3. Pogreški pri merjenju in merilna negotovost

Kljub ‘**objektivnosti**’ merilnega postopka **ne dobimo prave** vrednosti veličine. Vzroki:

- učinki **vplivnih** veličin,
- **nepopolnost** merilnih **metod**,
- **nepopolnost** merilnih **naprav**, …

Opravka imamo z **merilnim pogreškom**.

- **Absolutni** (merilni) **pogrešek** podan z enotami:

$$E = x_\mathrm{i} - x$$

- **Relativni** (merilni) **pogrešek** v razmerju do (delovne) prave vrednosti:

$$e = \frac{E}{x} = \frac{x_\mathrm{i} - x}{x}$$

  - podan v procentih ($1\% = 10^{-2}$) je **procentualni** pogrešek:

$$e = 100\,\frac{E}{x}\,\% = 100\,\frac{x_\mathrm{i} - x}{x}\,\%$$

  - tudi v **promilih** ($1‰ = 10^{-3}$) in **milijoninkah** (ppm – part per million: $1\,\mathrm{ppm} = 10^{-6}$).

Primer:

- izmerjena vrednost: $C_{\mathrm{i}} = 62{,}7\,\mathrm{nF}$;
- prava vrednost: $C = 63{,}4\,\mathrm{nF}$;
- absolutni pogrešek: $E = C_{\mathrm{i}} - C = 62{,}7\,\mathrm{nF} - 63{,}4\,\mathrm{nF} = -0{,}7\,\mathrm{nF}$
- relativni pogrešek: $e = \dfrac{C_{\mathrm{i}} - C}{C} = \dfrac{-0{,}7\,\mathrm{nF}}{63{,}4\,\mathrm{nF}} = -0{,}011 = -1{,}1\%$

Pri merah je pogrešek definiran kot:

- **razlika nazivne** (označene) vrednosti in **prave** vrednosti.

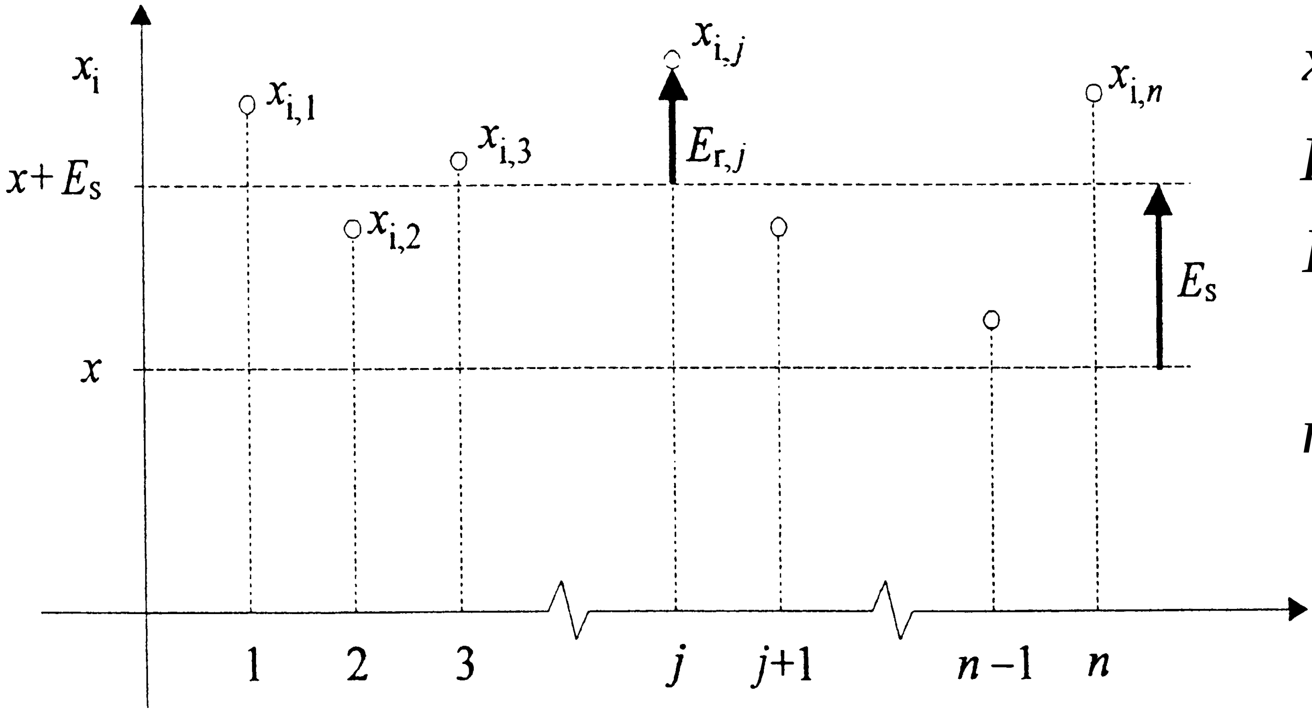
Primer:

- nazivna vrednost uporovnega etalona: $R_{\mathrm{N}} = 1000\,\Omega$;
- s precizno napravo ugotovljena prava vrednost: $R = 999{,}7\,\Omega$
- pogrešek: $E = R_{\mathrm{N}} - R = 1000\,\Omega - 999{,}7\,\Omega = 0{,}3\,\Omega$,

$$e = 3.10^{-4} \quad \text{ali} \quad e = 0{,}03\%$$

3.1 Sistematični in naključni pogrešek

Če se meritev ponovi **z isto merilno napravo**, **pod enakimi pogoji**, se **nova** izmerjena **vrednost** v splošnem **razlikuje** od prejšnje.



x - prava vrednost veličine,

$x_{i,j}$ - j-ta izmerjena vrednost,

E_s - sistematični pogrešek,

$E_{r,j}$ - naključni pogrešek j-te izmerjene vrednosti,

n - število ponovljenih meritev.

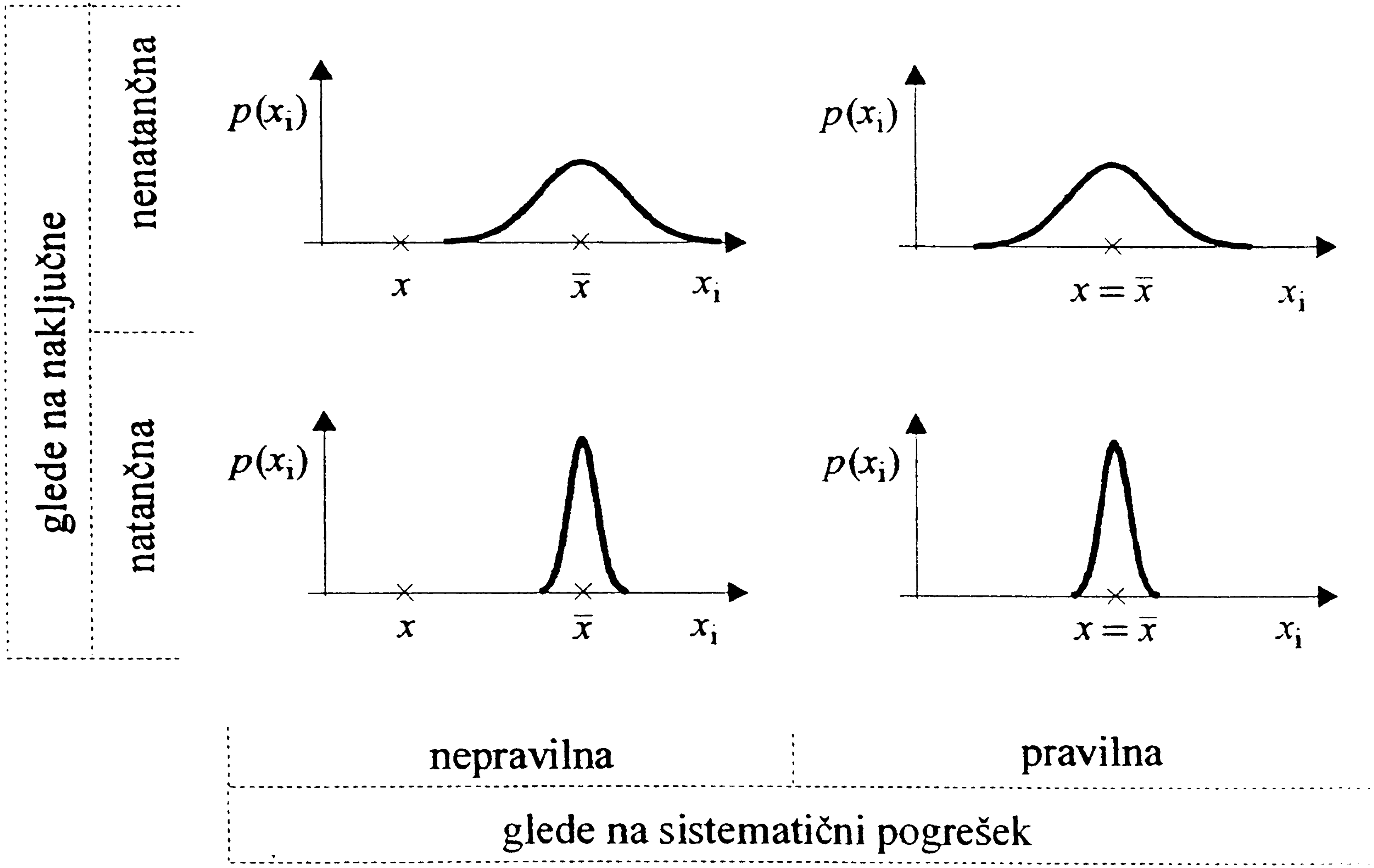
Slika 3.1 Potek izmerjenih vrednosti pod enakimi pogoji

Ločimo:

- **sitematični** pogrešek – **meritev** je **nepravilna**,
    - vzrok povzroča **nespremenjeni** učinek,
    - načeloma **ugotovljiv** in ga lahko izločimo.

- **naključni** pogrešek – **meritev** je **nenatančna**,
    - vzroki povzročajo **naključno razpršenost** izmerjenih vrednosti,
    - naključnega pogreška **ne moremo kompenzirati**.

Točna meritev je **pravilna** in **natančna**.



Slika 3.2 Meritev glede na vpliv sistematičnega in naključnih pogreškov

Povezava med izmerjeno in pravo vrednostjo:

$$x_{\mathrm{i},j} = x + E_j = x + E_\mathrm{s} + E_{\mathrm{r},j}$$

- **aritmetična sredina** izmerjenih vrednosti:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{\mathrm{i},j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x + E_\mathrm{s} + E_{\mathrm{r},j}\right) = x + E_\mathrm{s} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E_{\mathrm{r},j}$$

- ker je **pogostost** nastopa naključnih **pozitivnih in negativnih** pogreškov **enaka**, se njihov **vpliv s ponavljanjem manjša**:

$$n \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E_{\mathrm{r},j} \to 0$$

- če je število ponovitev **pod 'enakimi' pogoji** veliko:

$$n \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} = x + E_\mathrm{s}$$

$$n \rightarrow \infty \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} = x + E_s \ ! \quad \Rightarrow \quad E_s = \bar{x} - x$$

- **aritmetična sredina** neskončne množice izmerjenih vrednosti še **ni enaka pravi** vrednosti!
- poglavitni vir netočnosti je **sistematični pogrešek**!
    - **odkrivamo** ga:
        - z **različnimi metodami**,
        - **spreminjamo** posamezne **dele** merilne naprave,
        - **spreminjamo vplivne** veličine,
        - **primerjamo** z meritvami **drugih** laboratorijev.
    - v celoti ga ne moremo odpraviti!
        - **znižamo** ga do tiste mere, ki je zahtevana ali **gospodarsko upravičena**.

Pogrešek naj bo **tolikšen**, da še omogoča **pravilno sklepanje** in **nadaljnje odločitve**.

Korekcija ali **popravek** je enak **odkritemu** delu **sistematičnega** pogreška z **nasprotnim predznakom**.

- ker sitematski pogrešek ni v popolnosti znan, tudi **korekcija ni popolna**.

Grobi pogreški:

- odčitavanje na napačni skali,
- napačna raba instrumentov,
- napačno računanje,
- pokvarjena merila, …

Razširjanje pogreškov

Sistematični in naključni pogrešek **pri posredno** merjeni veličini (npr.: $R = U/I$, $P = UI\cos\varphi$)

- določimo ga s pogreški neposredno merjenih veličin - **razširjanje pogreškov**.
  - zanima nas, kako posamezna **neposredno** merjena veličina **vpliva na posredno** merjeno veličino?

$$y = f(x)$$

Sprememba x za dx povzroči spremebo y za dy:

$$y + \mathrm{d}y = f(x + \mathrm{d}x)$$

$$y + \mathrm{d}y = f(x + \mathrm{d}x)$$

- po razvoju desne strain v **Taylorjevo vrsto** in **zanemaritvi** členov drugega in višjega reda dobimo:

$$y + \mathrm{d}y = f(x) + f'(x)\mathrm{d}x$$

  - in od tod: $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

    oz. $\Delta y = f'(x)\Delta x$ (končne spremembe)

    - če je Δx majhna, smemo člene višjih redov zanemariti!

Kadar je posredno merjena veličina **funkcija** N **spremenljivk**:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_N}\Delta x_N = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i$$

- **Sistematični pogrešek** posredno merjene veličine dobimo iz sistematičnih pogreškov neposredno merjenih veličin.

$$E_{s,y} = \frac{\partial y}{\partial x_1}E_{s,1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}E_{s,2} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_N}E_{s,N} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial y}{\partial x_i}E_{s,i}$$

  - enačba ima pomen **pri** močno **nelinearnih** sistemih.
  - v praksi **korigiramo** sistematske pogreške že **pri neposredno** merjenih veličinah.
- Ker je narava **naključnih pogreškov** drugačna (predznak in velikost nista znana) se drugače razširjajo - geometrično

3.2 Statistična obdelava izmerjenih vrednosti

Iz vrste meritev, ki so **ponovljene pod enakimi pogoji**, dobimo najboljšo **oceno za pravo** vrednost.

Na osnovi **vzorca** (končno število izmerkov) **spoznamo lastnosti celotne** populacije (neskončno število meritev).

- **predvidimo** lahko pričakovane **rezultate bodočih merjenj** pod enakimi pogoji.
- sistematični pogrešek ne moremo odpraviti!

Aritmetična sredina in eksperimentalni standardni odklon

Če ima vzorec n izmerkov $x_{i,1},\ x_{i,2},\ \ldots,\ x_{i,n}$ je **aritmetična sredina**:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{\mathrm{i},j}$$

in **eksperimentalni standardni odklon** (merilo razpršenosti):

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_{\mathrm{i},j} - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

Kvadrat standardnega odklona je **varianca**: $v(x) = s^2(x)$

Pri **velikem *n*** je eksperimentalni standardni odklon **enak srednji kvadratični vrednosti** naključnih pogreškov:

$$n \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad x_{\mathrm{i},j} - \bar{x} = \left(x + E_{\mathrm{s}} + E_{\mathrm{r},j}\right) - \left(x + E_{\mathrm{s}}\right) = E_{\mathrm{r},j}$$

in zato:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_{\mathrm{i},j} - \bar{x}\right)^2}{n-1}} \approx \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} E_{\mathrm{r},j}^2}{n-1}}$$

- Standardni odklon se od izmerka do izmerka ne spreminja.
- Je **ocena** za **srednjo kvadratično vrednost** naključnih pogreškov,
- **Merilo negotovosti** aritmetične sredine!

Če se izmerjene vrednosti $x_{i,1}$, $x_{i,2}$, …, $x_{i,m}$ **ponavljajo** s **frekvencami** (število ponovitev) f_1, f_2, …, f_m, je aritmetična sredina:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} f_j \, x_{\mathrm{i},j}}{\sum_{j=1}^{m} f_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} f_j \, x_{\mathrm{i},j}$$

in eksperimentalni standardni odklon:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} f_j \left(x_{\mathrm{i},j} - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

Zgled:
Kolikšni so aritmetična sredina, varianca in standardni odklon?

j	1	2	3	4	5	6
x_i	8,260	8,263	8,264	8,265	8,267	8,268
f	1	5	8	7	3	1

- aritmetična sredina:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 8{,}260 + 5 \cdot 8{,}263 + \ldots + 1 \cdot 8{,}268}{1 + 5 + \ldots + 1} = 8{,}2644$$

- varianca:

$$s^2(x) = \frac{1 \cdot (8{,}260 - 8{,}2644)^2 + 5 \cdot (8{,}263 - 8{,}2644)^2 + \ldots}{25 - 1} = 2{,}76 \cdot 10^{-6}$$

- standardni odklon: $s(x) = 0{,}0017$

Združeni eksperimentalni standardni odklon

Včasih imamo na voljo **več** (***r***) **serij meritev** (ista merilna oprema , pod enakimi pogoji, ustaljeni merilni postopek)

- najboljša **ocena** standardnega **odklona celotne populacije** je **združeni eksperimentalni standardni odklon**:

$$s_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2(x) + (n_2 - 1)s_2^2(x) + \cdots + (n_r - 1)s_r^2(x)}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_r - 1)}}$$

- n_r - število izmerkov in $s_r(x)$ - eksperimentalni standardni odklon *r*-te serije meritev.

Grupiranje, urejanje in prikazovanje podatkov

Množico izmerjenih vrednosti (pod enakimi pogoji) moramo **urediti** in jo podati z **nekaj značilnimi** vrednostmi.

Tabela 3.1 Niz 24 izmerjenih vrednosti

j	R_i/Ω	j	R_i/Ω	j	R_i/Ω	j	R_i/Ω
1	999,0	7	1001,6	13	998,5	19	1002,9
2	998,4	8	1001,4	14	1001,7	20	1003,3
3	1002,4	9	999,7	15	1000,1	21	1000,9
4	1000,9	10	1003,4	16	1001,0	22	999,9
5	999,3	11	999,0	17	1001,9	23	1001,4
6	1000,2	12	1001,0	18	997,6	24	1000,0

Časovno tendenco lahko grobo ocenimo iz grafa:

Slika 3.3 Grafična ponazoritev izmerjenih vrednosti

Korelacijski koeficient (analitični kriterij) med izmerjenemi vrednostmi in časom znaša le $r = 0{,}18$ $\rightarrow$ **podatki so ‘neodvisni’ od časa**.

Za **uvrstitev** podatkov **v** posamezni **razred** velja **načelo polodprtega intervala**: $R_{k,\mathrm{sp}} \leq R_{\mathrm{i}} < R_{k,\mathrm{zg}}$

Tabela 3.2 Frekvenčna tabela

številka razreda k	sredina razreda R_k/Ω	meji razreda: spodnja $R_{k,\mathrm{sp}}/\Omega$	meji razreda: zgornja $R_{k,\mathrm{zg}}/\Omega$	frekvenca f_k		relativna frekvenca f_k'
1	998	997,5	998,5	II	2	0,083
2	999	998,5	999,5	IIII	4	0,167
3	1000	999,5	1000,5	IIII	5	0,208
4	1001	1000,5	1001,5	IIII I	6	0,250
5	1002	1001,5	1002,5	IIII	4	0,167
6	1003	1002,5	1003,5	III	3	0,125

Frekvenca: **število** podatkov v posameznem **razredu**

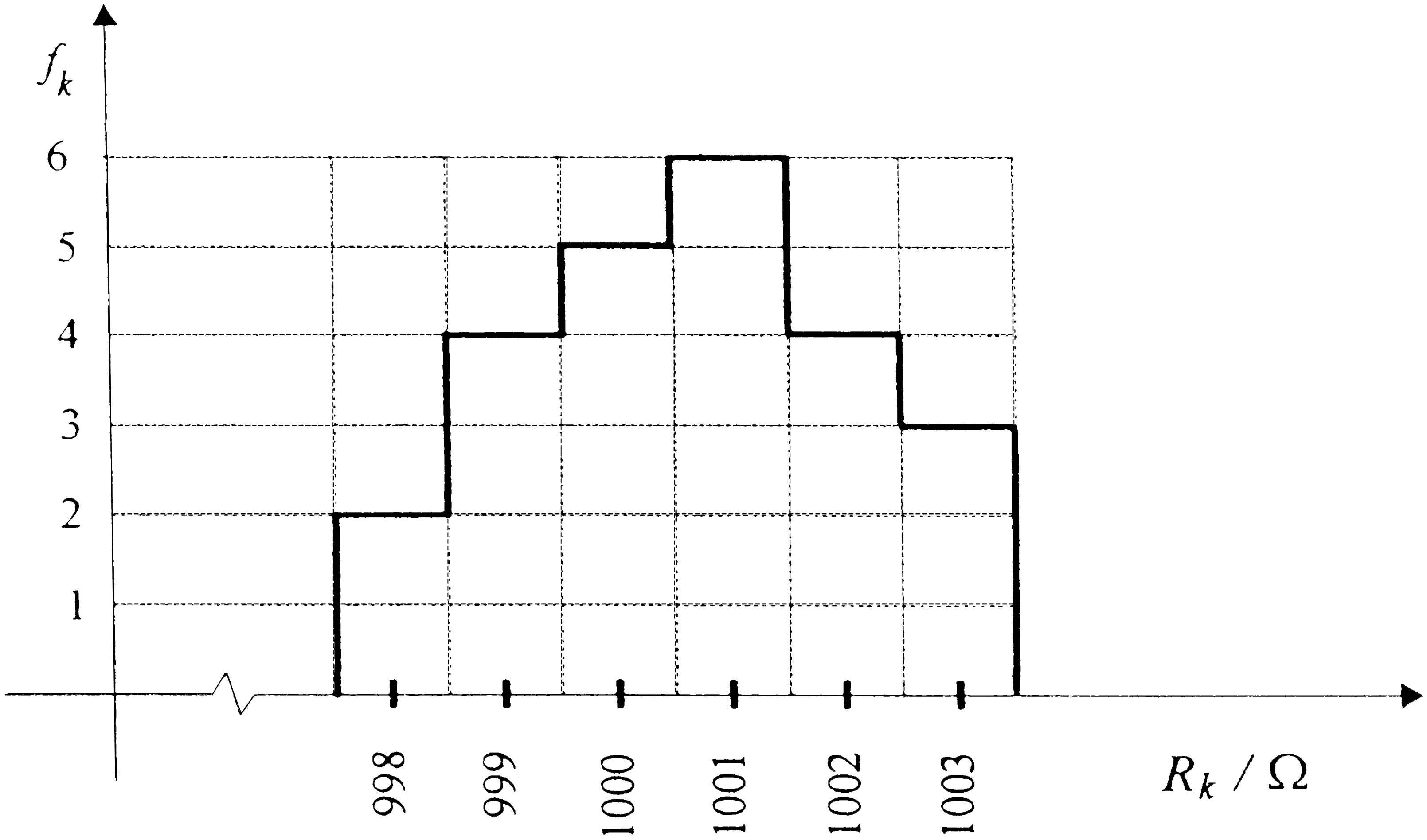
Relativna frekvenca:

- relativno število podatkov v intervalu **glede na število vseh** rezultatov: $f_k' = \frac{f_k}{n}$

Frekvenčna tabela pokaže:

- območje izmerjenih vrednosti,
- skrčenje števila podatkov,
  - vsem podatkom v razredu pripišemo srednjo vrednost (boljša preglednost),
- pogostnost v območju,
- oceno srednje vrednosti…

Grafična ponazoritev – **histogram**:



Slika 3.4 Histogram izmerjenih vrednosti upornosti

Relativna frekvenca (oz. frekvenca) je lahko **enaka tudi ploščini stolpca** $f_k'/\Delta x$ (oz. $f_k/\Delta x$) Δx - širina razreda

- **ploščina** histograma je **enaka 1** – je normirana

Kadar primerjamo podatke merjenj **z različnim številom merjenj** je **uporabnejša relativna frekvenca**!

Če je **število meritev veliko** pod **enakimi pogoji** postajajo histogrami med seboj podobni - zelo **dober približek** histogramu **neskončne populacije** (normalni ali gaussni).