Izpit iz Numeričnih metod

17. februar 2012

(1) Poišči točno rešitev diferencialne enačbe. Glej pomoč.[1]

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2}t\, y, \quad y(0) = 1.$$

Prepričaj se, da je rešitev definirana povsod, zavzame samo pozitivne vrednosti in teži k 0, ko gre $t \to \infty$. S pomočjo Eulerjeve metode s korakom $h = 1/2$, poišči približno rešitev te diferencialne enačbe. Rešitev, ki jo dobimo ni stalno pozitivna. Po katerem koraku, (za kateri n,) postane vrednost y_n prvič negativna?

Rešitev:
Točna rešitev: $\dfrac{dy}{y} = -\sqrt{2}t \to, \; y(t) = Ce^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2}$,
ker je $y(0) = 1$ je $C = 1$.
Numerična rešitev: $y_0 = 1$, $t_n = n\,h$ in $h = 1/2$,
$y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n) \to y_{n+1} = y_n - h\sqrt{2}t_n y_n \to$
$y_{n+1} = y_n(1 - \sqrt{2}h^2 n) \to 1 - \sqrt{2}h^2 n < 0 \to \sqrt{2}h^2 n > 1 \to$
$n > 4/\sqrt{2} \to n > 2.$

(2) Prepričaj se, da je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna in jo razcepi po Choleskyju.

Rešitev:
Matrika je pozitivno definitna, če so determinante glavnih minorjev pozitivne, $|A| = 3$, $|1| = 1$ in $|4| = 4$. $A = Q^T Q$, kjer je Q zgornjetrikotna matrika.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 + \gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Od tod je $\alpha = 2$, $\beta = 1/2$ in $\gamma = \sqrt{3}/2$.

[1] Pomoč: enačba je z ločljivima spremenljivkama.

(3) Sestavi kvadraturno formulo za integrale oblike

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}\,dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(\xi)$$

tako, da bo točna za
$f(x) = p_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2$.
Glej pomoč.[2] Izračunaj približno vrednost integralov:

(a) $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x+1}\, e^{-x}\,dx$ in

(b) $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx$.

Točna vrednost prvega integrala je $I_1 = 1.37894$ medtem, ko je $I_2 = 0.886227$. Izračunaj relativno napako v obeh primerih. Poizkusi razložiti, zakaj je v prvem primeru napaka mnogo manjša, kot v drugem.

Rešitev:

$$\int_0^\infty p_n(x)e^{-x}\,dx = w_1 p_n(0) + w_2 p_n(\xi),$$

ker je $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ in $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$, dobimo sistem enačb

$$1 = w_1 + w_2, \quad 1 = w_2\xi \quad \text{in} \quad 2 = w_2\xi^2.$$

Od tod je $w_1 = w_2 = 1/2$, $\xi = 2$, $\hat{I}_1 = 1/2 + \sqrt{3}/2 = 1.366$ in $\hat{I}_2 = \sqrt{2}/2 = 0.711$. Relativna napaka $|\hat{I} - I|/I$ je, v prvem primeru enaka 0.0093656, v drugem primeru, pa je enaka 0.20212. Razvoj funkcije $\sqrt{x+1}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0 je

$$\sqrt{x+1} = 1 + 1/2\,x - 3/4\,x^2 + \dots,$$

kar pomeni, da se funkcija "dobro aproksimira" s polinomom v okolici točke nič, medtem ko se funkcijo $\sqrt{x}$ ne da razviti v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0. Odvod v točki nič gre preko vseh meja.

[2]Pomoč: $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = 2$