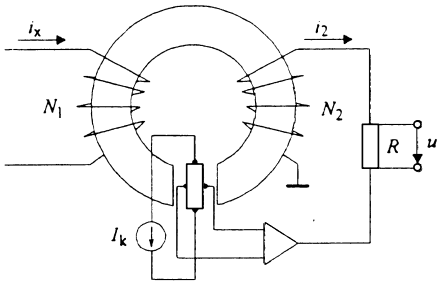
Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Kolikšna je efektivna vrednost toka I_x, če je $N_1 = 10$, $N_2 = 1000$, $U = 10\,\mathrm{mV}$, $R = 1\Omega$ $I_k = 10\,\mathrm{mA}$? Razložite princip merjenja! Ali lahko merimo tudi enosmerni tok? Utemeljite! Ali je krmilni tok I_k enosmeren ali izmeničen?



Rešitev:

- Princip merjenja:
  - Vezje kaže primer posrednega merjenja toka z uporabo magnetnega kroga. Okoli toroidnega feromagnetnega jedra je navito N_1 ovojev, skozi katere teče neznanin tok i_x. V reži se nahaja Hallova sonda, katere napetost u_H je odvisna tudi od magnetne indukcije B v zračni reži. Če jedro ne pride v nasičenje, je povezava skoraj linearna:

$$u_H = \frac{1}{ned} I_k B \approx \text{konst.} \cdot i_x$$

  - Tok i_x je lahko enosmeren, izmeničen ali pulzirajoč, saj je občutljivost Hallove sonde od nič do $10\,\mathrm{MHz}$ praktično neodvisna od frekvence!
  - Če namestimo na jedro še eno navitje N_2 in ga napajamo s tokom operacijskega ojačevalnika, ki ga krmili napetost u_H tako, da dosežemo, da je magnetna indukcija v reži nič ne glede na velikost toka i_x, lahko izenačimo vzbujanji dveh enakih magnetnih pretokov:

$$\phi_1 - \phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0, \quad u_H = 0 \quad \Rightarrow \quad i_x N_1 = i_2 N_2 = \frac{u}{R} N_2$$

- Za iskani tok zapišemo: $i_x = \dfrac{u}{R}\dfrac{N_2}{N_1} \quad \Rightarrow \quad I_x = \dfrac{U}{R}\dfrac{N_2}{N_1}$
  - in ovrednotimo: $I_x = \dfrac{10\,\mathrm{mV}}{1\Omega}\dfrac{1000}{10} = 1\,\mathrm{A}$

- Krmilni tok I_k mora biti enosmeren in konstanten, da dobimo linearno odvisnost Hallove napetosti od merjenega toka:

$$u_H = \frac{I_k}{ned} a\, i_x \cong \text{konst.} \cdot i_x$$

2. Kakšno ločljivost mora imeti voltmeter ($R_V \to \infty\Omega$), ki ga uporabimo kot ničelni indikator pri Kelvinovem (Thomsonovem) mostiču, da je pri merjenju upornosti $R_x \approx 3\,\mathrm{m}\Omega$ standardna negotovost zaradi ločljivosti mostiča zanemarljiva? Uporovna dekada R_B mora imeti izkoriščene vse stopnje!

- mostič: $R_B = R_B^{'} = 10 \times (1000, 100, 10, 1)\,\Omega$
  $R_A = R_A^{'} = (10, 100, 1000)\,\Omega$; $m_{R_A} = m_{R_B} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$
- etalon: $R_N = 10^{-4}\left(1 \pm 10^{-3}\right)\,\Omega$, $m_{R_N} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$
- napajanje: $I_0 = 8\,\mathrm{A}$ $\qquad \delta_q = \dfrac{(\Delta I_5)}{I_0 R_{10}}\left[2R_3 + R_g\left(1 + \dfrac{R_3}{R_4}\right)\right]$

Rešitev:

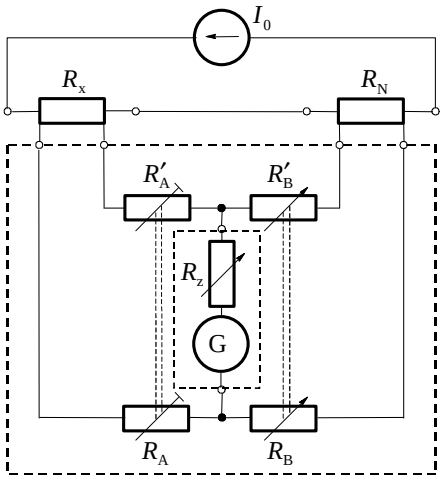
- Če hočemo izkoristiti vse stopnje uporovne dekade, mora biti vrednost R_B v mejah $11110\,\Omega \geq R_B \geq 1000\,\Omega$. To dosežemo samo pri drugi priključitvi in z upornostjo $R_A = 100\,\Omega$.

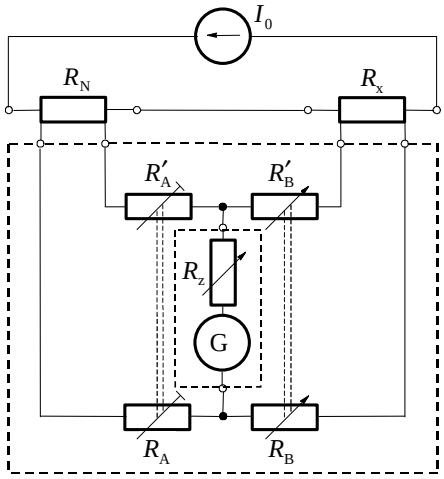
a) prva priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{3\,\mathrm{m}\Omega}{0{,}1\,\mathrm{m}\Omega} = 30 = \frac{R_A}{R_B} \quad \to \quad \frac{R_A}{R_B} = \frac{30000\,\Omega}{1000\,\Omega} \ ?$$

b) druga priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = 30 = \frac{R_B}{R_A} \quad \to \quad \frac{R_B}{R_A} = \frac{3000\,\Omega}{100\,\Omega}$$





- Standardna negotovost **zaradi ločljivosti mostiča** w_q je zanemarljiva proti **skupni standardni negotovosti** $w_c(R_x)$, kadar velja: $w_q = \dfrac{\delta_q}{2\sqrt{3}} \leq \dfrac{1}{5} w_c(R_x)$
  - pri čemer skupno standardno negotovost $w_c(R_x)$ v tem primeru določajo le **negotovosti upornosti**:

$$R_x = R_N \frac{R_B}{R_A} \quad \Rightarrow \quad w_c(R_x) = \sqrt{w^2(R_N) + w^2(R_A) + w^2(R_B)}$$

  - Ker imamo podane mejne vrednosti pogreškov, predpostavimo pravokotno porazdelitve pogreška, za katero je standardna negotovost znana $w(*) = m(*)/\sqrt{3}$, in izračunamo:

$$w_c(R_x) = \sqrt{\frac{m^2(R_N)}{3} + \frac{m^2(R_A)}{3} + \frac{m^2(R_B)}{3}} = 10^{-3}$$

  - Ločljivost mostiča mora biti torej:

$$\delta_q \leq \frac{2\sqrt{3}}{5} w_c(R_x) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot 10^{-3} = 6{,}93 \cdot 10^{-4}$$

- V enačbi za ločljivost mostiča se upora z indeksoma 3 in 4 zamenjata z ustreznima soležnima uporoma po drugi vezavi $R_3 \rightarrow R_\mathrm{B}$ in $R_4 \rightarrow R_\mathrm{A}$. Enačba se tudi poenostavi, ker je upornost voltmetra zelo velika ($R_\mathrm{V} >> R_\mathrm{B}$) in imamo napetostno občutljiv ničelni indikator $(\Delta I_5)_\mathrm{q} \cdot R_\mathrm{V} = (\Delta U_5)_\mathrm{q}$:

$$\delta_\mathrm{q} = \frac{(\Delta I_5)_\mathrm{q}}{I_0 R_x}\left[2R_\mathrm{B} + R_\mathrm{V}\left(1+\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A}}\right)\right] = \frac{(\Delta U_5)_\mathrm{q}}{I_0 R_\mathrm{x}}(1+\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A}}) \leq 6{,}93 \cdot 10^{-4}$$

  - Od tod izračunamo potrebno ločljivost voltmetra, da je negotovost zaradi ločljivosti ničelnega indikatorja v mostiču zanemarljiva:

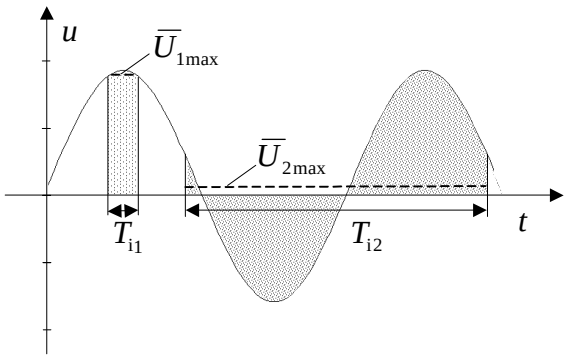
$$(\Delta U_5)_\mathrm{q} \leq \frac{6{,}93 \cdot 10^{-4} \cdot 8\mathrm{A} \cdot 3\,\mathrm{m}\Omega}{1+30} = 0{,}54\,\mu\mathrm{V}$$

3. Z integrirajočim ADP smo merili sinusni signal $f = 50\,\mathrm{Hz}$ z dvema časoma integracije $T_{\mathrm{i1}} = 2\,\mathrm{ms}$ in $T_{\mathrm{i2}} = 20\,\mathrm{ms}$. Po večkratnih ponovitvah meritev smo dobili pri T_{i1} največjo vrednost napetosti $U_{1\max} = 0{,}18\,\mathrm{V}$ in pri T_{i2} $U_{2\max} = 0{,}02\,\mathrm{V}$. Koliko znaša amplituda vhodnega sinusnega signala?

$$\overline{U} = \hat{u}\,\frac{\sin \omega T_{\mathrm{i}}/2}{\omega T_{\mathrm{i}}/2}$$

Rešitev:

- Skica integracijskega zajemanja vrednosti napetosti:



- Integracijsko zajemanje nam da povprečno vrednost signala v intervalu integracije. Največja tekoča povprečna vrednost je odvisna od amplitude signala in produkta časa integracije T_{i} ter frekvence tega sinusnega signala $f = \omega/2\pi$.

$$\overline{U} = \hat{u}\,\frac{\sin \omega T_{\mathrm{i}}/2}{\omega T_{\mathrm{i}}/2}$$

- V primeru integracijskega časa $T_{\mathrm{i1}} = 2\,\mathrm{ms}$ sta v rezultatu lahko zajeta dva prispevka: izmenični sinusni del in enosmerni prispevek

$$\overline{U}_1 = \hat{u}\,\frac{\sin(\pi T_{\mathrm{i1}}/T)}{\pi T_{\mathrm{i1}}/T} + U_0\ ,$$

  - katerega prisotnost se pri drugem integracijskem času $T_{\mathrm{i2}} = 20\,\mathrm{ms}$, kjer popolnoma izločimo izmenični sinusni del ($f\,T_{\mathrm{i}} = 1 \rightarrow \sin(\pi\,f\,T_{\mathrm{i}})/(\pi\,f\,T_{\mathrm{i}}) = 0$), potrdi:

$$\overline{U}_2 = \hat{u}\,\frac{\sin(\pi T_{\mathrm{i2}}/T)}{\pi T_{\mathrm{i2}}/T} + U_0 = U_0$$

- Iz obeh enačb izrazimo temensko vrednost sinusnega signala

$$\hat{u} = \frac{(\overline{U}_1 - \overline{U}_2)\pi T_{\mathrm{i1}}/T}{\sin(\pi T_{\mathrm{i1}}/T)}$$

  - in ovrednotimo: $\hat{u} = \dfrac{(0{,}18\,\mathrm{V} - 0{,}02\,\mathrm{V})\,\pi \cdot 2\,\mathrm{ms} \cdot 50\,\mathrm{Hz}}{\sin(\pi \cdot 2\,\mathrm{ms} \cdot 50\,\mathrm{Hz})} = 0{,}163\,\mathrm{V}$

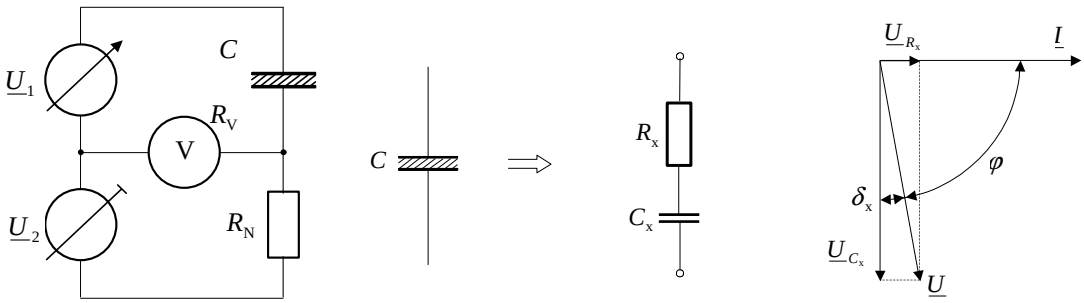
4. Z aktivnim mostičem, z dvema napetostnima viroma $f_1 = f_2 = 1{,}0000\left(1 \pm 10^{-4}\right)\,\mathrm{kHz}$, merimo kapacitivnost $C_x \approx 0{,}16\,\mu\mathrm{F}$. Koliko morata biti napetosti U_1 in U_2 ($m_{U_1} = m_{U_2} = 10^{-3}$; $\varphi = 89{,}7^\circ \pm 0{,}1^\circ$), da bo standardna negotovost zaradi ločljivosti zanemarljva, ko je mostič v ravnovesju?

- Voltmeter: ločljivost $\Delta U = 1\,\mathrm{mV}$, $R_\mathrm{V} = 100\,\mathrm{M\Omega}$
- $R_\mathrm{N} = 1{,}0000\left(1 \pm 10^{-4}\right)\mathrm{k\Omega}$

$$\underline{\delta}_\mathrm{q} = \frac{\left(\Delta \underline{U}_5\right)_\mathrm{q}}{\underline{U}_1}\left(1 + \frac{\underline{Z}_\mathrm{x}}{\underline{Z}_\mathrm{N}}\right)$$

Rešitev:

- Skice mostiča in nadomestne zaporedne vezave impedance kondenzatorja s fazorskim diagramom:



- Iz ravnovesne enačbe $R_\mathrm{x} + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_\mathrm{x}} = R_\mathrm{N}\dfrac{U_1}{U_2}\cos\varphi + \mathrm{j}R_\mathrm{N}\dfrac{U_1}{U_2}\sin\varphi$ izrazimo kapacitivnost :

$$C_\mathrm{x} = -\frac{U_2}{R_\mathrm{N}\,U_1}\frac{1}{\omega\,\sin\varphi}$$

- Če zanemarimo negotovost zaradi ločljivosti, se skupna standardna negotovost za kapacitivnost izrazi kot geometrijska vsota prispevkov vhodnih veličin:

$$w_\mathrm{c}\left(C_\mathrm{x}\right) = \sqrt{w^2\left(R_\mathrm{N}\right) + w^2\left(U_1\right) + w^2\left(U_2\right) + w^2\left(f\right) + u^2\left(\varphi\right)/\mathrm{tg}^2\varphi}$$

  - V našem primeru se negotovosti prispevkov izračunajo iz mejnih vrednosti in privzete pravokotne porazdelitve pogreška, za katero velja $w(G) = m(G)/\sqrt{3}$. Prispevek negotovosti zaradi kota moramo izraziti v radianih: $M\left(\varphi\right)_\mathrm{rad} = 0{,}1^\circ\,\dfrac{\pi}{180^\circ} = 1{,}745\cdot 10^{-3}$
  - Skupna standardna negotovost je tako:

$$w_\mathrm{c}\left(C_\mathrm{x}\right) = \sqrt{\left(\frac{m\left(R_\mathrm{N}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{m\left(U_1\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{m\left(U_2\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{m\left(f\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{M\left(\varphi\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 \Big/ \mathrm{tg}^2\varphi}$$

$$w_\mathrm{c}\left(C_\mathrm{x}\right) = 8{,}206\cdot 10^{-4}$$

- Standardna negotovost **zaradi ločljivosti mostiča** $w_q = \delta_\mathrm{q}/\sqrt{12}$ je zanemarljiva, kadar velja:

$$w_\mathrm{q} = \frac{\delta_\mathrm{q}}{2\sqrt{3}} \le \frac{1}{5}w_\mathrm{c}\left(C_\mathrm{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \delta_\mathrm{q} \le \frac{2\sqrt{3}}{5}w_\mathrm{c}\left(C_\mathrm{x}\right) = 5{,}685\cdot 10^{-4}$$

- V enačbi za ločljivost mostiča izrazimo impedanci $\underline{Z}_\mathrm{x}$ in $\underline{Z}_\mathrm{N}$ z elementi R_x, C_x in R_N:

$$\underline{\delta}_\mathrm{q} = \frac{\left(\Delta\underline{U}_5\right)_\mathrm{q}}{\underline{U}_1}\left(1+\frac{\underline{Z}_\mathrm{x}}{\underline{Z}_\mathrm{N}}\right) \quad \rightarrow \quad \underline{\delta}_\mathrm{q} = \frac{\left(\Delta\underline{U}_5\right)_\mathrm{q}}{\underline{U}_1}\left(1+\frac{R_\mathrm{x}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_\mathrm{x}}}{R_\mathrm{N}}\right)$$

  - Ker je $1/\omega C_\mathrm{x} >> R_\mathrm{x}$ ($U_{R_\mathrm{x}}/U_{C_\mathrm{x}} = 1/\mathrm{tg}\left(89{,}7^\circ\right) = 5{,}24\cdot 10^{-3}$), zapišemo:

$$\underline{\delta}_\mathrm{q} = \frac{\left(\Delta\underline{U}_5\right)_\mathrm{q}}{\underline{U}_1}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_\mathrm{x} R_\mathrm{N}}\right) = \frac{\left(\Delta\underline{U}_5\right)_\mathrm{q}}{\underline{U}_1}\left(1-\mathrm{j}0{,}9947\right)$$

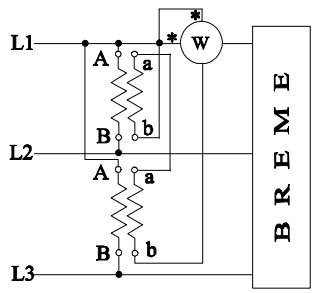
- Efektivno vrednost napetosti U_1 zapišemo tako, da upoštevamo efektivne vrednosti veličin:

$$U_1 = \frac{\left(\Delta U_5\right)_\mathrm{q}}{\delta_\mathrm{q}}\sqrt{1^2+0{,}9947^2} \approx \frac{1\,\mathrm{mV}}{5{,}685\cdot 10^{-4}}\sqrt{2} = 2{,}488\,\mathrm{V}$$

- Razmerje impedanc nam določa tudi razmerje napetosti in od tod dobimo še vrednost napetosti U_2:

$$\frac{Z_\mathrm{x}}{Z_\mathrm{N}} \approx \frac{1}{\omega C_\mathrm{x} R_\mathrm{N}} = 0{,}9947 = \frac{U_1}{U_2} \quad \rightarrow \quad U_2 = 2{,}501\,\mathrm{V}$$

5. Dokažite kaj kaže vatmeter, če je trifazni sistem uravnovešen? (K_u =1)



Rešitev:

- Tok tokovne veje vatmetra je enak toku prve faze:

$$i_W = i_1$$

- Napetost napetostne veje vatmetra je enaka vsoti medfaznih napetosti u_{21} in u_{13}. Prvi transformator je priključen med fazi L1(**A**) in L2(**B**), drugi pa med fazi L1(**A**) in L3(**B**). Ker je sponka **b** sekundarne strani prvega transformatorja priključena na vhodno sponko napetostne veje vatmetra in je sponka **a** povezana s sponko **a** drugega transformatorja, imamo na napetostni veji vatmetra vsoto invertirane napetosti $-u_{12} = u_{21}$ in u_{13}. Skupna napetost je enaka:

$$u_W = u_{21} + u_{13} = u_2 - u_1 + u_1 - u_3 = u_2 - u_3 = u_{23}$$

- Vatmeter kaže:

$$\underline{\underline{P_W}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{U_W \cdot I_W^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{u}_{23} \cdot \underline{i}_1^*\right\}$$

- Ker je sistem uravnovešen (uravnovešen vir z enakimi napetostmi ter 120° faznim zamikom med njimi in simetrično breme), fazna napetost zaostaja za medfazno za 90° in je za $\sqrt{3}$ manjša:

$$\underline{u}_{23} = \sqrt{3}\underline{u}_1 \cdot e^{-j90^\circ}$$

- Odklon vatmetra je proporcionalen jalovi moči ene faze:

$$P_W = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\sqrt{3}\underline{u}_1 \cdot \underline{i}_1^* \cdot e^{-j90^\circ}\right\} = \sqrt{3}\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\underline{u}_1 \cdot \underline{i}_1^*\right\} = \underline{\underline{\sqrt{3}\,Q_1}}$$

- Zaradi simetričnosti bremena velja $Q = 3 \cdot Q_1$ in nam vatmeter kaže jalovo moč bremena:

$$P_W = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$