Gaussova ali normalna porazdelitev

Pri zelo **velikem številu meritev** ($n \Rightarrow \infty$) in manjšanju širine razreda ($\Delta x \Rightarrow 0$) dobi **histogram zvezni značaj**.

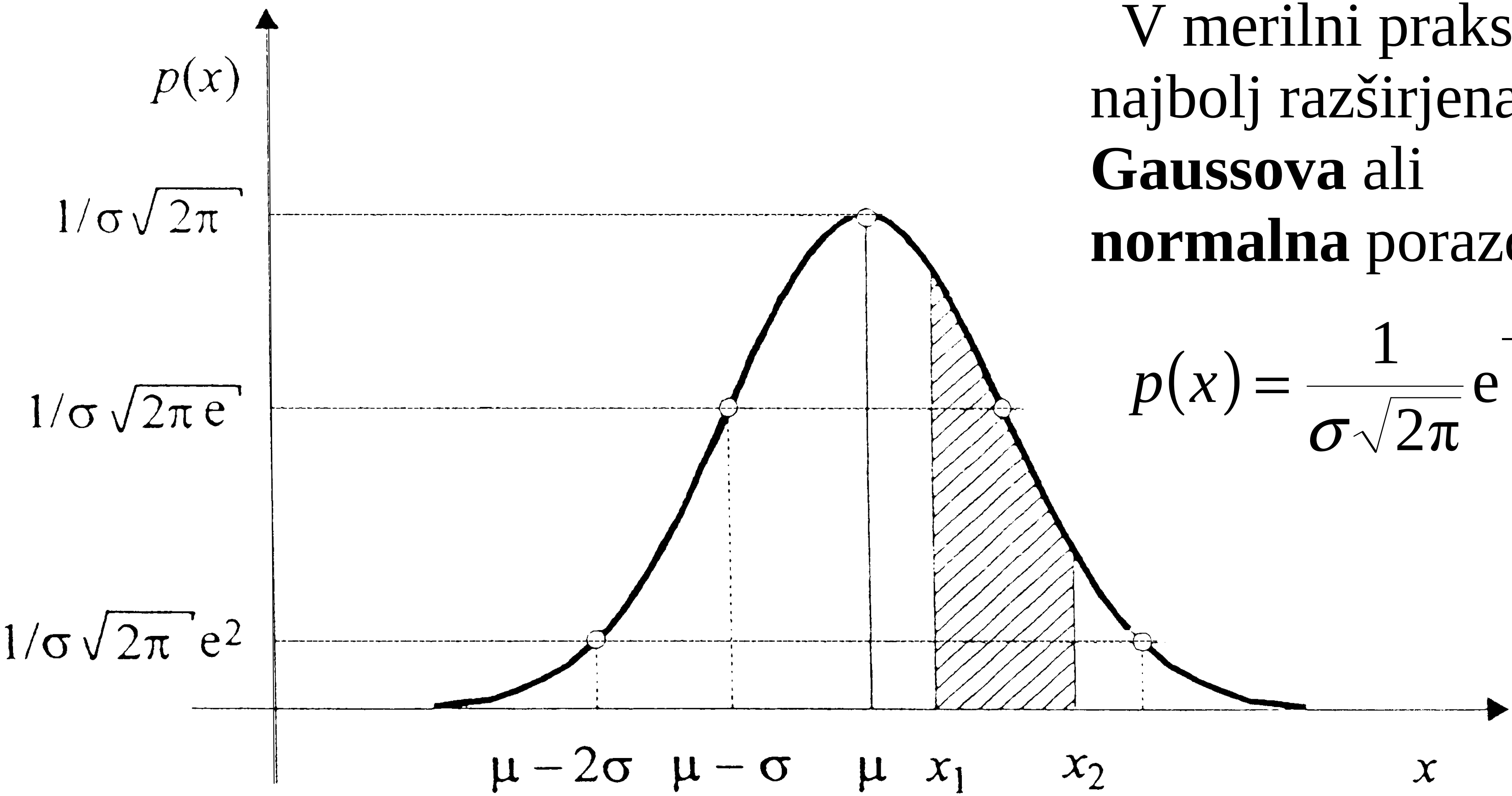
- merjena veličina lahko zavzame **katerikoli** vrednost,
- **verjetnost**, da zavzame neko določeno vrednost med neskončno možnostmi, **gre proti 0**.

Namesto verjetnosti vpeljemo **gostoto vejetnosti**:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_\mathrm{i} < x < x_\mathrm{i} + \Delta x)}{\Delta x}$$ - gostota relativne frekvence

- **števec** je enak **verjetnosti**, da merjena veličina **leži v intervalu** Δx - ustreza **relativni frekvenci**.

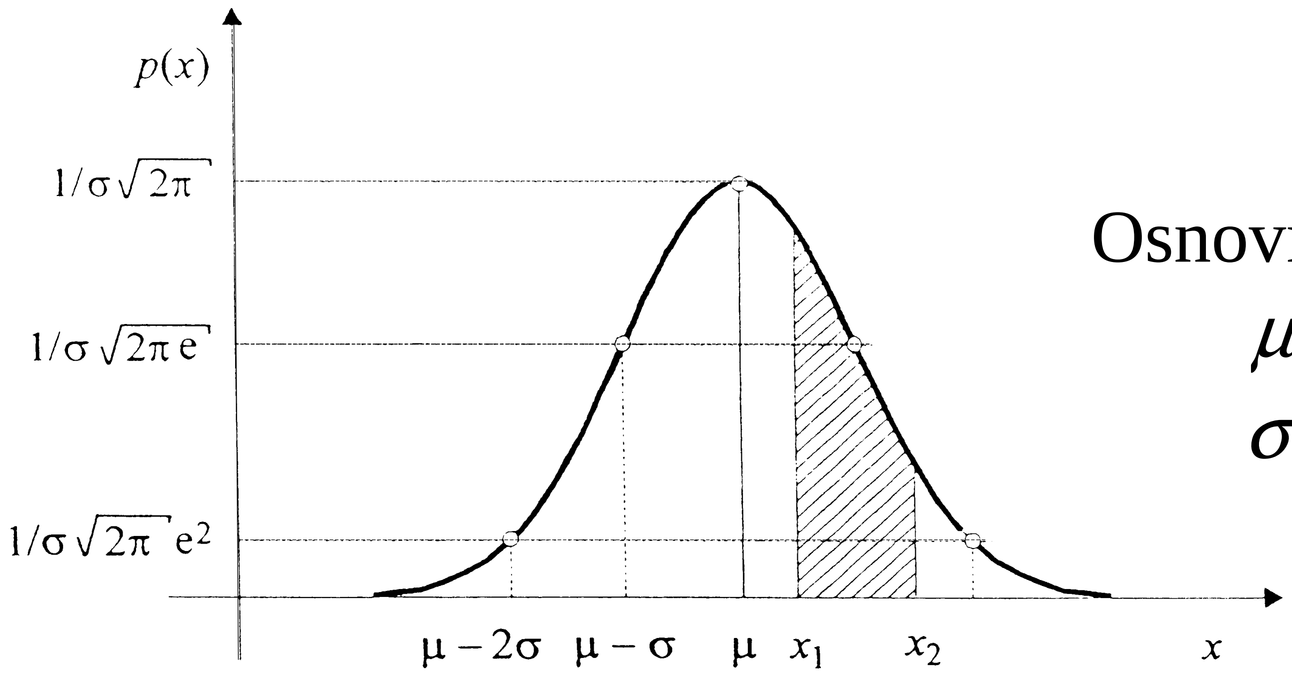
Gostota verjetnosti je pogosto kopaste oblike.



V merilni praksi je najbolj razširjena **Gaussova** ali **normalna** porazdelitev:

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Slika 3.5 Gostota verjetnosti pri Gaussovi ali normalni porazdelitvi



Osnovna parametra populacije:

μ **- aritmetična sredina**

σ **- standardna deviacija**

Verjetnost, da se vrednost nahaja med x_1 in x_2:

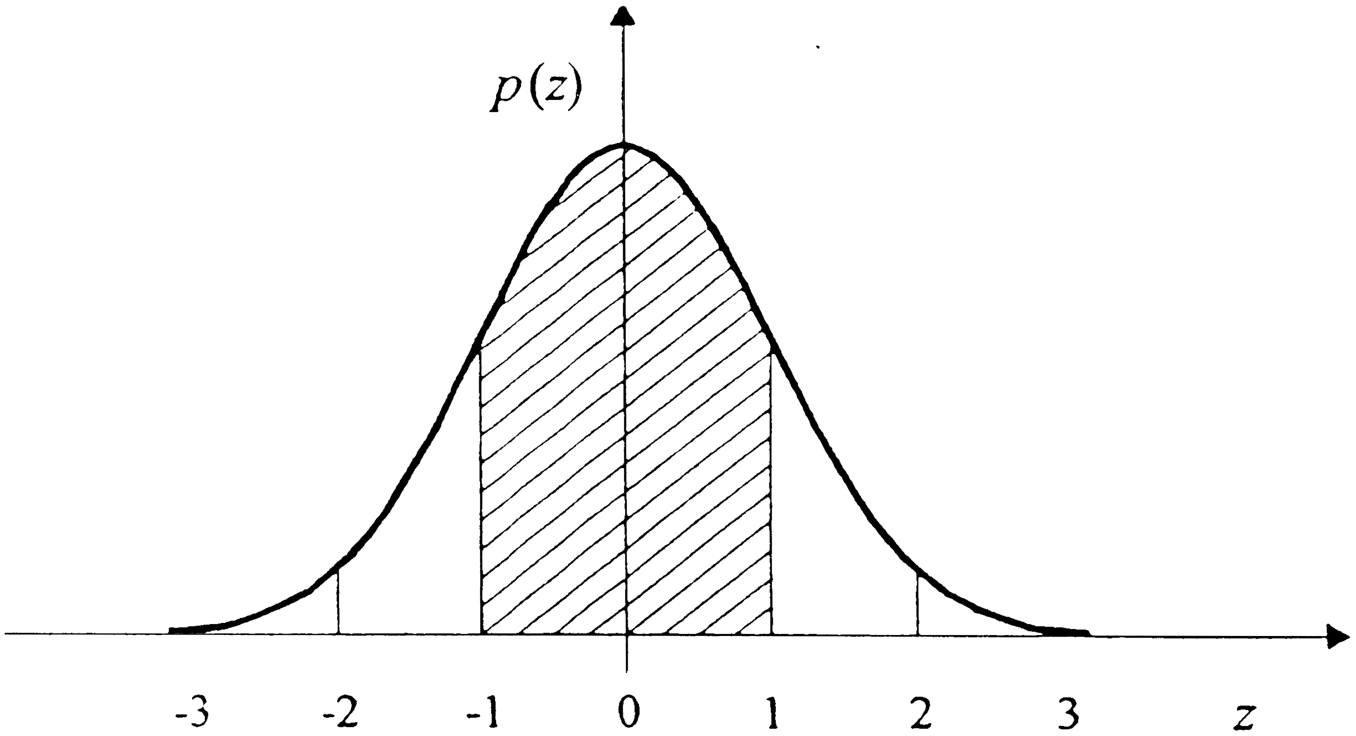
$$P_{12} = P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\mathrm{d}x$$

Verjetnost, da se vrednost nahaja med $-\infty$ in $+\infty$:

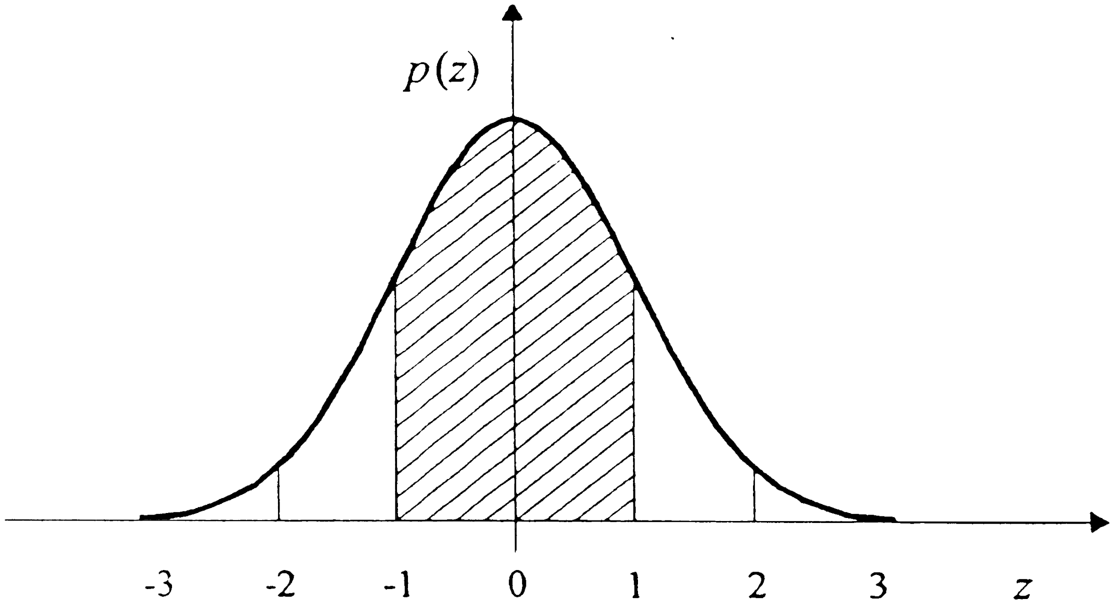
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \quad (100\,\%)$$

Če **normiramo** spremenljivko x z osnovnima parametroma μ in σ, dobimo **standardizirano normalno porazdelitev**:

$$z = (x - \mu)/\sigma \quad \Rightarrow \quad p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}$$



Slika 3.6 Standardizirana normalna porazdelitev



Osnovna parametra:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x-\mu)/\sigma = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x-\mu)\right) = 0$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(z-\bar{z})^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}z^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x-\mu)^2/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x-\mu)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Verjetnost, da leži spremenljivka med $z_1 = -1$ in $z_2 = +1$:

$P_{12} = 0{,}683$ ($P_{12} = 68{,}3\%$)

- 683 izmerkov od tisoč leži med $x_1 = \mu - \sigma$ in $x_2 = \mu + \sigma$

Tabela 3.3 Verjetnosti pri standardizirani normalni porazdelitvi

spodnja meja z_1	zgornja meja z_2	verjetnost, da se x nahaja v mejah	verjetnost, da se x nahaja izven meja
-0, 675	+0,675	0,5	0,5
-1	+1	0,6826	0,3174
-1,96	+1,96	0,95	0,05
-2	+2	0,9543	0,0457
-2,58	+2,58	0,99	0,01
-3	+3	0,9973	0,0027
-3,9	+3,9	0,9999	0,0001

Zgled:

- Imamo oceno celotne populacije: $\mu = 220, \quad \sigma = 3;$
- Kolikšna je verjetnost, da pogrešek pri merjenju ne bo večji od ± 2? $\quad (220 \pm 2 = 218 \div 222)$

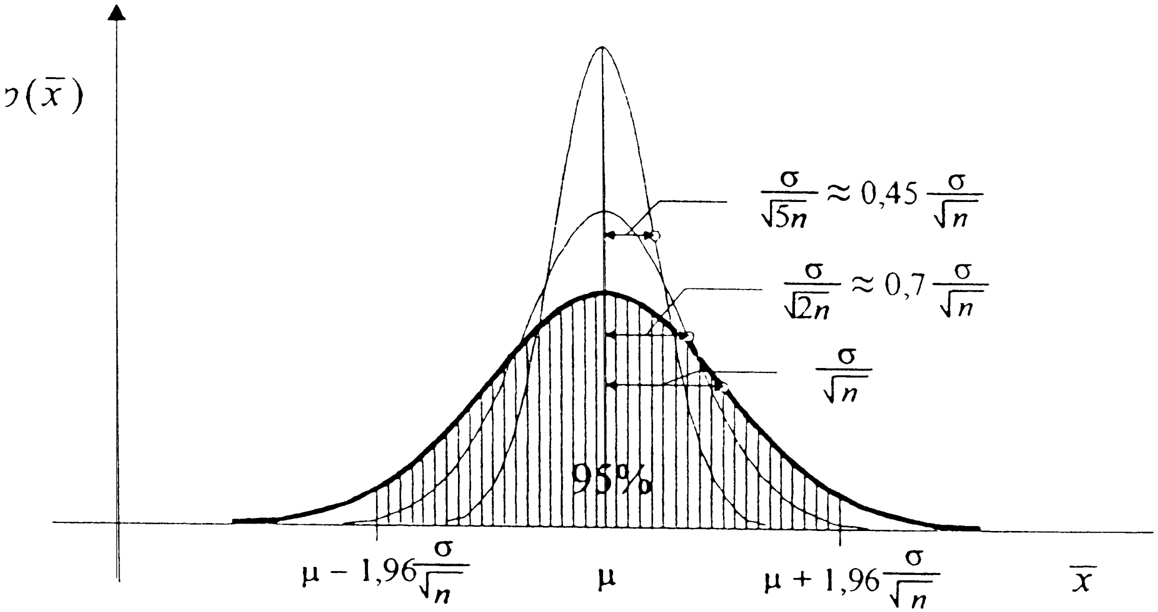
$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{218 - 220}{3} \approx -0{,}67$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{222 - 220}{3} \approx +0{,}67 \quad \Rightarrow \quad P_{12} = 50\,\%$$

Standardni odklon aritmetične sredine in interval zaupanja

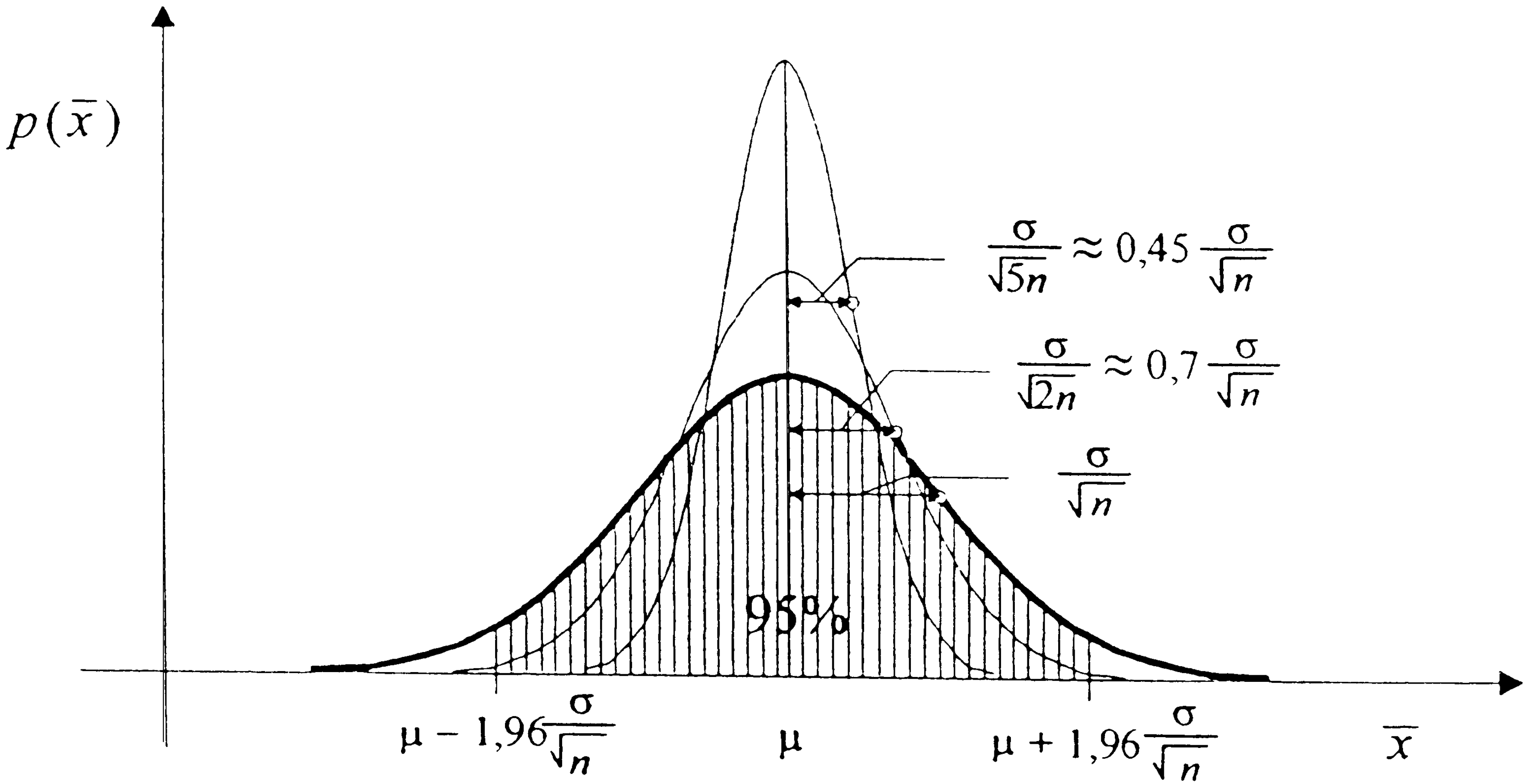
Če naredimo **več (*r*) serij meritev** z **isto** merilno **opremo** pod **enakimi pogoji**,

- je razpršenost **aritmetičnih sredin** $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r$ manjša od razpršenosti posameznih meritev.
  - Porazdelitev je **normalna!**



Standardni odklon aritmetične sredine: $\sigma(\bar{x}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- odvisen od velikosti vzorca *n*



Slika 3.7 Gostota verjetnosti za aritmetične sredine za tri velikosti vzorcev

Tudi to porazdelitev lahko **standardiziramo** z:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma(\bar{x})} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Integral $P_{12} = \int_{z_1}^{z_2} p(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z$ **ni elementaren**,

- podan je **tabelarično**.

Iz obeh enačb lahko določimo interval, kjer se nahaja aritmetična sredina – **interval zaupanja**:

$$\mu = \bar{x} \pm z\sigma(\bar{x}) = \bar{x} \pm z\,\sigma / \sqrt{n}$$

- **spodnja meja**: $\mu = \bar{x} - z\,\sigma / \sqrt{n}$
- **zgornja meja**: $\mu = \bar{x} + z\,\sigma / \sqrt{n}$

Verjetnost za interval se imenuje **stopnja** ali **raven zaupanja**

- **Primer**: stopnja zaupanja je 95%
  - spodnja meja: $\mu = \bar{x} - 1{,}96\,\sigma/\sqrt{n}$
  - zgornja meja: $\mu = \bar{x} + 1{,}96\,\sigma/\sqrt{n}$

V praksi standardni odklon populacije σ nadomestimo z **eksperimentalnim standardnim odklonom** $s(x)$ in posledično tudi **eksperimentalnim standardnim odklon aritmetične sredine:**

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$ - tudi **standardni pogrešek**

Pri končnem številu meritev uporabljamo **Studentovo** ali ***t*-porazdelitev** (po Gossetu)

- simetrična in zvončaste oblike,
- z večanjem števila izmerkov **prehaja v normalno** porazdelitev
  - interval zaupanja: $$\mu = \bar{x} \pm t\, s(\bar{x}) = \bar{x} \pm t\, s(x) / \sqrt{n}$$
  - spodnja meja: $\mu = \bar{x} - t\, s(x) / \sqrt{n}$
  - zgornja meja: $\mu = \bar{x} + t\, s(x) / \sqrt{n}$
- *t* je parameter (podobno kot *z* pri Gaussni porazd.)
- odvisen od **stopnje zaupanja *p*** in **števila** izmerkov ***n*** (oz. števila **prostostnih stopenj** $\nu = n - 1$!)

Tabela 3.4 Vrednosti $t_p(\nu)$ za Studentovo porazdelitev za raven zaupanja p in ν prostostnih stopenj

število prostostnih stopenj ν	vrednosti za $t_p(\nu)$		število prostostnih stopenj ν	vrednosti za $t_p(\nu)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$		$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66	12	2,18	3,05
2	4,3	9,92	14	2,14	2,98
3	3,18	5,84	16	2,12	2,92
4	2,78	4,60	18	2,10	2,88
5	2,57	4,03	20	2,09	2,85
6	2,45	3,71	30	2,04	2,75
7	2,36	3,50	40	2,02	2,70
8	2,31	3,36	50	2,01	2,68
9	2,26	3,25	100	1,98	2,63
10	2,23	3,17	∞	1,96	2,58

Zgled:

Kolikšen je interval zaupanja za $p = 95\%$ stopnjo zaupanja?

x_{i} : 273, 268, 275, 281, 286

- aritmetična sredina je:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{\mathrm{i},j} = \frac{1}{5}\left(273+268+275+281+286\right) = 276{,}6$$

- eksperimentalni standardni odklon je:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_{\mathrm{i},j} - \bar{x}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(273-276{,}6)^2 + (268-276{,}6)^2 + \ldots + (286-276{,}6)^2}{5-1}} = 7{,}02$$

- parameter Studentove porazdelitve je za:

$$\begin{aligned} &\nu = n - 1 = 5 - 1 = 4 \\ &p = 95\% \qquad \Rightarrow \qquad t_p(\nu) = t_{0,95}(4) = 2{,}78 \end{aligned}$$

- interval zaupanja:

$$\mu = \bar{x} \pm t\, s(x) / \sqrt{n} = 276{,}6 \pm 2{,}78 \cdot 7{,}02 / \sqrt{5} = 276{,}6 \pm 8{,}8$$

ali $$267{,}8 \le \mu \le 285{,}4$$

3.3 Pogreški merilnih instrumentov in njihove mejne vrednosti

Rezultat merjenja je območje vrednosti (ne ena sama vrednost!).

Prispevki k nedoločenosti merjenja pri **eni sami meritvi** imajo bolj **sistematično naravo**:

- **lastni pogrešek** merilnega instrumenta,
- **spremembo kazanja**, če nimamo referenčnih pogojev,
- **ločljivost**,
- odstopanje etalonov od nazivnih vrednosti,
- ne dovolj točen matematični model…
    - ti prispevki so dani **z mejnimi vrednostmi.**

Meja (lastnega) pogreška

Pogrešek instrumenta **ne sme preseči določene vrednosti** v mejah merilnega območja in **pod referenčnimi pogoji**.

Lastni ali **temeljni pogrešek** je posledica **notranjih lastnosti** instrumenta.

- Je **sistematični** pogrešek, ki ga povzročajo:
    - **staranje** vgrajenih preduporov, souporov in elektronskih sestavnih delov,
    - **preostala napetost**,
    - nezadostna temperaturna kompenzacija,
    - nenatančna graduacija skale,
    - trenje v ležajih,
    - necentrična namestitev, itn.

Če je instrument brezhiben **ne sme preseči** določene vrednosti – **meje pogreška**, ki je podana z **razredom točnosti** r in dogovorjeno **referenčno vrednostjo** x_r.

$$M_x = \pm \frac{r}{100} x_\mathrm{r}$$

Referenčna vrednost x_r je lahko:

- a - **merilni doseg** x_D,
- b – **vsakokratna** izmerjena **vrednost** x_i,
- c - **merilni razpon** x_R,
- d – **dolžina skale** l_D (se opušča).

a: b: c: d:

1 ⃝1 |1| √1

a) Največkrat je referenčna vrednost **merilni doseg** (praviloma zgornja meja merilnega območja): $M_x = \pm \frac{r}{100} x_\mathrm{D}$ - konstanta

b) Meja pogreška **z izmerjeno vrednostjo** kot referenčno vrednostjo **linearno narašča**: $M_x = \pm \frac{r}{100} x_\mathrm{i}$

c) Pri **merilnem razponu** – razlika zgornje in spodnje meje merilnega območja – imamo: $M_x = \pm \frac{r}{100} x_\mathrm{R}$

d) Pri starejših instrumentih se uporablja tudi **dolžina skale,** kjer nastopa **občutljivost**: $M_x = \pm \frac{r}{100} \frac{l_\mathrm{D}}{S}$

Absolutna meja pogreška: M_x

Relativna meja pogreška: $m_x = \dfrac{M_x}{x_\mathrm{i}}$

- Če je referenčna vrednost **merilni doseg**, se **relativna meja spreminja**:

$$m_x = \pm \frac{r}{100} \frac{x_\mathrm{D}}{x_\mathrm{i}}$$

- Če je referenčna vrednost **vsakokratna izmerjena** vrednost, se **relativna meja ne spreminja**:

$$m_x = \frac{M_x}{x_\mathrm{i}} = \pm \frac{r}{100} \frac{x_\mathrm{i}}{x_\mathrm{i}} = \pm \frac{r}{100}$$

Zgled:

- voltmeter: $r = 0{,}5$; $U_{\mathrm{D}} = 100\,\mathrm{V}$; $U_{\mathrm{i1}} = 15{,}5\,\mathrm{V}$; $U_{\mathrm{i2}} = 92{,}4\,\mathrm{V}$

- absolutna meja pogreška:

$$M_U = \pm\frac{r}{100}U_{\mathrm{D}} = \pm\frac{0{,}5}{100}100\,\mathrm{V} = \pm 0{,}50\,\mathrm{V}$$

- relativna meja pogreška:

$$m_{U_1} = \pm\frac{r}{100}\frac{U_{\mathrm{D}}}{U_{\mathrm{i1}}} = \pm\frac{0{,}5}{100}\cdot\frac{100\,\mathrm{V}}{15{,}5\,\mathrm{V}} = \pm 3{,}2\cdot 10^{-2} = \pm 3{,}2\,\%$$

$$m_{U_2} = \pm\frac{M_U}{U_{\mathrm{i2}}} = \pm\frac{0{,}5\,\mathrm{V}}{92{,}4\,\mathrm{V}} = \pm 5{,}4\cdot 10^{-3} = \pm 0{,}54\,\%$$

Pri **digitalnih** merilnih instrumentih je **meja** pogreška sestavljena **iz dveh delov** (iz dosega in izmerjene vrednosti):

$$M_x = \pm\left(a\,x_\mathrm{i} + b\,x_\mathrm{D}\right) \qquad m_x = \pm\left(a + b\frac{x_\mathrm{D}}{x_\mathrm{i}}\right)$$

Primer:

- voltmeter: $U_\mathrm{D} = 2\,\mathrm{V}$; $U_\mathrm{i} = 1{,}2040\,\mathrm{V}$;

$$M_U = \pm\left(0{,}05\,\%\,U_\mathrm{i} + 0{,}02\,\%\,U_\mathrm{D}\right)$$

$$M_U = \pm\left(\frac{0{,}05}{100}1{,}2040\,\mathrm{V} + \frac{0{,}02}{100}2\,\mathrm{V}\right) = \pm\left(0{,}6\,\mathrm{mV} + 0{,}4\,\mathrm{mV}\right) = \pm 1{,}0\,\mathrm{mV}$$

$$m_U = \frac{M_U}{U_\mathrm{i}} = \frac{\pm 1{,}0\,\mathrm{mV}}{1{,}2040\,\mathrm{V}} = \pm 8{,}4\cdot 10^{-4} = \pm 0{,}084\,\%$$

Včasih je delež z dosegom izražen v digitih (en **digit** – mesto **z najmanjšo vrednostjo**).

Primer: $M_U = \pm(0{,}5\,\%\,U_\mathrm{i} + 2\,\mathrm{dig});$ $U_\mathrm{i} = 1{,}347\,\mathrm{V}$

$1\,\mathrm{dig} = 0{,}001\,\mathrm{V}$

$$M_U = \pm\left(\frac{0{,}5}{100} 1{,}347\,\mathrm{V} + 2 \cdot 0{,}001\,\mathrm{V}\right) = \pm 8{,}8\,\mathrm{mV}$$

$$m_U = \frac{M_U}{U_\mathrm{i}} = \frac{\pm 8{,}8\,\mathrm{mV}}{1{,}347\,\mathrm{V}} = \pm 6{,}5 \cdot 10^{-3} = \pm 0{,}65\,\%$$

Meja pogreška je lahko izražena še **z več deli**:

$$M_U = \pm(0{,}05\,\%\,U_\mathrm{i} + 0{,}03\,\%\,U_\mathrm{D} + 2\,\mathrm{dig} + 10\,\mu\mathrm{V})$$

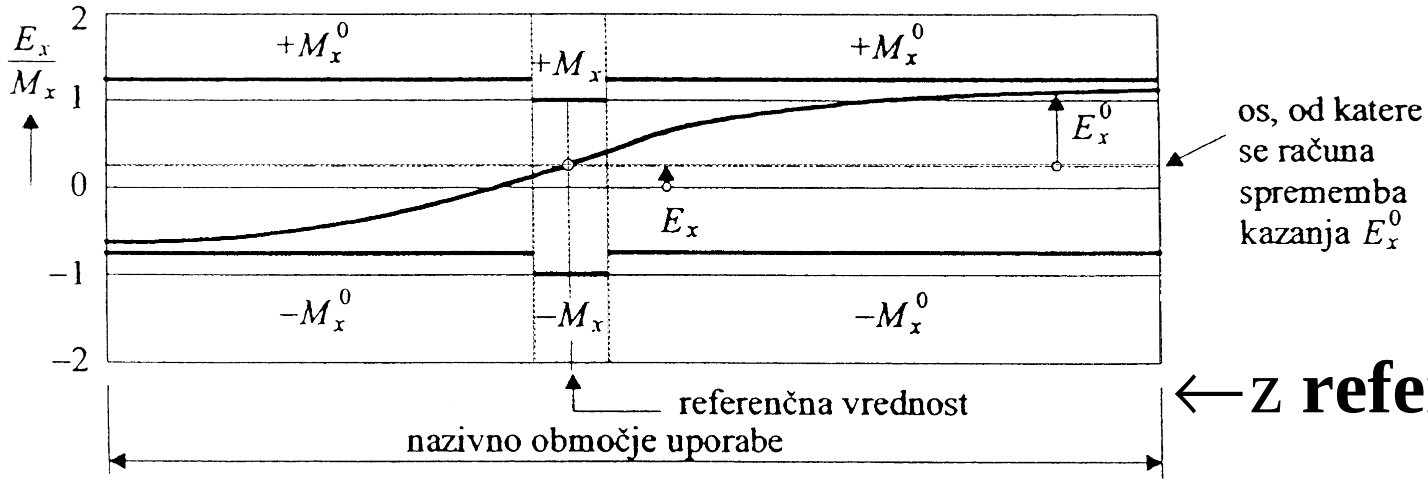
Meja spremembe kazanja

Kadar **ena vplivna veličina ni** v **referenčnih pogojih** (ostale vplivne veličine pa so) **sprememba kazanja** E_{x}^{0} ne sme preseči **meje spremembe kazanja** M_x^0**:**

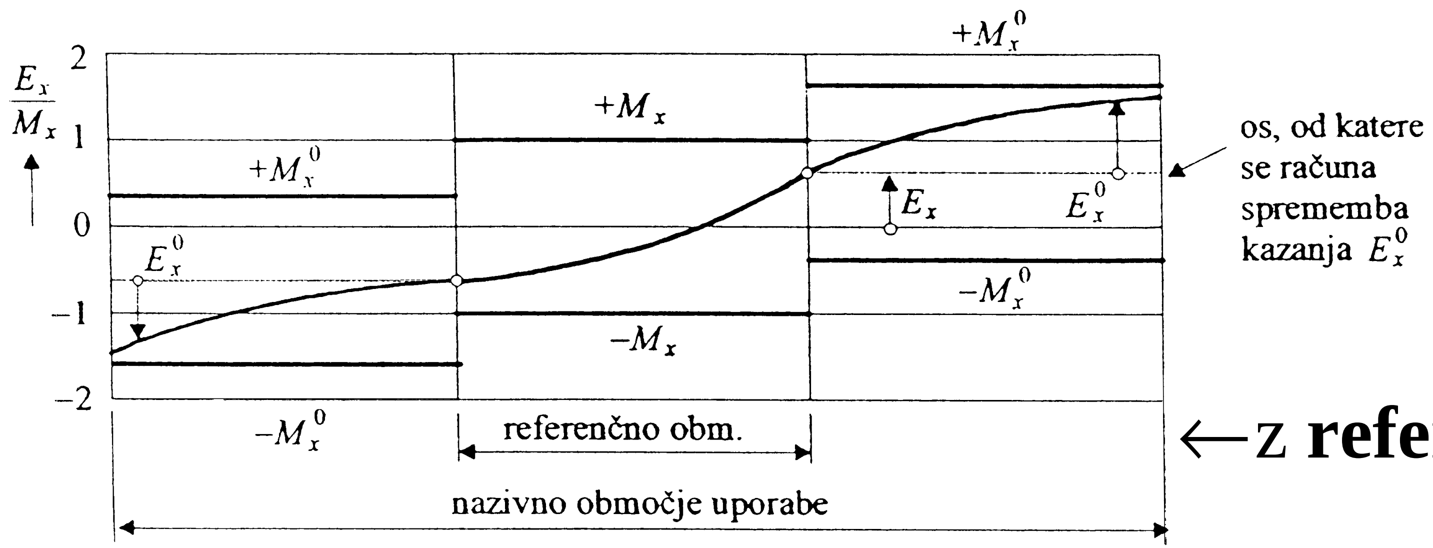
$$M_x^0 = a\% M_x \quad \text{-} \quad \text{delež meje lastnega pogreška } (a = 100)$$

Meja spremembe kazanja je določena na dva načina:

- z **referenčno vrednostjo**,
- z **referenčnim območjem**.



←z referenčno vrednostjo



←z referenčnim območjem

Slika 3.8 Meja pogreška in meja spremembe kazanja ($a = 100$)

Meja spremembe kazanja je praviloma **odvisna od oddaljenosti** od referenčnih pogojev.

Primer:

- voltmeter ima od $\underline{0^\circ\mathrm{C}}$ do $\underline{20^\circ\mathrm{C}}$ in od $\underline{30^\circ\mathrm{C}}$ do $\underline{50^\circ\mathrm{C}}$ **temperaturni koeficient** : $\pm\left(0{,}03\%\,U_{\mathrm{i}} + 0{,}05\%\,U_{\mathrm{D}}\right)/{}^\circ\mathrm{C}$

  $U_{\mathrm{i}} = 123{,}4\,\mathrm{V};\ \ U_{\mathrm{D}} = 200\,\mathrm{V}$ pri temperaturi: $t = 5^\circ\mathrm{C}$

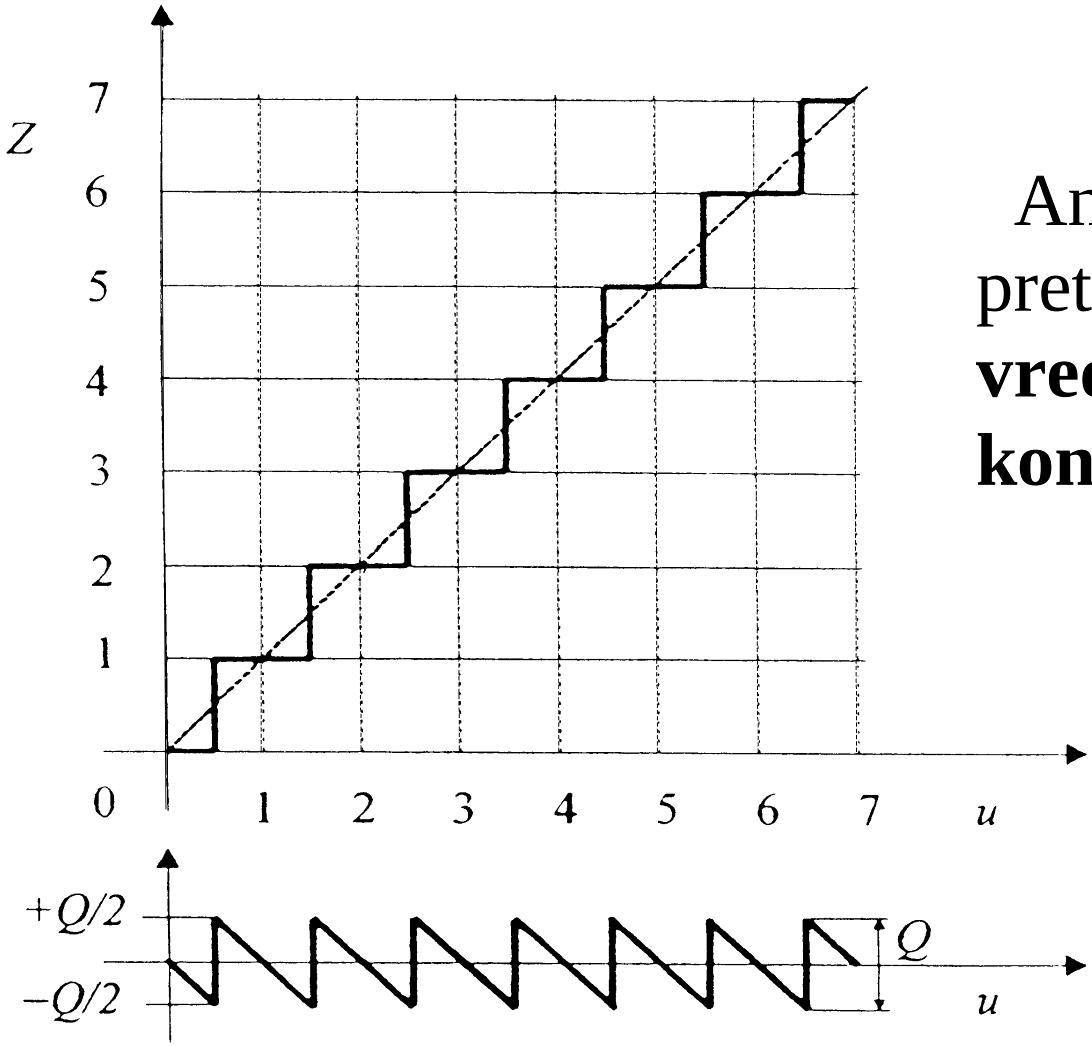
  - meja spremembe kazanja:

$$M_U^0 = \pm\left(\frac{0{,}03}{100}123{,}4\,\mathrm{V} + \frac{0{,}05}{100}200\,\mathrm{V}\right)\left(5^\circ\mathrm{C} - 20^\circ\mathrm{C}\right)/{}^\circ\mathrm{C} = \pm 2{,}06\,\mathrm{V}$$

V referenčnih pogojih (npr.: od $20^\circ\mathrm{C}$ do $30^\circ\mathrm{C}$) nas zanima **meja pogreška** M_x, **zunaj** pa tudi **meja spremembe kazanja**.

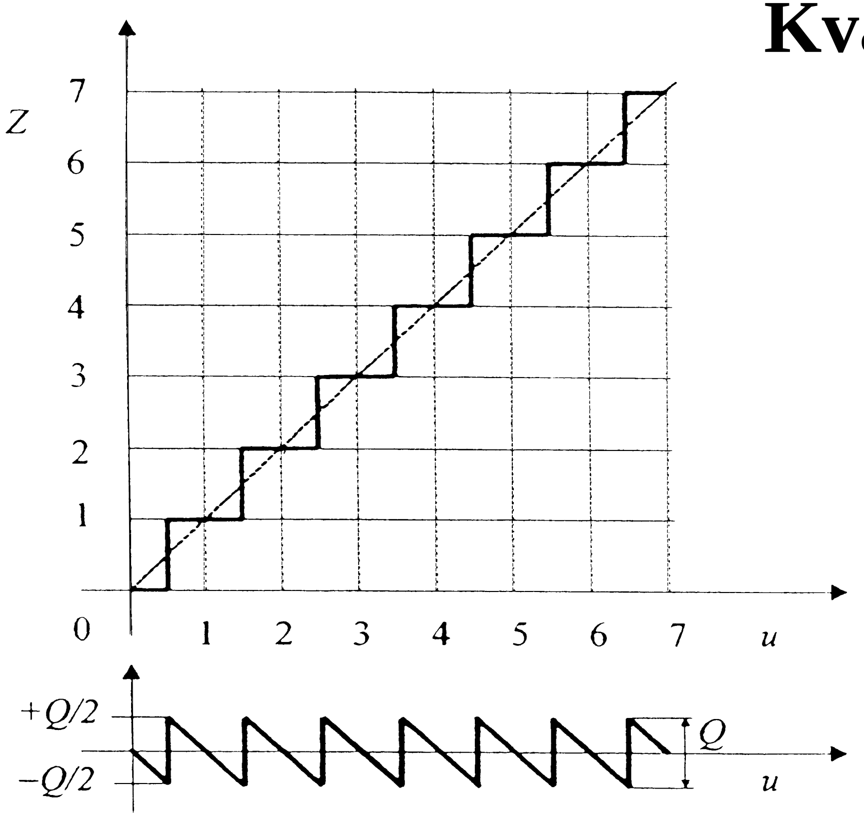
$$M_x^0 = a\,\%\,M_x$$

Mejni kvantizacijski pogrešek digitalnih instrumentov



Analogno-digitalni pretvornik pretvori **neskončno število vrednosti** zveznega signala **v končno število** diskretnih.

Slika 3.9 Kvantizacijska karakteristika in kvantizacijski pogrešek



Kvantizacijska karakteristika:

- korak Q je **ločljivost** digitalnega merilnega instrumenta.
- **pogrešek kvantizacije** je v mejah $-Q/2$ in $+Q/2$,
- **mejni kvantizacijski pogrešek**: $\pm Q/2$

Primer: - voltmeter: $U_{\mathrm{D}} = 2\,\mathrm{V}$; $4\frac{1}{2}$ - mestni prikazovalnik

$U_{\mathrm{i}} = 1{,}2040\,\mathrm{V}$;

$\Rightarrow$ ločljivost $100\,\mu\mathrm{V}$;

mejni kvantizacijski pogrešek $\pm 50\,\mu\mathrm{V}$

Mejni pogrešek odčitavanja analognih instrumentov

Pri analognih instrumentih **moramo sami** določiti številsko vrednost (**kvantizirati**).

- izhodna veličina instrumenta je dolžina l (položaj kazalca,
- **človeško oko loči** spremembe ene kotne **minute**,
  - pri razdalji $25\,\mathrm{cm}$ ustreza to $\Delta l \approx 0{,}07\,\mathrm{mm}$,
- ločljivost analognega instrumenta (+človek):

$$\Delta G = \Delta l / S \qquad S = \Delta l / \Delta G \text{ - občutljivost}$$

- pogrešek odčitavanja je **porazdeljen z enako verjetnostjo** od $-\Delta G/2$ do $+\Delta G/2$,
  - **mejni pogrešek odčitavanja** je $\pm\Delta G/2$

Primer: Če moremo odčitati vrednosti:

$$...52{,}6\,\text{mA},\ 52{,}7\,\text{mA},\ 52{,}8\,\text{mA},\ 52{,}9\,\text{mA},\ ...$$

$\Rightarrow$ - ločljivost je: $0{,}1\,\text{mA}$

- mejni pogrešek odčitavanja: $\pm 0{,}05\,\text{mA}$

Odčitajmo vedno vsa mesta, ki jih omogoča skala instrumenta

in:

- **ne** podajajmo številske vrednost **bolj natančno**, **kot je ločljivost** instrumenta – **ni možno dokazati**!