Rešene izpitne naloge iz numeričnih metod 2000-2007

1 Iterativno reševanje nelinearnih enačb

1. Poišči rešitev enačbe $x = F(x)$, kjer je

$$F(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + 3),$$

s pomočjo Newtonove iteracije. Izberi začetni približek $x_0 = 1$. Ali lahko dobimo to rešitev tudi s pomocjo iteracije

$$x_{n+1} = F(x_n) \tag{1}$$

s primerno izbrnanim začenim približkom?

Rešitev: Newtonova iteracija za enačbo $F(x) - x = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x) - x}{F'(x) - 1}$$

Izberimo začetni približek $x_0 = 1$ in dobimo:

$$\begin{pmatrix} x_n: & 1.000 & -0.200 & -1.423 & -1.085 & -1.004 & -1.000 \end{pmatrix}$$

Gornja iteracija (1) ne konvergira k $x = -1$, ker je $F'(x) = -\frac{3}{2}x^2$ v točki $x = -1$ enak $-\frac{3}{2}$, ki je po absolutni vrednosti več kot ena. Točka $x = -1$ je odbojna.

2. Na intervalu $[0, 2]$ ima enačba $f(x) = 0$, kjer je

$$f(x) = \sqrt{x}e^{-x} - \frac{1}{3},$$

dve rešitvi. Katero od teh dveh rešitev je mogoče poiskati s pomočjo iteracije

$$x_{n+1} = f(x_n) + x_n \tag{2}$$

s primerno izbranim začetnim približkom x_0?

Rešitev: Najprej poiščimo rešitvi enačbe $f(x) = 0$ s pomočjo Newtonove iteracije:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

Izberimo začetna približka $x_0 = \{0.1, 1.0\}$:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 1.0 \\ 0.058 & 1.188 \\ 0.120 & 1.182 \\ 0.148 & 1.182 \\ 0.150 & 1.182 \end{pmatrix}$$

Poiščemo absolutno vrednost odvoda iteracijske funkcije (2):

$$|f'(\{0.150, 1.82\}) - 1| = \{1.778, 0.808\}$$

Prva točka je odbojna, druga pa privlačna.

3. S pomočjo Newtonove iteracije določi vrednost $\sqrt[3]{2}$ na tri decimalna mesta natančno.

   Rešitev: Rešimo enačbo $x^3 - 2 = 0$ s pomočjo Newtonove metode. Začetni približek bomo vzeli $x_0 = 1$.

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

   $$\begin{pmatrix} x_n: & 1. & 1.333 & 1.264 & 1.260 \end{pmatrix}$$

4. Zapiši tri korake sekantne metode za reševanje enačbe $f(x) = 0$, kjer je

   $$f(x) = x + (x^3 + 3)/2.$$

   Izberi začetne vrednosti $x_0 = -3.0$ $x_1 = -2.0$.

   Rešitev: Pri sekantni metodi je iteracija:

   $$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

   Po treh korakih metode je $x_4 = -0.888$.

5. Rešujemo enačbo $x = bx(1 - x)$ za različne vrednosti parametra b. V kakšnih mejah se mora gibati parameter b, da iteracija

   $$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n) \tag{3}$$

   pri primerni izbiri začetnega približka konvergira k pozitivni rešitvi enačbe.

   Rešitev: Rešitev enačbe, ki je različna od nič, je $x = \frac{(b-1)}{b}$. Od tod sledi, da je $b > 1$, če je ta rešitev pozitivna. Točka je privlačna za iteracijo (3), če je odvod desne strani po absolutni vrednosti manj kot ena v tej točki.

   $$b(1 - 2x) = 2 - b, \quad \text{za} \quad x = \frac{(b-1)}{b}$$

   Od tod sledi, da mora biti $b \in (1, 3)$.

2 Sistemi linearnih enačb

2.1 Določeni sistemi

1. Položi parabolo skozi točke $T_1(1, 1)$ $T_2(2, 2)$ in $T_3(-2, 1)$.

Rešitev: Rešujemo sistem

$$y_i = ax_i^2 + bx_i + c, \quad i = 1, 2, 3.$$

Neznanke so a, b in c. Sistem zapišemo v matrični obliki takole:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev tega sistema je $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ in $c = \frac{1}{2}$.
Parabola, ki poteka skozi te tri točke je podana z enačbo:

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

2. Reši sistem enačb s pomočjo LU-razcepa.

3. Pokaži, da je matrika sistema $Ax = b$ pozitivno definitna in reši sistem s pomočjo razcepa Choleskega.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Matrika A pozitivno definitna, če so vsi glavni minorji matrike pozitivni. Glavna minorja sta:

$$2 \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4,$$

ki sta oba pozitivna.
Razcepimo matriko $A = R^T R$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

$$\begin{bmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ r & R_*^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & r^T \\ 0 & R_* \end{bmatrix}$$

Od tod sledi:

$$\begin{aligned} \alpha = \rho^2 \quad &\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\alpha} \\ a^T = \rho r^T \quad &\Rightarrow \quad r^T = a^T/\rho \\ A_* = R_*^T R_* + r r^T \quad &\Rightarrow \quad R_*^T R_* = A_* - r r^T \end{aligned}$$

V našem primeru je

$$\begin{aligned} \alpha = 2 \quad &\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2} \\ a^T = 1 \quad &\Rightarrow \quad r^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ A_* = 3 \quad &\Rightarrow \quad R_*^T R_* = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad R_* = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix}$$

Rešimo sistem

$$R^T R x = b, \quad Rx = y, \quad R^T y = b$$

Oba sistema sta trikotna, zato jih rešimo z vstavljanjem.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix} x$$

Od tod sledi, da je

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

4. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracijske metode in zapiši tretjo iteracijo. Začetni približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Napravimo razcep matrike po Jacobiju:

$$A = D - N, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Itercijska matrika S je enaka

$$S = D^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti iteracijske matrike so:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lastni vrednosti sta po absolutni vrednosti manj kot 1, zato je Jacobijeva iteracija konvergentna.

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x_n$$

Tretja iteracija, če izberemo začetni približek 0, in točna rešitev sta enaki

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Gauss-Seidlove iteracijske metode. Zapiši točno rešitev in tretjo iteracijo. Začetni približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Napravimo razcep matrike po Gauss-Seidlu:

$$A = D - N, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iteracijska matrika S je enaka

$$S = D^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti iteracijske matrike so:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \frac{1}{2}) = 0, \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{in} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Lastni vrednosti ssta po absolutni vrednosti manj kot 1, zato je Gauss-Seidlova iteracija konvergentna.

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x_n$$

Tretja iteracija, če izberemo začetni približek 0, in točna rešitev sta enaki:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 7/8 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracijske metode. Zapiši točno rešitev in tretjo iteracijo. Začetni približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Matrika sistema je diagonalno dominantna, zato Jacobijeva iteracija konvergira. Zapišimo Jacobijevo iteracijo po komponentah:

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(1 - x_2^{(n)} - x_3^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= 1 - \frac{1}{3}(1 - x_1^{(n)} - x_3^{(n)}) \\ x_3^{(n+1)} &= 1 - \frac{1}{2}(1 - x_1^{(n)}) \end{aligned}$$

Tretja iteracija in točna rešitev sta enaki:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0.1354 \\ 0.1944 \\ 0.4792 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

7. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Gauss-Seidlove iteracijske metode. Zapiši točno rešitev in tretjo iteracijo. Začetno približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Matrika sistema je diagonalno dominantna, zato Gauss-Seidlova iteracija konvergira. Zapišimo Gauss-Seidlovo iteracijo po komponentah

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(1 - x_2^{(n)} - x_3^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{3}(1 - x_1^{(n+1)} + x_3^{(n)}) \\ x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{2}(1 - x_1^{(n+1)}) \end{aligned}$$

Tretja iteracija in točna rešitev sta enaki:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0.0924 \\ 0.1515 \\ 0.4538 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

2.2 Predoločeni sistemi

1. Poišči vektor x, ki minimizira evklidsko normo $\|Ax - b\|_2$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Iskani vektor x je rešitev enačbe

$$A^T Ax = A^T b, \quad x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Sistem ima enolično rešitev, če je matrika A polnega ranga. V tem primeru to pomeni, da so stolpci linearno neodvisni, torej mora biti rang enak 2. V našem primeru to velja.
Ker je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

je

$$x = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2. Aproksimiraj podatke P z linearno funkcijo $f(x) = a_1 x + a_2$.

$$P = \begin{bmatrix} x_n : & 1 & 2 & 3 \\ y_n : & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev, ki minimizira normo $\|Aa - b\|_2$, dobimo takole:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Linearna funkcija, ki aproksimira podatke P, je $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$.

3. Aproksimiraj tabelo podatkov P s funkcijo $f(x) = a_1 e^{a_2 x}$, tako da uvedeš nove spremenljivke, za katere postane problem linearen.

$$P = \begin{bmatrix} x_n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ y_n: & 1.14 & 0.89 & 0.71 & 0.67 & 0.64 & 0.48 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Uvedba novih spremenljivk:

$$y = a_1 e^{a_2 x}, \quad \log y = \log a_1 + a_2 x$$

Označimo

$$Y = \log y \quad \text{in} \quad X = x$$

in aproksimiramo tabelo

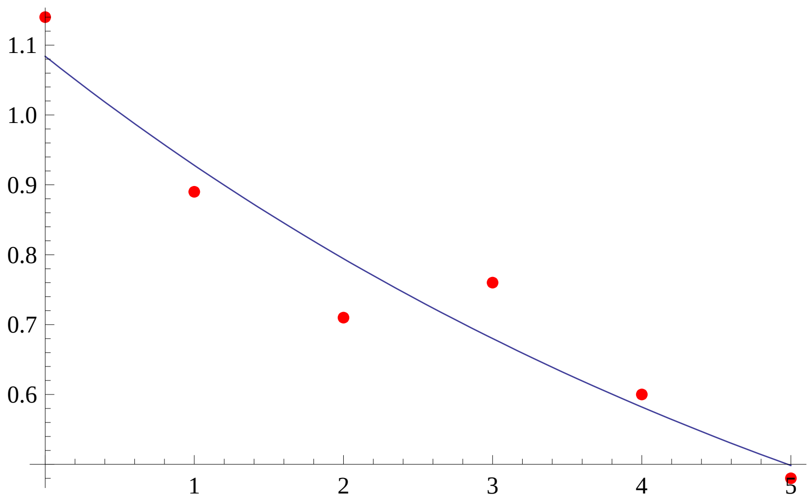
$$P' = \begin{bmatrix} X_n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ Y_n: & 1.13 & -0.12 & -0.34 & -0.4 & -0.44 & -0.73 \end{bmatrix}$$

z linearno funkcijo $Y = a_1' X + a_2'$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.13 \\ -0.12 \\ -0.34 \\ -0.4 \\ -0.44 \\ -0.73 \end{bmatrix}, \quad a' = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} -0.16 \\ 0.08 \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi:

$$a_1 = e^{a_2'} = 1.08 \quad \text{in} \quad a_2 = a_1' = -0.16$$



Slika 1: Podatki in graf funkcije $f(x) = 1.08\, e^{-0.16}$

2.3 Nedoločeni sistemi

1. Poišči točko ravnine
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5,$$
ki je najbliže koordinatnemu izhodišču.

   Rešitev: Rešujemo sistem $Ax = b$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = 5 \quad \text{in} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T. \tag{4}$$
   Sistem ima neskončno rešitev. Iščemo tisto, katere druga norma $\|x\|_2$ je majmanjša. Če je matrika A polnega ranga, kar v tem primeru pomeni, da so vrstice linearno neodvisne, potem obstaja enolična rešitev problema. Pišemo:
$$x = A^T y, \quad AA^T y = b, \quad y = (AA^T)^{-1} b, \quad x = A^T (AA^T)^{-1} b$$
   Rešitev z minimalno normo x sistema (4) zapišemo takole:
$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right)^{-1} 5 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. Poišči rešitev sistema $Ax = b$ z najmanjšo evklidsko normo.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Kot v prejšnji nalogi dobimo:

$$x = A^T(AA^T)^{-1}b$$

Ker je

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

je

$$(AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Rešitev x izrazimo

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

3 Numerično odvajanje in integriranje

3.1 Numerično odvajanje in interpolacija

1. Z uporabo deljenih razlik izračunajte $f(8.2)$, če je funkcija $f(x)$ podana tabelarično:

$$P = \begin{bmatrix} i: & 0 & 1 & 2 \\ x_i: & 8.0 & 8.1 & 8.3 \\ y_i: & 16.0 & 17.6 & 17.5 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Zapišemo tabelo deljenih razlik

$$D = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & & \\ x_1 & y_1 & y_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} & \\ x_2 & y_2 & y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & y_{0,1,2} = \frac{f_{1,2} - f_{0,1}}{x_2 - x_0} \end{bmatrix}$$

Vrednost v točki x izračunamo s pomočjo polinoma:

$$p(x) = y_0 + y_{0,1}(x - x_0) + y_{0,1,2}(x - x_0)(x - x_1)$$

V našem primeru je

$$D = \begin{bmatrix} 8.0 & 16.0 & & \\ 8.1 & 17.6 & 16.0 & \\ 8.3 & 17.5 & -0.5 & -55.0 \end{bmatrix}$$

$$p(8.2) = 16.0 + 16.0(8.2 - 8.0) - 55.0(8.2 - 8.0)(8.2 - 8.1) = 18.1$$

2. Določi uteži formule za numerično odvajanje, oblike:

$$f'(x) \approx w_1 f(x-h) + w_2 f(x) + w_3 f(x+h)$$

tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) = \{1,\ x,\ x^2\}$.

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= w_1(x-h) + w_2 x + w_3(x+h) \\ 2x &= w_1(x-h)^2 + w_2 x^2 + w_3(x+h)^2 \end{aligned}$$

Rešitev mora biti neodvisna od x, x se pokrajša. Sistem, po krajšanju x:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= -w_1 h + w_3 h \\ 0 &= w_1 h^2 + w_3 h^2 \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $w_1 = -\frac{1}{2h}$, $w_2 = 0$ in $w_3 = \frac{1}{2h}$. Torej:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

3. Določi uteži formule za numerično odvajanje, oblike:

$$f'(x) = w_1 f(x-2h) + w_2 f(x-h) + w_3 f(x)$$

tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) = \{1,\ x,\ x^2\}$.

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= w_1(x-2h) + w_2(x-h) + w_3 x \\ 2x &= w_1(x-2h)^2 + w_2(x-h)^2 + w_3 x^2 \end{aligned}$$

Rešitev mora biti neodvisna od x, x se pokrajša. Sistem, po krajšanju x:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= -2w_1 h - w_2 h \\ 0 &= w_1 4h^2 + w_2 h^2 \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $w_1 = \frac{1}{2h}$, $w_2 = -\frac{2}{h}$ in $w_3 = \frac{3}{2h}$. Torej:

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}$$

3.2 Numerično integriranje

1. Sestavi enostavno kvadraturno formulo oblike
$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(\xi_1) + \frac{1}{2}f(\xi_2).$$
Vozlišči ξ_1 in ξ_2 izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$, x in x^2. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala
$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx$$
in jo primerjaj s točno rešitvijo.

   Rešitev: Za $f(x) = 1$ je pogoj na prazno izpolnjen. Zapišimo sistem za x in x^2.
$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)\\ \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} &= \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\end{aligned}$$
Rešitev sistema je
$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$$
Od tod je:
$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx \approx 0.616191$$
Točna rešitev je $\frac{2}{\pi} \approx 0.63662$.

2. Sestavi enostavno kvadraturno formulo oblike
$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx wf(\xi_1) + wf(\xi_2).$$
Utež w in vozlišči ξ_1 in ξ_2 izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$, x, in x^2. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala
$$\int_{-1}^1 e^x\, dx$$
in jo primerjaj s točno rešitvijo.

   Rešitev: Zapišimo sistem enačb:
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 dx = 2 &= 2w\\ \int_{-1}^1 x\,dx = 0 &= w\xi_1 + w\xi_2\\ \int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{2}{3} &= w\xi_1^2 + w\xi_2^2\end{aligned}$$

Iz gornjega sledi, da je $w = 1$ in $\xi_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Od tod je:

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx \approx e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2.3427$$

Točna rešitev je $e - 1/e \approx 2.3504$.

3.3 Diferencialne enačbe