste dodatnih pogojev moramo podati

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = c^2 \Delta T$$

Podati moramo še začetne in robne pogoje:

- začetni: $T(x,y,z,t)\Big|_{T=0} = f(x,y,z)$
- robni: več možnosti:
  1) $T\Big|_{\Gamma} = f(P)$ - temp. na robu
  2) $\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{del\,P} = 0$ - del površine toplotno izoliran
  3) $\left[\frac{\partial T}{\partial n} + k(T - T_0)\right]\Big|_P = 0$; (izsevana toplota sorazmerna razliki temp. telesa T in okolice T_0)

(71) Rešite enačbo za prevajanje toplote skozi tanko palico - separacija spremenljivk

Rešujemo enačbo $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, palica je dolga l, oba konca, $x=0$ in $x=l$ sta na isti temperaturi - 0

$u(0,t) = u(l,t) = 0$ za vse t

Začetni pogoj je $u(x,0) = f(x)$ - začetna temperatura

$$u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$$

$$F(x)\dot{G}(t) = c^2 F''(x) G(t)$$

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -k^2$$

1. enačba:

$F''(x)+k^2F(x)=0$

$F(x)=A\cos kx+B\sin kx$

Robni pogoji $F(0)=A=0$

$F(l)=B\sin kl=0 \Rightarrow k_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\ldots$

$F_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$ $n=1,2,\ldots$

2. enačba

$\dot{G}(t)+c^2k^2G(t)=0$ - ločljive spremenljivke

$G(t)=C\cdot e^{-c^2k^2t}=C\cdot e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}t}$

$\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$, $G_n(t)=C_ne^{-\lambda_n^2t}$

$u_n(x,t)=C_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\lambda_n^2t}$ $n=1,2,\ldots$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\lambda_n^2t}$

Začetni pogoj: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$

$f(x)$ razvijemo v Fourierjevo vrsto na $[0,l]$

$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ $n=1,2,\ldots$

72 Enačba za prenos toplote v neskončnem sredstvu rešite jo s pomočjo Fourierovega integrala!

Rešujemo $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$, žica se razteza v $\pm\infty$, nimamo podanih robnih pogojev ampak le začetnega: $u(x,0)=f(x)$ $-\infty<x<\infty$

Z metodo separacije dobimo 2 navadni DE: (glej vprašanje 71)

$F''(x)+k^2F(x)=0$

$\dot{G}(t)+c^2k^2G(t)=0$

rešitvi: $F(x)=A\cos kx+B\sin kx$, $G(t)=e^{-c^2k^2t}$

$u(x,t,k)=(A\cos kx+B\sin kx)e^{-c^2k^2t}$

$A=A(k)$ in $B=B(k)$

Rešitev iščemo v obliki:

$$u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t,k)\,dx=\int_0^\infty [A(k)\cos kx+B(k)\sin kx]\,e^{-c^2k^2t}\,dk$$

Zač. pogoj: $u(x,0)=f(x)=\int_0^\infty [A(k)\cos kx+B(k)\sin kx]\,dk$

$$A(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos kv\,dv\,,\quad B(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin kv\,dv$$

(Fourierov integral) ?

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\cos kv\cos kx+\sin kv\sin kx)\,e^{-c^2k^2t}\,dv\right]dk$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_0^\infty (\cos kv\cos kx+\sin kv\sin kx)\,e^{-c^2k^2t}\,dk\right]dv$$

Vpeljemo novo spremenljivko $s=ck\sqrt{t}$ (v notranji integral) in ga rešimo (stran 98)

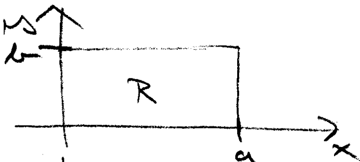
173 Dvodimenzijska valovna enačba - kako jo rešimo s separacijo spremenljivk?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Membrana upeta: $u=0$ na robu za vse t

Začetna pogoja: $u(x,y,0)=f(x,y)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x,y)$

Membrana pravokotna:



$u(x,y,t)=F(x,y)\cdot G(t)$ vstavimo v enačbo:

$$F(x,y)\ddot{G}(t)=c^2(F_{xx}G+F_{yy}G)$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}(F_{xx}+F_{yy})=-\nu^2$$

Dobimo 2 DE: $\ddot{G}(t)+c^2\nu^2G(t)=0$

$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)+\nu^2F(x,y)=0$ - Helmholtz

Za 2. enačbo iščemo rešitev v obliki $F(x,y)=H(x)Q(y)$

Vstavimo v 2. enačbo:

$$\frac{d^2H}{dx^2}Q(y)=-\left(H(x)\frac{d^2Q}{dy^2}+\nu^2H(x)Q(y)\right)$$

Delimo s HQ in dobimo

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2}+\nu^2 Q\right) = -k^2$$

Dobimo 2 navadni DE:

$$\frac{d^2H}{dx^2}+k^2H(x)=0 \Rightarrow H(x)=A\cos kx + B\sin kx$$

$$\frac{d^2Q}{dy^2}+p^2Q(y)=0 \quad , p^2=\nu^2-k^2 \Rightarrow Q(y)=C\cos py + D\sin py$$

Robni pogoji - $F(x,y)$ na robu nič, torej

$H(0)=0$, $H(a)=0$, $Q(0)=0$, $Q(b)=0$

Ko jih upoštevamo dobimo $H_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a}$, $m=1,2,\dots$

$Q_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b}$, $n=1,2,\dots$

$$F_{mn}(x,y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Rešitev $\ddot{G}+\lambda^2 G=0$ $(\lambda = c\cdot\nu)$ je:

$$G_{mn}(t)=A_{mn}\cos(\lambda_{mn}t)+B_{mn}\sin(\lambda_{mn}t)$$

$$u_{mn}(x,y,t)=(A_{mn}\cos(\lambda_{mn}t)+B_{mn}\sin(\lambda_{mn}t))\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$u_{mn}(x,y,t)$ lastne funkcije, λ_{mn} lastne vrednosti

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos(\lambda_{mn}t)+B_{mn}\sin(\lambda_{mn}t))\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

To je dvojna Fourierova vrsta

Upoštevamo še zač. pogoje:

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (=u(x,y,0))$$

$$g(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad \left(=\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t)\Big|_{t=0}\right)$$

Koeficienti A_{mn} in $B_{mn}\lambda_{mn}$ so koeficienti pri razvoju $f(x,y)$ in $g(x,y)$ v dvojno Fourierovo vrsto

74) Reševanje telegrafske enačbe s separacijo spremen. (33)

R-upornost, L-ind., C-kap., G izgube (slabši izolacija) na enoto dolžine

$u(x,t)$ napetost in $i(x,t)$ tok

$$\frac{\partial u}{\partial x}+L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri=0 \quad \Big| \frac{\partial}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+L\frac{\partial i}{\partial t\partial x}+R\frac{\partial i}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial t}+Gu=0 \quad \Big| \frac{\partial}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial i}{\partial t\partial x}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

Iz odvajanih enačb lahko eliminiramo eno spremen. (malo premečeš in izraziš eno z drugo (glej knjigo) in dobimo enačbo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-(LG+RC)\frac{\partial u}{\partial t}-RGu=0$$

Podobno enačbo lahko dobimo za tok

Robna pogoja sta $u\big|_{x=0}=E$ (konst. napetost) $u\big|_{x=l}=0$ (kratki stik)

Zač. pogoja $u\big|_{t=0}=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=0$ Robna pogoja nista homogena!

Najprej poiščemo rešitev, ki je odvisna le od x:

$F(x)=u(x,t)$ t imamo za konstanto

$F(0)=E, F(l)=0$

Enačba se glasi: $F''(x)-RGF(x)=0$

$F''(x)-b^2F(x)=0$, $b^2=RG$

$$F(x)=C_1e^{bx}+C_2e^{-bx}=A\sinh bx+B\cosh bx=C\sinh b(d-x)$$

robni pogoji: $F(0)=E=C\sinh bd \Rightarrow C=\frac{E}{\sinh bd}$

$F(l)=0=C\sinh b(d-l)=0 \Rightarrow d=l$

$$\boxed{F(x)=\frac{E\sinh(b-x)}{\sinh b(b-l)}}$$

Vpeljemo novo spremenljivko:

$w(x,t)=u(x,t)-F(x)$

Robna pogoja: $w\big|_{x=0}=0$, $w\big|_{x=l}=0$ – Dobili smo homogene robne pogoje

Zač. pogoja $w\big|_{t=0}=-F(x)$ $\frac{\partial w}{\partial t}=0$

To vstavimo v enačbo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (LG+RC)\frac{\partial u}{\partial t} - RGu = 0$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F''(x) - LC\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (LG+RC)\frac{\partial w}{\partial t} - RGw(x,t) - RGF(x) = 0$$

ker $F''(x) - RGF(x) = 0$: (34)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial w}{\partial t} - b^2 w = 0$$

$$a^2 = LC,\quad b^2 = RG,\quad 2h = (LG+RC)$$

Rešitev je oblike $w(x,t) = P(x)\cdot G(t)$, vstavimo in dobimo

$$\frac{P''(x)}{P(x)} = a^2\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} + 2h\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} + b^2 = -k^2$$

2DE:

$P'' + k^2 P = 0 \qquad P(0) = P(l) = 0$ - robni pogoji

$a^2\ddot{G} + 2h\dot{G} + (b^2 + k^2) = 0$

rešitve: $P_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$

$G_n(t) = A_n e^{\alpha_n t} + B_n e^{\beta_n t}$, $n = 1, 2, \ldots$ α_n, β_n korena karakt. enačbe

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\alpha_n t} + B_n e^{\beta_n t}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Zač. pogoji: $-F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)\sin\frac{n\pi x}{l}$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n A_n + \beta_n B_n)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$A_n + B_n = -\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$\alpha_n A_n + \beta_n B_n = 0$$

Torej $u(x,t) = E\cdot\frac{\sinh b(l-x)}{\sinh bl} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\alpha_n t} + B_n e^{\beta_n t}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$

15) Enačba za nihanje okrogle membrane

Okrogla membrana s polmerom R, uporabimo pol. koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)$$

Iščemo rešitve neodvisne od kota φ – $u = u(r,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Robni pogoj: $u(R,t) = 0$ – membrana vpeta

Z. p.: $u(r,0) = f(r)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(r)$

Vstavimo $u(r,t) = W(r)\cdot G(t)$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G(t)} = \frac{1}{W(r)}\left(W''(r) + \frac{1}{r}W'(r)\right) = -k^2$$

$$\ddot{G}(t) + \lambda^2 G(t) = 0 \qquad \lambda = ck$$

$$W''(r) + \frac{1}{r}W'(r) + k^2 W(r) = 0$$

Rešimo 2. DE: vpeljemo $s = k\cdot r \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{k}{s}$

$$W'(r) = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds}\cdot k$$

$$W''(r) = \frac{d^2W}{dr^2} = \frac{d^2W}{ds^2}\cdot k^2$$

Vstavimo:

$$\frac{d^2W}{ds^2}k^2 + \frac{k}{s}k\frac{dW}{ds} + k^2 W = 0$$

$$\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dW}{ds} + W = 0 \qquad \text{Besselova DE za } \nu = 0$$

$$W(s) = C_1 J_0(s) + C_2 Y_0(s)$$

$Y_0(s)$ ima singularnost pri $s=0$. Ker hočemo, da je tudi na sredini rešitev definirana, mora biti $C_2 = 0$

$$W(s) = J_0(s) = J_0(kr)$$

Robni p.: $W(R) = J_0(kR) = 0$ – Ta enačba ima neštete rešitev (Besselova fja ima ∞ ekvidistantnih ničel α_m)

$kR = \alpha_m \qquad k_m = \frac{\alpha_m}{R}$

$$W_m(s) = J_0(k_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$

1. DE ima rešitev:

$G_m(t) = a_m \cos\lambda_m t + b_m \sin\lambda_m t$, $\lambda_m = c k_m$

$u_m(r,t) = W_m(r) G_m(t) = (a_m \cos\lambda_m t + b_m \sin\lambda_m t) J_0(k_m r)$

$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r) \cdot G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos\lambda_m t + b_m \sin\lambda_m t) J_0(k_m r)$

Z.P.: $u(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = f(r)$

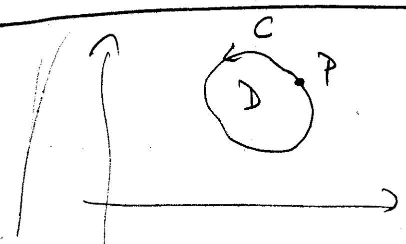
Za določitev konstant $f(r)$ razvijemo v Fourier-Besselovo vrsto

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m b_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = g(r)$$ Podobno naredimo z g

Če bi bila u odvisna od kota $u = u(r,\varphi,t)$, bi dvakrat uvedli separacijo spremenljivk:

$$u(r,\varphi,t) = F(r,\varphi) G(t)$$
$$F(r,\varphi) = Q(\varphi) W(r)$$

76 Laplaceova enačba - kako izgleda? Pri kakšnih dodatnih pogojih jo rešujemo?



$\Delta u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

V ravnini: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Nimamo začetnih pogojev (čas ne nastopa)

Robni pogoji: a) $u|_C = f(P)$ ... Dirichletov problem

b) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = g(P)$ ... Neumannov problem

c) $\left.\left(u + h\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_C = f_2(P)$ ... Mešani/Cauchyjevi robni pogoji

za ravnino

(77) Rešite Laplaceovo enačbo za notranjost kroga

Krog z radijem $r=a$, robni pogoji $u\big|_{r=a}=f(\varphi)$

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

$$u(r,\varphi)=R(r)F(\varphi)$$

$$r^2R''(r)F(\varphi)+rR'(r)F(\varphi)+R(r)F''(\varphi)=0$$

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}=\boxed{k^2}$$! pozitivna konstanta

$$F''(\varphi)+k^2F(\varphi)=0$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0$$

Rešimo 1.: $F(\varphi)=A\sin k\varphi+B\cos k\varphi$

veljati mora še $F(\varphi)=F(\varphi+2\pi)\Rightarrow k=0,1,2,\dots$

2. enačba je Eulerjeva, rešimo z nastavkom $R(r)=r^{\lambda}$

$$R(r)=Cr^{k}+Dr^{-k}$$

Ker hočemo da rešitev definirana pri $r=0$, mora biti $D=0$

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(A_k\sin k\varphi+B_k\cos k\varphi)\,r^k$$

Robni pogoj: $f(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(A_k\sin k\varphi+B_k\cos k\varphi)a^k$

$f(\varphi)$ razvijemo v F.v.: $f(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi)$

Koeficienti $a^kB_k=\alpha_k$, $a^kA_k=\beta_k$ so koeficienti pri razvoju v F.v

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi)\left(\frac{r}{a}\right)^k$$

78. Reševanje valovne enačbe s pomočjo $\mathcal{L}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad y = y(x,t) \qquad 0 < x < \infty$$

$y(0,t) = f(t)$ - robni pogoj

$y(x,0) = 0 \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ - začetna pogoja

Na enačbi naredimo Laplaceovo transformacijo:

$$s^2 \mathcal{L}[y(x,t)] - s\,y(x,0) - \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = a^2 \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] = a^2 \frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}[y(x,t)]$$

Upoštevamo začetne pogoje in $\mathcal{L}[y(x,t)] = Y(x,s)$

$$\frac{d^2 Y(x,s)}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2} Y(x,s) = 0 \quad \text{navadna DE za } Y(x,s)$$

$$Y(x,s) = A(s)e^{-\frac{s}{a}x} + B(s)e^{\frac{s}{a}x}$$

Ker je fja proti ∞ omejena, mora biti $B(s) = 0$.

Upoštevamo še robni pogoj:

$$Y(0,s) = A(s) = F(s)$$

torej $Y(x,s) = F(s)e^{-\frac{s}{a}x}$

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)u_{\frac{x}{a}}(t)$$ - valovi so, ki se gibljejo s hitrostjo a po žici

79. Reševanje enačbe za prenos toplote s pomočjo $\mathcal{L}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

$u(0,t) = E(t)$, $\lim_{x\to\infty} u(x,t) < \infty$ robna pogoja

$u(x,0) = 0$ - začetni pogoj

(začetni pogoj)

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}[u(x,t)] = a^2 s\mathcal{L}[u(x,t)] - \cancel{a^2 u(x,0)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) - a^2 s\,U(x,s) = 0$$

(glej prejšnji nalogo)

$$U(x,s) = A(s)e^{-a\sqrt{s}x} + B(s)e^{a\sqrt{s}x}$$

$$U(x,0) = A(s) = \mathcal{L}[E(t)]$$

$$\mathcal{L}[u(x,t)] = \mathcal{L}[E(t)]e^{-a\sqrt{s}x}$$

Izvesti moramo še inverzno transformacijo.

(80) Rešite Laplaceovo enačbo v krogelnem koord. sistemu. Poiščite le $u = u(r, \varphi)$! (39)

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right] = 0$$

$u(R, \varphi) = f(\varphi)$ robni pogoj

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = 0$$

$$u(r, \varphi) = G(r) H(\varphi)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dG}{dr} H(\varphi)\right) + \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\, G(r) \frac{dH}{d\varphi}\right) = 0$$

$$\frac{1}{G(r)} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dG}{dr}\right) = -\frac{1}{\sin\varphi H(\varphi)} \frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi \frac{dH}{d\varphi}\right) = k = n \cdot (n+1)$$

Dobimo 2 enačbi: 1) $\frac{1}{G(r)} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dG}{dr}\right) = n \cdot (n+1)$

2) $\frac{1}{\sin\varphi} \frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi \frac{dH}{d\varphi}\right) + n(n+1) H(\varphi) = 0$

1) $r^2 G''(r) + 2r G(r) - n(n+1) G(r) = 0$ – Eulerjeva DE

$$\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - n(n+1) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - n(n+1) = 0$$

$$\lambda_1 = n, \quad \lambda_2 = -(n+1)$$

$$G_n(r) = r^n \qquad G_n^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}$$

2) Uvedemo novo spremenljivko $w = \cos\varphi$

$$\frac{d}{d\varphi} = \frac{d}{dw} \cdot \frac{dw}{d\varphi} = -\sin\varphi \frac{d}{dw} \Rightarrow \frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi} = -\frac{d}{dw}$$

$$\sin\varphi \frac{d}{d\varphi} = -\sin^2\varphi \frac{d}{dw} \qquad \sin^2\varphi = 1 - w^2$$

Vstavimo: $\frac{d}{dw}\left(\sin^2\varphi \frac{dH}{dw}\right) + n(n+1) H = 0$

$$\frac{d}{dw}\left((1-w^2)\frac{dH}{dw}\right) + n(n+1) H = 0$$

$(1-w^2) H'' - 2w H' + n(n+1) H = 0$ Legendreova DE

$$H(w) = A_n P_n(w) \rightarrow H_n(\varphi) = A_n P_n(\cos\varphi)$$

$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\varphi)$ – notranjost sfere

$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\varphi)$ – zunanjost sfere

Koeficiente določimo iz razvoja $f(\varphi)$ v posplošeno Fourierovo vrsto

81 Reševanje Laplaceove enačbe v pravokotnih koord.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad, 0 \le x \le a, 0 \le y \le b$$

$u(x,0) = f(x)$, $u(x,b) = g(x)$ Robni pogoji
$u(0,y) = F(y)$, $u(a,y) = G(y)$

$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$

$v(x,y)$ in $w(x,y)$ naj bosta rešitvi Dirichletovih problemov:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$v(x,0) = f(x)$, $v(x,b) = g(x)$, $v(0,y) = 0$, $v(a,y) = 0$ robni pogoji

in

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$w(x,0) = 0$, $w(x,b) = 0$, $w(0,y) = F(y)$, $w(a,y) = G(y)$

Sedaj rešujemo obe nalogi $\Delta v = 0$ in $\Delta w = 0$ po znani poti ($v = X(x) \cdot Y(y)$)

82 Reševanje nehomogene valovne enačbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$u(0,t) = u(a,t) = 0$ robni pogoji
$u(x,0) = g(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$ začetni pogoji

Najprej rešimo homogeno enačbo:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}$$

$$u_n^*(x,t) = X_n(x) T_n(t)$$

Dobimo $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{a}$$ – rešitev že ustreza robnim pogojem

Funkcije $T_n(t)$ izberemo tako, da rešitev ustreza PDE in začetnima pogojema

$f(x,t)$, $g(x)$ in $h(x)$ razvijemo v vrste po funkcijah $X_n(x)$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\sin\frac{n\pi x}{a}$$
$$g(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{a}$$
$$h(x)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

Kjer so $F_n(t)$, $T_n(0)$ in $T_n'(0)$ ustrezni Fourierovi koef.:

$$F_n(t)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$
$$T_n(0)=\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$
$$T_n'(0)=\frac{2}{a}\int_0^a h(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

Vstavimo vrste v osnovno enačbo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)X_n(x)=\boxed{-\sum_{n=1}^{\infty} c^2 T_n(t)\frac{n^2\pi^2}{a^2}X_n(x)}+\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)X_n(x)$$

$$\left(X_n'(x)=\frac{n\pi}{a}\cos\frac{n\pi x}{a},\; X_n''(x)=-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\overbrace{\sin\frac{n\pi x}{a}}^{X_n(x)}\right)$$

Istoležni koef. morajo biti isti

$$T_n''(t)+\left(\frac{cn\pi}{a}\right)^2 T_n(t)=F_n(t)$$

Torej so $T_n(t)$ rešitve te navadne nehomogene lin DE 2. reda konst. koeficienti.

(83) Reševanje PDE z nehomogenimi robnimi pogoji

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

$u(x,0)=g(x)$, $u_t(x,0)=h(x)$ z.p.

$u(0,t)=\varphi(t)$, $u(a,t)=\psi(t)$ r.p.

Vpeljemo $w(x,t)=\varphi(t)\frac{a-x}{a}+\psi(t)\frac{x}{a}$ – zadošča robnim, ne pa začetnim pogojem

Vpeljemo še $v(x,t)$: $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$

$v(x,t)$ je rešitev enačbe:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(To enačbo smo dobili iz začetne – glej nasl. stran)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$ - začetna enačba, v njo vstavimo

42

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{u(t)}{a} + \frac{\psi(t)}{a} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

In dobimo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$v(x,t)$ ustreza hom. robnima pogojema

$v(0,t)=0$, $v(a,t)=0$

Zač. pogoji: $v(x,0)=g(x)-w(x,0)$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=h(x)-\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)$$

Neznanka $v(x,t)$ je sedaj rešitev nehomogene PDE s homogenimi robnimi pogoji.

84 Kakšne vrste dogodki se lahko zgodijo pri slučajnem poskusu

Dan je poskus X in dogodek A, ki se pri poskusu lahko zgodi. Poskus večkrat ponovimo:

a) Dogodek A se zgodi pri vsakem poskusu – A je gotov dogodek, označimo z G, enak je celotnemu vzorčnemu prostoru.

b) Dogodek A se ne zgodi v nobeni ponovitvi poskusa. A je nemogoč dogodek, označimo z N in ponazorimo s prazno množico.

c) A se v nekaterih ponovitvah zgodi, v drugih pa ne. A je slučajen dogodek in je podmnožica vzorčnega prostora.

85 Kaj je elementaren dogodek?

Če se dogodka A in B ne moreta zgoditi hkrati, sta nezdružljiva. Če lahko C izrazimo z vsoto nezdružlj. dogodkov, pravimo, da je sestavljen. Če tega ne moremo, je C elementaren.

86 Navedite statistično in klasično definicijo verjetnosti

Vsakemu dogodku A lahko pripišemo verjetnost dogodka P(A)

Pri velikem številu poskusov je $P(A) \approx f(A) = \frac{k}{n}$, kjer k število ugodnih poskusov in n število vseh poskusov – stat. definicija

Če ima poskus s enako verjetnih izidov za dogodek A pa jih je ugodno r, je $P(A) = \frac{r}{s}$ – klas. def.

87 Računanje z dogodki – kakšne relacije in operacije poznate? Kako so definirane?

Dani naj bodo dogodki A, B, C, ... in njihove verjetnosti $P(A), P(B), P(C), \ldots$

1) A in B naj bosta taka, da se vedno z A zgodi tudi dogodek B. Potem je A način B : $A \subset B$

2) Če se A in B vedno zgodita hkrati, sta med seboj enaka : $A = B$

3) Dogodek, ko se od A in B zgodi vsaj eden je vsota dogodkov A in B : $A + B$, $A \cup B$ $(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$

4) Dogodek, ko se zgodita oba hkrati imenujemo produkt dogodkov : $A \cdot B$, $A \cap B$ $(A_1 A_2 \ldots A_n)$

88) Kakšni zakoni veljajo za računanje z dogodki? Kdaj sta dva dogodka nezdružljiva

$A+B=B+A$

$AB=BA$

$(A+B)+C=A+(B+C)$

$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

$(A+B)C=AB+BC$

$A+A=A$

$A\cdot A=A$

Če se A in B ne moreta zgoditi hkrati sta nezdružljiva

$A\cdot B=N$

89) Definirajte popoln sistem elementarnih dogodkov!

$S=\{A_1, A_2, \dots A_n\}$ je popoln sistem dogodkov, če se pri vsaki ponovitvi poskusa zgodi natanko eden izmed njih ($A_iA_j=N$, $i\neq j$, $A_1+A_2+\dots+A_n=G$).

Najpreprostejši sistem sta nasprotna dogodka $S=\{A, \bar{A}\}$

90) Verjetnost vsote dveh ali treh dogodkov

A_1 in A_2 naj bosta nezdružljiva dogodka z verjetnostima

$P(A_1)=\frac{k_1}{n}$ in $P(A_2)=\frac{k_2}{n}$

$P(A_1+A_2)=\frac{k_1+k_2}{n}=\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{n}=P(A_1)+P(A_2)$

$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$ 3 je nezdružljivi dogodki

Če sta A_1 in A_2 združljiva, $P(A_1A_2)=\frac{k_{12}}{n}$

$P(A_1+A_2)=\frac{k_1+k_2-k_{12}}{n}=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$

$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2+A_3)-P(A_1\cdot(A_2+A_3))$

$P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2A_3)$

$P(A_1A_2+A_1A_3)=P(A_1A_2)+P(A_1A_3)-P(A_1A_2A_3)$

$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_2A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)$

91. Kako je definirana pogojna verjetnost? Kako izračunamo verjetnost produkta dveh dogodkov?

Pogojna verjetnost $P(A|B)$ v poskusu X je verjetnost dogodka A v poskusu X z dodanim pogojem B

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

(Kakšna je verjetnost, da se zgodi A, če vemo, da se je zgodil B)

92. Kdaj sta A in B med seboj neodvisna? Kaj velja za $\overline{A}$ in $\overline{B}$?

Če je $P(A|B) = P(A)$ je A neodvisen od B.

Če je A neodvisen od B:

$$\boxed{P(AB) =} P(A|B)P(B) \boxed{= P(A)P(B)}$$

$$P(B|A) \quad \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$ Torej tudi B neodvisen od A

Če sta A in B neodvisna, sta neodvisna tudi $\overline{A}$ in $\overline{B}$, $\overline{A}$ in B, A in $\overline{B}$

Dok: $A = A \cdot G = A(B+\overline{B}) = AB + A\overline{B}$

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

93. Navedite osnovni zakon kombiniranja!

Če sestavlja proces odločanja k-odločitev, pri prvi n_1 možnosti, pri drugi n_2 možnosti ... pri k-ti n_k možnosti in je število možnosti pri posamezni izbiri neodvisno od prejšnjih izbir, je skupno število možnih izborov: $n = n_1 n_2 \ldots n_k$

94 Variacije

Iz n elementov jih vzamemo r, $n<r$, vrstni red je važen

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Če posamezni elementi nastopijo večkrat:

$$V_n^{r(r)} = n \cdot n \ldots n = n^r$$

$\underbrace{\sqcup\sqcup \ldots \sqcup}_{r}$ (Vsem vlečemo kroglice in vračamo)

95 Permutacije

n elementov razporedimo v vrsto, vrstni red je važen

$$P_n = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

Če imamo več elementov, ki se ponavljajo

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$ (k_1 enakih, k_2 enakih ...)

96 Kombinacije

Iz n elementov izberemo r, vrstni red ni važen

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Izmed n elementov izberemo r, kjer se elementi ponovijo

$$^{(r)}C_n^r = \binom{n+r-1}{r}$$

97 Formula popolne verjetnosti

Dogodek A naj se realizira pri enem od dogodkov: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – hipoteze, ki sestavljajo popoln sistem dogodkov – $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = G$

$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$. Ker so H_i nezdružljivi, so nezdružljivi tudi AH_i

Velja:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

(98) Bayesova formula

Dan naj bo sistem hipotez $H_1, H_2, \dots, H_n$ in njihove verjetnosti $P(H_1), P(H_2), \dots P(H_n)$. Vemo, da se je A realiziral, zanima nas pri kateri hipotezi se je realiziral – iščemo $P(H_i|A)$

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P(H_i|A) = P(H_i) P(A|H_i)$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)}$$

(99) Definirajte pojem slučajne spremenljivke! Kakšne vrste sluč spremenljivk poznamo?

Slučajna spremenljivka X na vzorčnem prostoru S je funkcija $X: S \to \mathbb{R}$ ki vsakemu izidu priredi neko realno število. Določena je s svojo zalogo vrednosti in porazdelitvenim zakonom.

Poznamo: – diskretne sluč. sprem (zaloga vrednosti končno ali neskončno zaporedje)
– zvezne sluč. sprem

(100) Na kakšne načine lahko podamo porazdelitven zakon sluč. sprem. ?

– s porazdelitveno funkcijo $P(X < x) = F(x)$

– za diskretne sprem: Za vsako izmed možnih vrednosti x_k, ki jih sprem. lahko zavzame podamo verjetnost dogodka $X = x_k$, označimo $P(X = x_k) = p_k$. To je verjetnostna funkcija sluč. sprem. X

$$\sum_k p_k = 1$$

$$X : \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & x_n \\ p_1, & p_2, & \dots & p_n \end{pmatrix}$$ verjetnostna shema

101) Kako je definirana porazdelitvena fja in kakšne lastnosti ima?

Porazdelitvena fja $F(x)$ je fja, ki je definirana za vsak $x \in \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(x) = P(X < x), \quad -\infty < x < \infty$$

Lastnosti:

a) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

b) $F(x)$ je monotono naraščajoča

če $x_1 > x_2 \Rightarrow F(x_1) \geq F(x_2)$

c) Za poljubni realni števili x_1 in x_2, $x_2 > x_1$, velja

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$F(x)$ diskretne spremen. je stopničasta fja, $F(x)$ zvezne spremen. je zvezna

102) Verjetnostna fja diskretne sluč. spremen in njena zveza s porazdelitveno fjo?

Glej vprašanje 100, 2. alineja. Zveza s porazdelitveno fjo:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$$

103) Bernoullijeva sluč. spremenljivka

Lahko se zgodi le eden od dveh dogodkov: dogodek A z verjetnostjo p, ali negacija $\bar{A}$ z verjet. $q = 1 - p$

$$X : \begin{pmatrix} \bar{A} & A \\ q & p \end{pmatrix}$$

(104) Binomska sluč. sprem.

Imamo zaporedje n Bernoullijevih poskusov. Priredimo mu sluč. sprem X, ki zavzame vrednost k, ko je v n poskusih k ugodnih. Torej lahko zavzame vrednosti $0, 1, 2, \ldots, n$

Verjetnost da je k ugodnih in $n-k$ neugodnih: $p^k q^{n-k}$

Načinov, da je k ugodnih in $n-k$ neugodnih je $\binom{n}{k}$ (med n izbiramo k ugodnih)

$$P(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ \binom{n}{0} q^n & \binom{n}{1} p q^{n-1} & \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} & \cdots & \binom{n}{n} p^n \end{pmatrix}$$

(105) Kako ugotovimo najverjetnejši izid binomske sluč. sprem.?

$P(n,p,k)$, iščemo $k = M$, za katerega ima $P(n,p,k)$ maks. vrednost.

Velja $P(n,p,M-1) \leq P(n,p,M) \geq P(n,p,M+1)$

$$\binom{n}{M-1} p^{M-1} q^{n-M+1} \leq \binom{n}{M} p^M q^{n-M} \geq \binom{n}{M+1} p^{M+1} q^{n-M-1}$$

Razpišemo obe neenačbi:

$$\frac{n!}{(M-1)!(n-M+1)!} p^{M-1} q^{n-M+1} \leq \frac{n!}{M!(n-M)!} p^M q^{n-M}$$

$$\frac{q}{n-M+1} \leq \frac{p}{M}$$

$$qM \leq p(n-M+1)$$

$$M(\underbrace{q+p}_{1}) \leq p(n+1) \Rightarrow M \leq p(n+1)$$

Iz desne na podoben način dobimo $M \geq np - q$

Izberemo M, ki ustreza obema neenačbama.

106 Poissonova porazdelitev

Diskretna porazdelitev, slučajna sprem. lahko zavzame nenegativno celoštevilsko vrednost k z verjetnostjo:

$$p_k = \frac{a^k e^{-a}}{k!} \qquad a > 0$$

Porazdelitvena funkcija:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-a} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} & m < x \leq m+1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

107 Zvezne sluč. spremenljivke in njihove lastnosti

Sluč. sprem. je zvezno porazdeljena, če se njena porazdelitvena fja izraža v obliki $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$

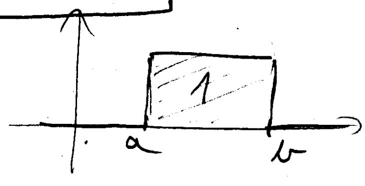
$p(t)$ je gostota verjetnosti, $p(x) \geq 0$ (ker $F(x)$ naraščajoča)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(t)\,dt$$

108 Enakomerna zvezna porazdelitev

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b, \quad a < b \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = 1$$

$$F(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^x dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta p(t)\,dt = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

– verjetnost da je slučajno izbrana točka iz $[a, b]$ na intervalu $[\alpha, \beta]$

109 Gaussova porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} \qquad a \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0$$

Odvisna od dveh realnih parametrov a in σ.
Pri $x = a$ ima maksimum višine $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Je simetrična glede na a. Od a je odvisna lega, od σ pa oblika porazdelitve. Čim manjši je σ, tem bolj je porazdelitev stisnjena in višji je maksimum

110 Standardizirana norm. porazdelitev. Kako jo uporabimo pri obravnavi splošne norm. porazdelitve?

Gauss za $a = 0$ in $\sigma = 1$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Računanje verjetnosti $p(c \leq x \leq d)$ za poljubno normalno porazdelitev prevedemo s transformacijo $z = \frac{x-a}{\sigma}$ na računanje verjetnosti $P(\alpha \leq Z \leq \beta)$ za stand. norm. porazdelitev.

$\alpha = \frac{c-a}{\sigma} \quad \beta = \frac{d-a}{\sigma}$ (glej knjigo str. 159, 160)

111 Matematično upanje - kako je definirano za različne vrste sluč. spremen.?

Dana je verjetnostna funkcija diskretne sluč. sprem.

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$m_x = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ je mat. upanje

Pri zvezni spremenljivki vsota preide v integral:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx$$

(112) Izračunajte E(X) za Poissonovo porazdelitev

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{a^k}{k!} e^{-a} = a e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= a e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = a e^{-a} e^{a} = a$$

(113) Izračunajte E(X) za normalno porazdelitev

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a+\sigma t) e^{-\frac{1}{2}t^2} dt =$$

$t = \frac{x-a}{\sigma} \Rightarrow x = a + \sigma t$

$dt = \frac{dx}{\sigma}$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{\sqrt{2\pi}\ ?} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{0} =$$

$$\underline{E(X) = a}$$

(114) Izračunajte E(X) za binomsko porazdelitev!

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \qquad E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = n \cdot p$

(115) Disperzija in stand. deviacija sluč. sprem.

$D(X) = E[(X - E(X))^2]$ – merilo razpršenosti okoli povprečne vrednosti. Tem večja – čim bolj je sluč. spremenljivka X razpršena

Pri $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_n \\ p_1 & p_2 \ldots p_n \end{pmatrix}$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x_i))^2 p_i$$

Če ima X neskončno zalogo vrednosti:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(x_i))^2 p_i$$

Pri zvezno porazdeljeni sprem.:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 p(x) dx$$

$D(X)$ izpeljemo še drugače

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2 p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_iE(X)+E(X)^2)p_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2E(X)\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+E^2(X)\sum_{i=1}^{n}p_i$$

$$=E(X^2)-2E(X)^2+E^2(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

Velja tudi za diskretne sprem.

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ – standardna deviacija

116 Izračunajte disperzijo za Poissonovo porazdelitev!

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{a^ke^{-a}}{k!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)a^ke^{-a}}{k!}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot a^ke^{-a}}{k!}}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)a^ke^{-a}}{k!}=a^2e^{-a}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a^{k-2}}{(k-2)!}=a^2e^{-a}e^{a}=a^2$$

$$E(X^2)=a^2+a$$

$$E(X)=a$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=a$$

117 Izračunajte disperzijo za enakomerno porazdeljeno zvezno spremenljivko

$$E(X^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

118 Lastnosti mat. upanja

1) Mat. upanje konstante C je enako C, $E(C)=C$

Dok: $X=C$ $P(X=C)=1$ $E(X)=C\cdot 1=C$

2) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)$$

3) $E(CX)=C\cdot E(X)$

Dok: $E(CX)=\int_{-\infty}^{\infty} Cx\,p(x)\,dx=C\int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx=C\cdot E(X)$

4) $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

Dok: uporabimo lastnosti 2 in 3

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$$

5) X in Y med seboj neodvisni:

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$E(X_1 X_2 \ldots X_n)=E(X_1)\cdot E(X_2)\ldots E(X_n)$$

119 Kdaj sta dve sluč. sprem. nekorelirani? Kako je pojem koreliranosti povezan z neodvisnostjo?

Če za dve spremenljivki velja $E(XY)=E(X)E(Y)$, sta nekorelirani.

Za neodvisnost X in Y je potrebno, ne pa zadostno, da sta nekorelirani.

120 Lastnosti disperzije sluč. sprem.

1) Disperzija konstante je enaka 0 $D(C)=0$

Dok: $D(C)=E(C^2)-E(C)^2=C^2-C^2=0$

2) $D(CX)=C^2D(X)$

Dok: $D(CX)=E[(CX-E(CX))^2]=E[(CX-CE(X))^2]=$
$=E[C^2(X-E(X))^2]=C^2E[(X-E(X))^2]=$
$=C^2D(X)$

3) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

Dok: $D(X+Y)=E[(X+Y-E(X+Y))^2]=$

$$=E[(X+Y-E(X)-E(Y))^2]=$$

$$=E[((X-E(X))+(Y-E(Y))^2]=$$

$$=E[(X-E(X))^2+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]+(Y-E(Y))^2]$$

$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ – kovarianca med X in Y

(121) Izračunajte disperzijo binomske sluč. sprem!

$X=X_1+X_2+\dots X_n$ vrednost binomske sluč. sprem je enaka številu ugodnih izidov poskusa. Ker so Bernoullijevi poskusi med seboj neodvisni in nekorelirani velja:

$$D(X)=D(X_i)+D(X_2)+\dots+D(X_n)$$

$$D(X_i)=\sum_{i=1}^{2}(x_i-p)^2 p_i=(1-p)^2 p+(0-p)^2 q=q^2 p+p^2 q=$$
$$=pq\underbrace{(p+q)}_{1}$$

$$D(X)=nD(X_i)=npq$$

(122) Momenti sluč. sprem

$a\in\mathbb{R}$, k katerokoli nenegativno celo število

$m_k(a)=E[(X-a)^k]$ je moment reda k slučajne spremenljivke X glede na a

Momenti glede na vrednost 0 so začetni momenti.

$$z_k=m_k(0)=E[X^k]$$

Momenti glede na povpr. vrednost so centralni momenti

$$m_k=m_k[E(X)]=E[(X-E(X))^k]$$

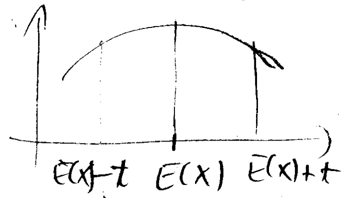
Vidimo da z_1 in m_2 mat. upanje in disperzija

123 Povezava med začetnimi in centralnimi momenti

$$m_n = E[(X-E(X))^n] = E[(X-z_1)^n] = E\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(-z_1)^{n-k}\right]$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

124 Kdaj je slučajna sprem. porazdeljena simetrično



$$P(E(X)-x<X<E(X)) = P(E(X)<X<E(X)+x)$$

Vsi lihi centralni momenti so enaki 0

Dok: k naj bo liho št, X naj bo simetrično porazdeljen

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^k p(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{liha}}{t^k}\, \underset{\text{soda}}{p(t+E(X))}\,dt}_{\text{liha}}$$

$t = x - E(X)$

125 Definirajte asimetrijo sluč. sprem.

Bolj ko je porazdelitev asimetrična bolj so lihi centralni momenti različni od nič. Gledamo m_3

$A(X) = \frac{m_3}{\sigma^3}$ – asimetrija

$$m_3 = E[(X-z_1)^3] = E[X^3 - 3X^2z_1 + 3Xz_1^2 - z_1^3]$$
$$= z_3 - 3z_2z_1 + 3z_1^3 - z_1^3 =$$
$$= z_3 - 3z_2z_1 + 2z_1^3$$

126 Izračunajte asimetrijo porazdelitve $p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$$z_k = \int_0^{\infty}x^k e^{-x}\,dx \underset{p.p.}{=} \underbrace{-x^k e^{-x}\Big|_0^{\infty}}_{0} + k\int_0^{\infty}x^{k-1}e^{-x}\,dx = k\cdot z_{k-1}$$

p.p. $x^k = u$, $e^{-x}dx = dv$

$z_0 = 1$

$z_1 = 1\cdot z_0 = 1$

$z_2 = 2\cdot z_1 = 2$

$z_3 = 3\cdot 2\cdot 1$

$z_k = k!$

$m_2 = \sigma^2 = z_2 - z_1^2 = 1$

$m_3 = z_3 - 3z_2z_1 + 2z_1^3 = 2$

$$A(X) = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$