Izpit iz Numeričnih metod

18. junij 2008

1. Sestavite formulo za približno računanje integralov oblike:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{f(x)\,dx}{x^{3/4}} \approx \omega f(\xi)$$

kjer je $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{6}$. Formula naj bo točna za konstanto in polinom prve stopnje. Po gornji formuli izračunaj približno vrednost integrala:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)\,dx}{x^{3/4}}$$

Rešitev:

Najprej določimo utež ω in vozel ξ tako, da bo formula točna za $f(x) = 1, x$:

$$f(x) = 1 \quad : \quad \omega = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{x^{3/4}}\,dx = 4x^{1/4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt[4]{\frac{\pi}{6}}$$

$$f(x) = x \quad : \quad \omega\xi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x}{x^{3/4}}\,dx = \frac{4}{5}x^{5/4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{5}\sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}$$

Sledi:

$$\omega = 4\sqrt[4]{\frac{\pi}{6}} = 3.40259, \quad \xi = \frac{\pi}{30} = 0.10472$$

Izračunamo integral:

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)\,dx}{x^{3/4}} = 4\sqrt[4]{\frac{\pi}{6}} \cos\frac{\pi}{30} = 3.38395$$

Za primerjavo: točna vrednost integrala je 3.35106.

2. Poišči rešitev $A\,x \approx B$ v smislu najmanjših kvadratov.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev:
Rešujemo normalni sistem $A^TAx = A^TB$, ki ima rešitev $x = (A^TA)^{-1}A^TB$.

$$\begin{aligned} A^TA &= \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \\ (A^TA)^{-1} &= \frac{1}{59}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 18 \end{bmatrix} \\ A^TB &= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sledi:

$$x = \frac{1}{59}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/59 \\ 30/59 \end{bmatrix}$$

3. Zapiši iteracijsko shemo Newtonove metode za reševanje sistema nelinearnih enačb:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x + y = -\frac{1}{2}$$

Naredi en korak metode, če je začetni približek $[x, y] = [1/2, 3/2]$.

Rešitev:
Iščemo presečišča krožnice in premice, ki se sekata v dveh točkah: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$, $y_1 = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$ in $x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, $y_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$.
Iteracijska shema se glasi:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - J^{-1}(x_n, y_n)\begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

Imamo $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ in $g(x, y) = x + y + \frac{1}{2}$, zato je Jacobijeva matrika enaka

$$J = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Računamo en korak za $x_0 = 1/2$, $y_0 = 3/2$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - J^{-1}(x_0, y_0)\begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5/2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$