



3.4 Merilna negotovost

Merilna negotovost je **parameter**, ki **pripada merilnemu rezultatu**.

- Označuje **razpršenost** vrednosti, ki jih je mogoče **z določeno verjetnostjo** pripisati merjeni veličini.
 - Navaja **kakovost** merilnega rezultata: **manjša** kot je, **bolj kakovosten** je merilni rezultat.
- Če izhaja **iz niza neodvisnih opazovanj** (posledično iz **gostote verjetnosti**), govorimo **negotovosti tipa A** - u_A ;
- Če **ne izhaja iz niza neodvisnih opazovanj** (npr.: izhaja iz **domnevne gostote verjetnosti** pri eni meritvi), govorimo o **negotovosti tipa B** - u_B





Skupna negotovost je enaka geometrijski vsoti:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Ker je negotovost določena s **standardnim odklonom**, jo imenujemo tudi **standardna negotovost**.

Če želimo imeti **večjo verjetnost** (večjo stopnjo zaupanja), da leži resnična vrednost v **območju**, ki ga določa negotovost, uporabljamo **razširjeno negotovost** U .





Standardna negotovost tipa A - u_A

Če imamo niz izmerkov x_1, x_2, \dots, x_n , izmerjenih pod 'enakimi' pogoji, je:

- **aritmetična sredina** $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j}$
 - je najbolj verjetna vrednost ali **najboljša ocena** aritmetične sredine μ **celotne populacije**.

- **eksperimentalni standardni odklon** $s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1}}$
 - je **najboljša ocena standardnega odklona populacije** σ





- **eksperimentalni standardni odklon aritmetične sredine**

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

- je najbolj verjetna vrednost $\sigma(\bar{x})$ populacije

Ker imamo **ponovljena neodvisna opazovanja**, je **standardna negotovost tipa A** - eksperimentalni standardni odklon aritmetične sredine:

$$u_A(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = s(\bar{x})$$





Če nam je znan **združen** eksperimentalni standardni odklon

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2(x) + (n_2 - 1)s_2^2(x) + \dots + (n_r - 1)s_r^2(x)}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_r - 1)}}$$

je **standardno negotovost** bolje oceniti z:

$$u_A(x) = \frac{s_p(x)}{\sqrt{n}}$$

Vedno je potrebno v rezultatu navesti **število meritev** oz.

število prostostnih stopenj: $v = \sum_{i=1}^r (n_i - 1) = \sum_{i=1}^r v_i$





Standardna negotovost tipa B - u_B

Kadar merilni rezultat **ne izhaja iz ponovljenih meritev**, se standardna negotovost izračuna na osnovi domneve (znanstveno in z izkušnjami) – **predpostavljene porazdelitve**:

- enakomerna,
- Gaussova,
- trikotna,
- Studentova, itn.
- trapezna,

Pri **eni meritvi** se standardna **negotovost tipa B** izračuna na osnovi:

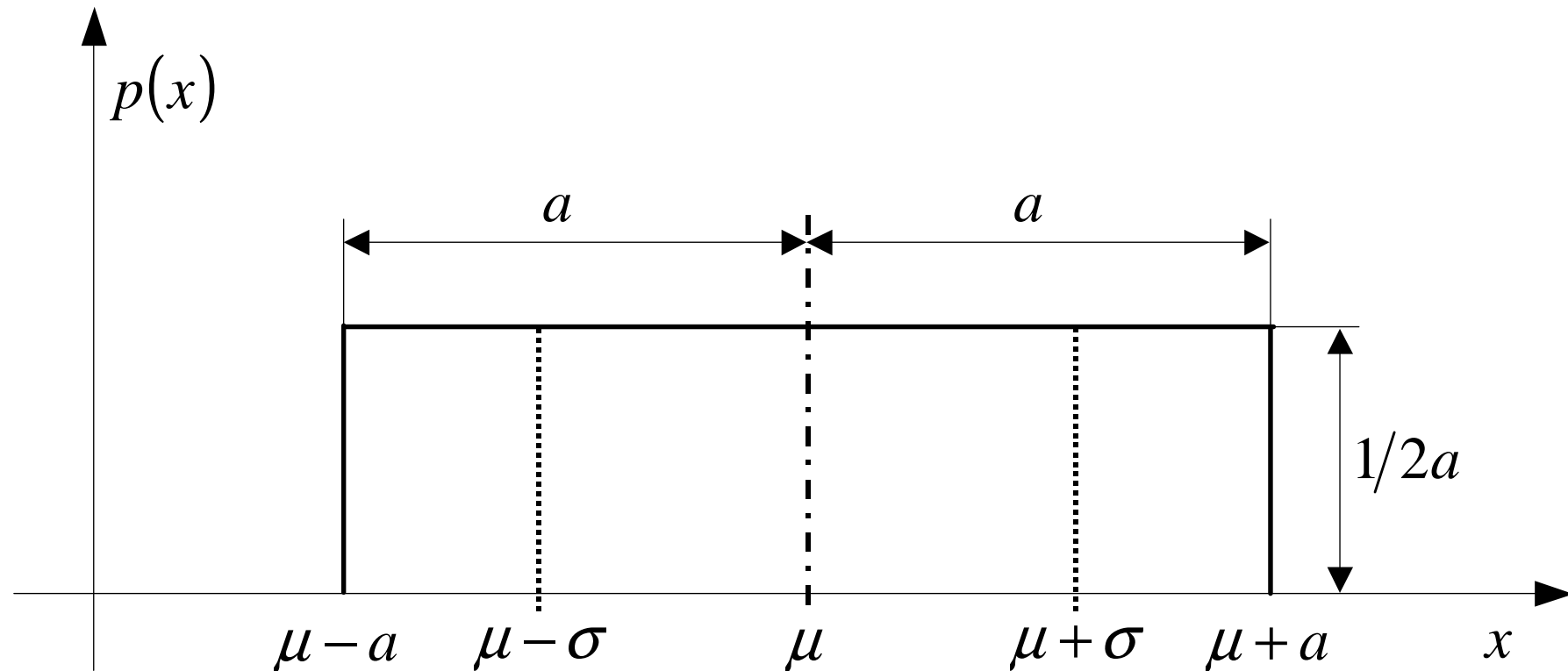
- **specifikacij** merilne opreme,
- podatkih o **umerjanju** meril,
- **toleranc** uporabljenih merilnih sredstev itn.





Enakomerna (pravokotna) porazdelitev

- Vse vrednosti veličine med spodnjo in zgornjo mejo so enako verjetne:

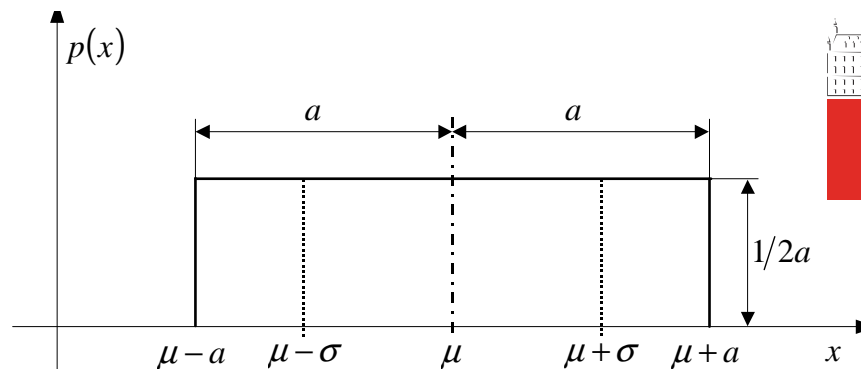


Slika 3.10 Enakomerna (pravokotna) porazdelitev (**gostota verjetnosti** je v mejah **enakomerna** $p(x) = 1/2a$)





- **aritmetična sredina**
(prvi vztrajnostni moment):



$$\int_{\mu-a}^{\mu+a} p(x) x dx = \frac{1}{2a} \frac{x^2}{2} \Big|_{\mu-a}^{\mu+a} = \frac{1}{2a} \frac{(\mu+a)^2 - (\mu-a)^2}{2} = \mu$$

- **varianca** (drugi vztrajnostni moment):

$$\int_{\mu-a}^{\mu+a} p(x) (x - \mu)^2 dx = \frac{1}{2a} \frac{(x - \mu)^3}{3} \Big|_{\mu-a}^{\mu+a} = \frac{1}{2a} \frac{(+a)^3 - (-a)^3}{3} = \frac{a^2}{3}$$

- **standardna negotovost** (tudi standardni odklon) pri enakomerni porazdelitvi:

$$u(x) = \sigma = \frac{a}{\sqrt{3}} \approx 0,58a$$

- med $\mu - \sigma$ in $\mu + \sigma$ ca. 58% ($1/\sqrt{3}$) vseh vrednosti





Primer enakomerne porazdelitve je, kadar je podana **mejna vrednost lastnega pogreška** $a = M$.

Zgled:

- Digitalni voltmeter: $M_U = \pm(0,05\%U_i + 3\text{dig})$
 - po določenem času kaže $U_i = 56,183\text{ V}$:

- mejna vrednost pogreška:

$$M_U = \pm(5 \cdot 10^{-4} \cdot 56,183\text{ V} + 3 \cdot 0,001\text{ V}) = \pm 31\text{ mV}$$

- standardna negotovost:

$$u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{31\text{ mV}}{\sqrt{3}} = 18\text{ mV}$$

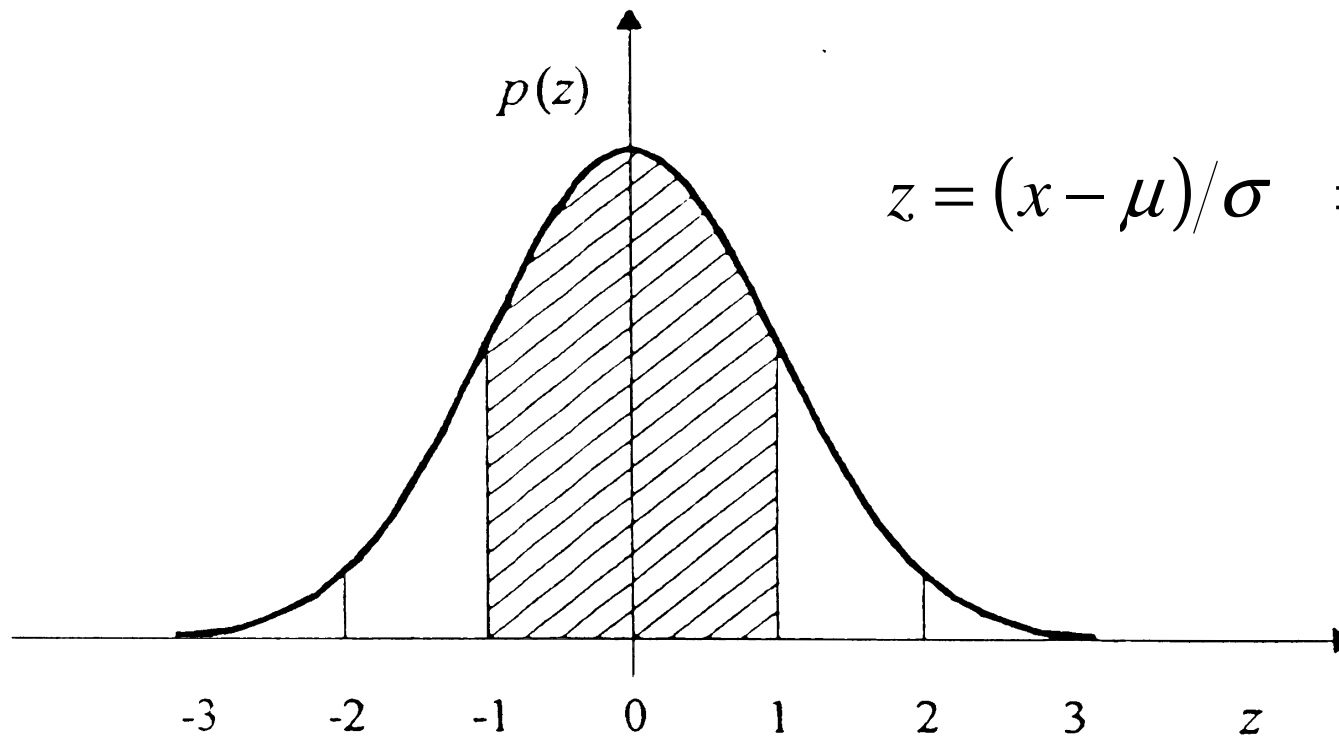
- popolni merilni rezultat:

$$U = 56,183\text{ V}, \quad u(U) = 18\text{ mV}, \quad n = 1 \text{ (ena meritev)}$$





Gaussova ali normalna porazdelitev



$$z = (x - \mu) / \sigma \Rightarrow p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

- interval zaupanja: $\mu - z\sigma/\sqrt{n} \dots \mu + z\sigma/\sqrt{n}$
- **standardna negotovost:** $u(x) = \sigma/\sqrt{n}$
- $z = ?$ dobimo ga iz stopnje zaupanja p (tabela)





Zgled:

- **Uporovni etalon:**

- nazivna vrednost: 10Ω
- iz certifikata za upornost: $10,000742\Omega \pm 129\mu\Omega$,
- $U_R = 129\mu\Omega$ - **razširjena negotovost**
- stopnja zaupanja $p = 99\% \Rightarrow z = 2,58$
- **standardna negotovost:**

$$u(R) = \frac{z \sigma / \sqrt{n}}{z} = \frac{129\mu\Omega}{2,58} = 50\mu\Omega$$





Studentova ali t-porazdelitev

- interval zaupanja: $\mu - t s(x)/\sqrt{n} \quad \dots \quad \mu + t s(x)/\sqrt{n}$
- **standardna negotovost:** $u(x) = s(x)/\sqrt{n}$
- parameter $t = ?$
 - dobimo ga iz stopnje zaupanja p in števila meritev (tabela)

Zgled: Upor za uporovni delilnik:

- 8-krat ponovljena meritev in 95% stopnji zaupanja:
 $\Rightarrow t = 2,36$
- pri 95% stopnji zaupanja je rezultat: $1492\Omega \pm 12\Omega$
- standardna negotovost: $u(R) = \frac{t s(x)/\sqrt{n}}{t} = \frac{12\Omega}{2,36} = 5\Omega$

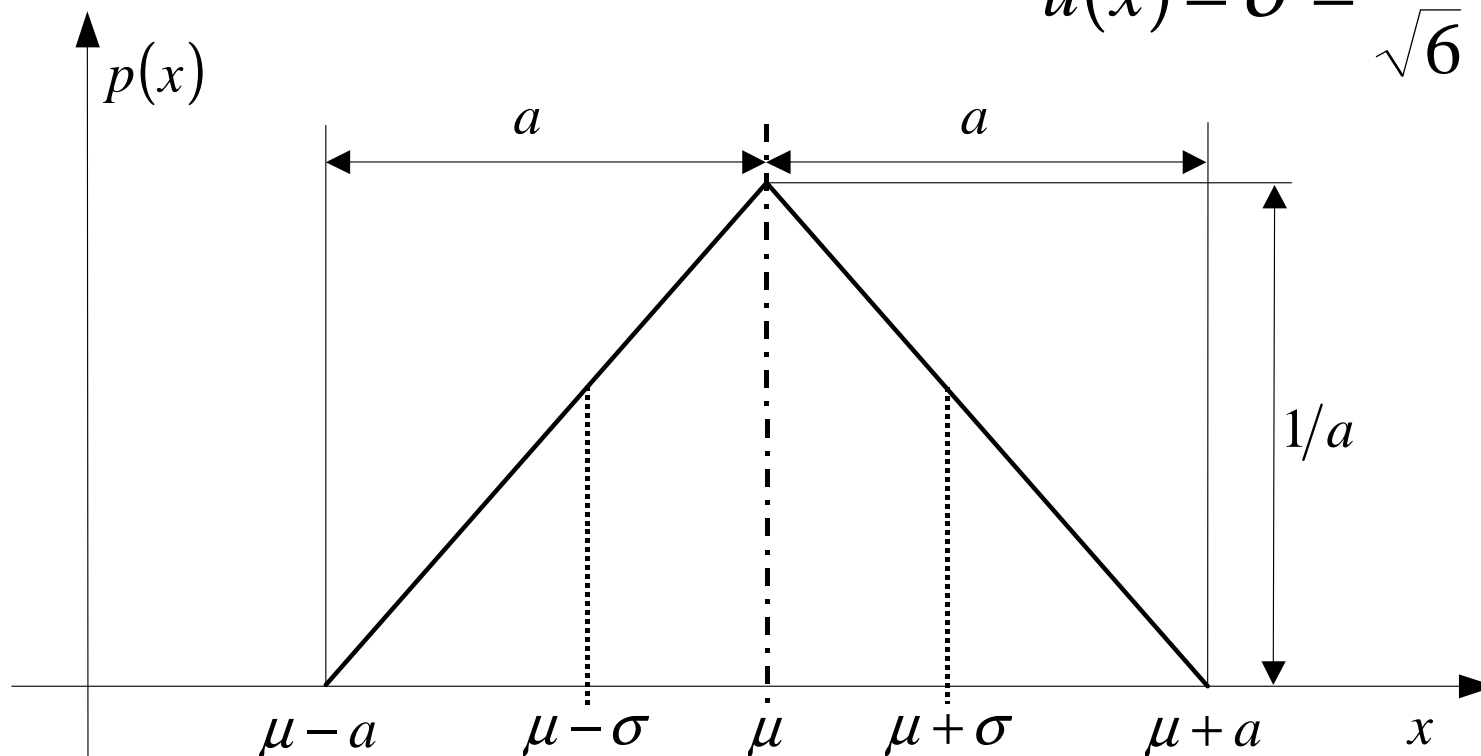




- aritmetična sredina: μ
- standardna negotovost:

$$u(x) = \sigma = \frac{a}{\sqrt{6}} \approx 0,41a$$

Trikotna porazdelitev



Slika 3.11 Trikotna porazdelitev

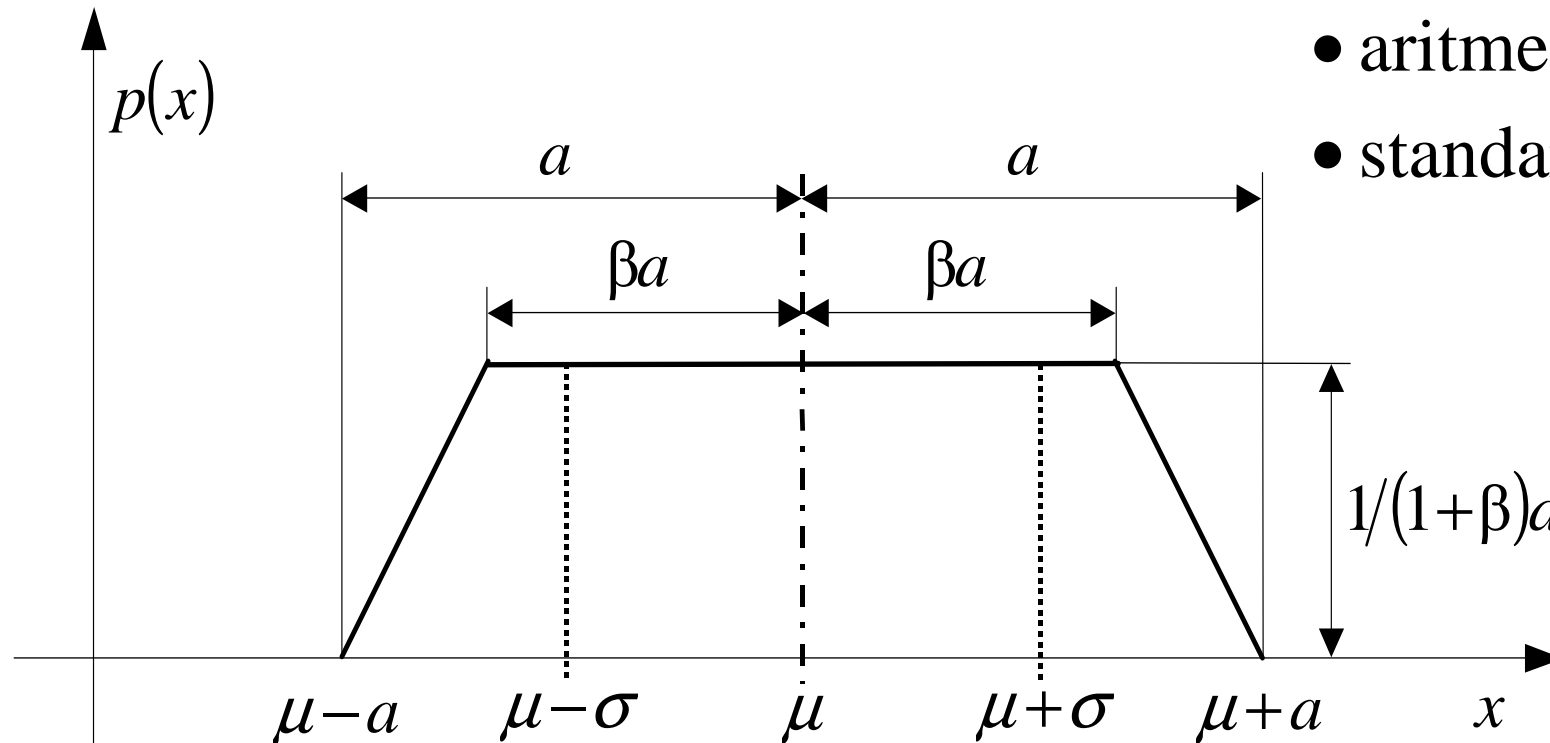
- Med $\mu - \sigma$ in $\mu + \sigma$ ca. 65% vseh vrednosti - že blizu normalne porazdelitve (68%).





Trapezna porazdelitev

Trapezna porazdelitev je konvolucija dveh enakomernih porazdelitev z mejama $\pm (1 + \beta)a/2$ in $\pm (1 - \beta)a/2$



- aritmetična sredina: μ
- standardna negotovost

$$u(x) = \frac{a\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{6}}$$

Slika 3.12 Trapezna porazdelitev

$\beta = 0 \rightarrow$ trikotna porazdelitev, $\beta = 1 \rightarrow$ enakomerna porazdelitev





Standardna negotovost izhodne veličine - $u_c(y)$

Izhodna (merjena) veličina je funkcija N vhodnih veličin:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

- Za oceno **celotne standardne negotovosti** $u_c(y)$ (combined standard uncertainty) potrebujemo dober matematični model;
- Izmerjena vrednost y je le ocena izhodne veličine Y na podlagi ocen vhodnih veličin in funkcijske povezave:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

- korekcija sistematičnih pogreškov,
- pri **eni** meritvi je x_1 kar ocena X_1 ,
- pri **ponavljanju** pa je \bar{x} ocena veličine X_1 .





Vhodne veličine so lahko:

- medsebojno **neodvisne** (pogosto);
- ali medsebojno **odvisne**.

Vhodne veličine so medsebojno neodvisne

Po razvoju enačbe $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ v Taylorjevo vrsto in upoštevanju le členov prvega reda, dobimo **celotno negotovost**:

$$u_c(y) = \sqrt{[c_1 u(x_1)]^2 + [c_2 u(x_2)]^2 + \dots + [c_N u(x_N)]^2}$$

ali
$$u_c(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y) + \dots + u_N^2(y)}$$

- pri čemer so: $u_1(y) = |c_1|u(x_1), \dots, u_N(y) = |c_N|u(x_N)$

deleži zaradi negotovosti vhodnih veličin;

- $c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, c_N = \frac{\partial y}{\partial x_N}$ - koeficienti občutljivosti





Zgled-1: $y = x_1 + x_2$

- Koeficienta občutljivosti: $c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 1, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1;$
- Celotna standardna negotovost: $u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$

Zgled-2: $y = \frac{x_1}{x_2}$

- Koeficienta občutljivosti: $c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2};$
- Prispevka k celotni standardni negotovosti:

$$u_1(y) = |c_1|u(x_1) = \left| \frac{1}{x_2} \right| u(x_1), \quad u_2(y) = |c_2|u(x_2) = \left| -\frac{x_1}{x_2^2} \right| u(x_2)$$





- Celotna standardna negotovost:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(\frac{1}{x_2} u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2^2} u(x_2)\right)^2}$$

- Relativna oblika celotne standardne negotovosti:

$$\frac{u_c(y)}{y} = w_c(y) = \sqrt{w^2(x_1) + w^2(x_2)}$$





Vhodne veličine so medsebojno odvisne - korelirane

Odvisnost se nanaša na **naključne** spremenljivke.

Merilo za medsebojno odvisnost dveh naključnih spremenljivk je (ocenjena) kovarianca.

- Pri n neodvisnih parih sočasnih izmerkov vhodnih veličin x_1 in x_2 je **kovarianca**:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_{1,i} - \bar{x}_1)(x_{2,i} - \bar{x}_2)$$

- relativna medsebojna odvisnost je podana s **koeficientom korelacije** r :

$$r = \frac{u(x_1, x_2)}{u(x_1)u(x_2)}$$





Celotna standardna negotovost je:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

$r(x_i, x_j)$ - koeficient korelacije med -1 in $+1$

Zgled-1: $y = x_1 - x_2$

- Koeficienta občutljivosti: $c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 1$, $c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = -1$;
- Celotna standardna negotovost:

$$u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + 2(1)(-1)r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)}$$





$$u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + 2(1)(-1)r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)}$$

- če $r(x_1, x_2) = +1$: $u_c(y) = u(x_1) - u(x_2)$
- če $r(x_1, x_2) = -1$: $u_c(y) = u(x_1) + u(x_2)$
- če $r(x_1, x_2) = 0$: $u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$





Razširjena negotovost - U

Če želimo podati interval z večjo stopnjo zaupanja ($p = 95\%$ ali $p = 99\%$) uporabljamo **razširjeno negotovost**:

$$U = k u_c(y)$$

- s **faktorjem razširitve k** pomnožena (celotna) standardna negotovost,
- popolni merilni rezultat je sedaj: $Y = y \pm U$





Povezava med faktorjem razširitve k in stopnjo zaupanja p **ni enoznačna**.

- Odvisna od **porazdelitve** izhodne veličine.

Kot **prvi približek** se uporablja kar **normalna porazdelitev** ($k = z$).

Pri **manjšem številu** meritev je bolje uporabiti **t -porazdelitev**, ki ima ν_{eff} **efektivnih stopenj prostosti**:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/\nu_i} \quad (\text{zaokrožimo navzdol}) \rightarrow t \text{ dobimo iz tabele}$$

- velja $\nu_{\text{eff}} \leq \sum_{i=1}^N \nu_i$





Kadar želimo poudariti stopnjo zaupanja p , napišemo:

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(v_{\text{eff}}) u_c(y)$$

- U_{95} pomeni razširjeno negotovost s stopnjo zaupanja 95%

Zgled:

- U smo merili 10-krat: $\bar{U} = 120,51 \text{ V}$ in $s(U) = 0,79 \text{ V}$,
- R smo merili 5-krat: $\bar{R} = 15,643 \text{ k}\Omega$ in $s(R) = 0,084 \text{ k}\Omega$,
- $u_c(P) = ?$, $U_c(P) = ?$ pri $p = 99\%$!
 - moč na upor: $P = \frac{U^2}{R} = \frac{(120,51 \text{ V})^2}{15,643 \text{ k}\Omega} = 928,381 \text{ mW}$





- celotna standardna negotovost:

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)}$$

- prispevka k celotni negotovosti:

$$u_1(P) = |c_1| u(U) = \frac{2U}{R} \frac{s(U)}{\sqrt{n_1}} = \frac{2 \cdot 120,51 \text{ V}}{15,643 \text{ k}\Omega} \frac{0,79 \text{ V}}{\sqrt{10}} = 3,85 \text{ mW}$$

$$u_2(P) = |c_2| u(R) = \frac{U^2}{R^2} \frac{s(R)}{\sqrt{n_2}} = \frac{(120,51 \text{ V})^2}{(15,643 \text{ k}\Omega)^2} \frac{0,084 \text{ k}\Omega}{\sqrt{5}} = 2,23 \text{ mW}$$

- celotna standardna negotovost:

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)} = \sqrt{(3,85 \text{ mW})^2 + (2,23 \text{ mW})^2} = 4,45 \text{ mW}$$





$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)} = \sqrt{(3,85 \text{ mW})^2 + (2,23 \text{ mW})^2} = 4,45 \text{ mW}$$

- število efektivnih stopenj prostosti:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i} = \frac{(4,45 \text{ mW})^4}{(3,85 \text{ mW})^4/9 + (2,23 \text{ mW})^4/4} = 12,8$$

$$v_{\text{eff}} = 12,8 \rightarrow 12 \rightarrow t_p(v) = t_{99}(12) = 3,05$$

- razširjena negotovost:

$$U_{99} = k_{99} u_c(P) = t_{99}(12) u_c(P) = 3,05 \cdot 4,45 \text{ mW} = 13,6 \text{ mW}$$





- popolni merilni rezultat s **standardno** negotov.:

$$P = 928,4 \text{ mW}, \quad u_c(P) = 4,5 \text{ mW}, \quad v_{\text{eff}} = 12$$

- sama celotna standardna negotovost še ne omogoča sklepanja o stopnji zaupanja!

- popolni merilni rezultat z **razširjeno negotovostjo**:

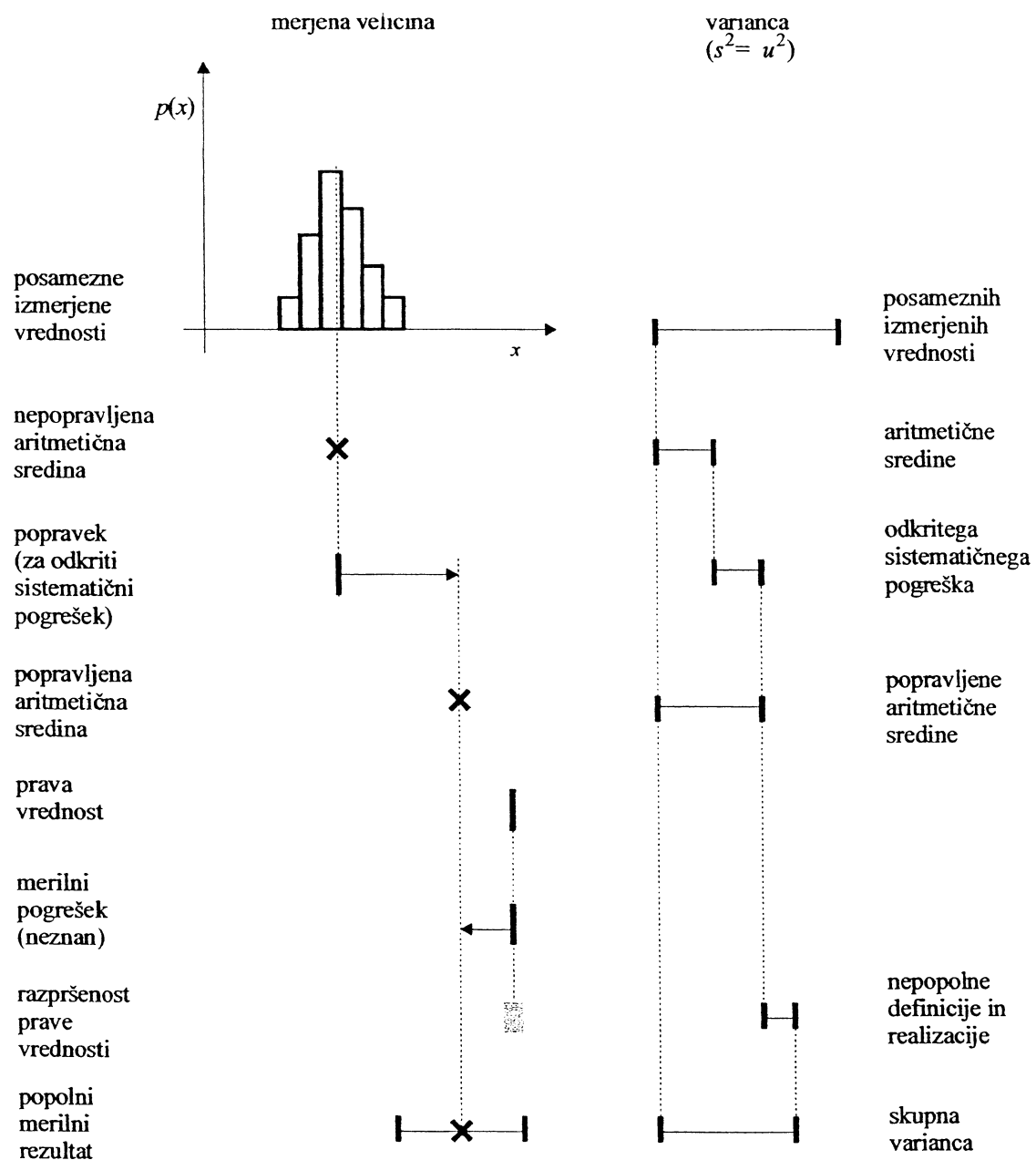
$$P = 928 \text{ mW} \pm 14 \text{ mW}, \quad k = 3,05, \quad v_{\text{eff}} = 12, \quad p = 99\%$$

ali

$$P = 928(1 \pm 1,5 \cdot 10^{-2}) \text{ mW},$$

$$k = 3,05, \quad v_{\text{eff}} = 12, \quad p = 99\%$$





Slika 3.13 Prikaz odnosov med izmerjenimi vrednostmi, pogreški in negotovostmi

