IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD
21. junij 2013

1. Zapišite tri korake sekantne metode za enačbo
$$x + \frac{x^3+3}{2} = 0,$$
kjer za začetna približka vzamete $x_0 = -3$ in $x_1 = -2$.

Rešitev: Korak sekantne metode je
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$
kjer je $f(x) = x + \frac{x^3+3}{2}$. Dobimo
$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = -1.5714, \\ x_3 &= x_2 - f(x_2) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = -1.5714, \\ x_4 &= x_3 - f(x_3) \cdot \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} = -1.5714. \end{aligned}$$

2. Izračunajte integral
$$\int_{-2}^{1} 2x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$
z uporabo trapezne in Simpsonove tretjinske formule za $n = 6$. Rezultate primerjajte s točno vrednostjo integrala (per partes).

Rešitev: Ker je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$ in $f(x) = 2x\mathrm{e}^x$, dobimo s trapezno metodo
$$I_t = \frac{h}{2}\left(f(-2) + 2f(-3/2) + 2f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)\right) = 1.04233,$$
s Simpsonovo tretjinsko metodo pa
$$I_s = \frac{h}{3}\left(f(-2) + 4f(-3/2) + 2f(-1) + 4f(-1/2) + 2f(0) + 4f(1/2) + f(1)\right) = 0.819151.$$
Točna vrednost integrala je
$$I = \int_{-2}^{1} 2x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = 2x\mathrm{e}^x\Big|_{-2}^{1} - 2\int_{-2}^{1} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = 2x\mathrm{e}^x\Big|_{-2}^{1} - 2\mathrm{e}^x\Big|_{-2}^{1} = 6\mathrm{e}^{-2} = 0.812012.$$

3. Rešite robni problem
$$y''(x) = -2x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$
kjer interval $[0, 1]$ razdelite na $n = 4$ enako dolge podintervale. Ali lahko gornji sistem enačb rešimo z Gauss-Seidlovo iteracijo?

Rešitev: Dobimo sistem treh enačb
$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = -2x_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$
kjer je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$, $y_0 = 0$ in $y_4 = 2$. Sistem ima rešitev $y_1 = \frac{37}{64}$, $y_2 = \frac{9}{8}$ in $y_3 = \frac{103}{64}$. Sistem lahko rešimo z Gauss-Seidlovo iteracijo, saj je diagonalno dominanten, ni pa strogo diagonalno dominanten.