Izpit iz numeričnih metod

4. 2. 1999

1. Naj bo A kvadratna 5-diagonalna matrika reda $n \times n$. To pomeni, da ima od nič različne elemente le na diagonali in na 2 zgornjih obdiagonalah ter na 2 spodnjih obdiagonalah. Predpostavimo še, da je matrika A strogo diagonalno dominantna, torej

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

   Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   je primer take matrike reda 5×5, ki ustreza zgornjim pogojem.
   Znano je, da za matrike z omenjenimi lastnostmi obstaja LU razcep in ga lahko izvedemo brez pivotiranja. Napiši program, ki izračuna LU razcep take matrike.

2. Naj bo $f(x)$ zvezna funkcija na $[a, b]$, ki ima na tem intervalu vsaj eno ničlo. Posploši metodo bisekcije na naslednji način: interval razdeli na 3 enako dolge podintervale, poišči tistega, na katerem je ničla, in postopek nadaljuj. Tej metodi rečemo `trisekcija`.
   Napiši program v `Matlabu`, ki s trisekcijo poišče ničlo funkcije $f(x)$ na danem intervalu $[a, b]$ na m mest natančno. Primerjaj število potrebnih izračunov funkcijske vrednosti $f(x)$ pri bisekciji in trisekciji.

3. Enačba

$$x^3 - 5x + 1 = 0$$

   ima tri realne korene na intervalih $(-3, -2)$, $(0, 1)$ in $(2, 3)$. Zapišemo jo v obliki

$$x = (1 + x^3)/5 \tag{1}$$

   in poskušamo poiskati vse tri ničle s pomočjo iteracije

$$x_{n+1} = (1 + x_n^3)/5 \quad n \in \mathbb{N},$$

   kjer izberemo začetni približek x_0 znotraj posameznega intervala. Ugotovi, katero od treh zaporedij bo konvergiralo k ničli na intervalu, kjer smo izbrali začetni približek. V primeru da zaporedje ne konvergira, preuredi enačbo (1) tako, da bo ustrezno zaporedje konvergiralo.