Rešene izpitne naloge iz numeričnih metod 2000-2007

1 Iterativno reševanje nelinearnih enačb

1. Poišči rešitev enačbe $x = f(x)$, kjer je

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + 3),$$

s pomočjo Newtonove iteracije. Izberi začetni približek $x_0 = 1$. Ali lahko dobimo to rešitev tudi s pomočjo iteracije

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1}$$

s primerno izbranim začetnim približkom?

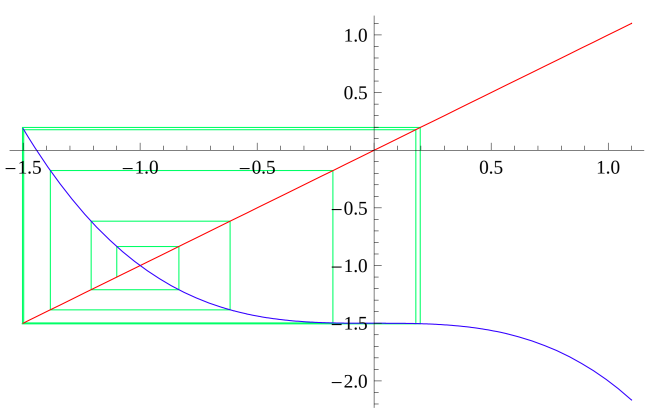
Rešitev: Newtonova iteracija za enačbo $f(x) - x = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - x_n}{f'(x_n) - 1}$$

Izberimo začetni približek $x_0 = 1$ in dobimo:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} x_n: & 1.000 & -0.200 & -1.423 & -1.085 & -1.004 & -1.000 \end{array} \right)$$

Gornja iteracija (1) ne konvergira k $x = -1$, ker je $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2$ v točki $x = -1$ enak $-\frac{3}{2}$, ki je po absolutni vrednosti več kot ena. Točka $x = -1$ je odbojna.



Slika 1: Točka $x = -1$ je odbojna.

2. Na intervalu $[0,1]$ ima enačba $f(x)=x$, kjer je

$$f(x)=3\sqrt{x}e^{-x}-\frac{1}{3},$$

dve rešitvi. Katero od teh dveh rešitev je mogoče poiskati s pomočjo iteracije

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad x_{n+1}=3\sqrt{x_n}e^{-x_n}-\frac{1}{3} \tag{2}$$

s primerno izbranim začetnim približkom x_0?

Rešitev: Najprej s pomočjo Newtonove iteracije poiščemo rešitvi enačbe $f(x)=x$.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)-x_n}{f'(x_n)-1}$$

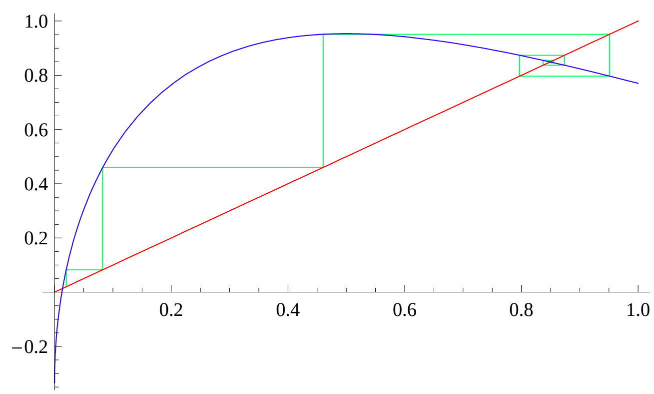
Izberimo začetna približka $x_0=\{0.02, 1.0\}$:

$$\begin{pmatrix} 0.02 & 1.0 \\ 0.0130373 & 0.851983 \\ 0.013748 & 0.84922 \\ 0.0137594 & 0.849218 \end{pmatrix}$$

Poiščemo absolutno vrednost odvoda iteracijske funkcije (2):

$$f'(\{0.0137594, 0.849218\})=\{12.2658, -0.486293\}$$

Prva točka je odbojna, druga pa privlačna.



Slika 2: Prva točka je odbojna, druga pa privlačna.

3. Na intervalu $[0,2]$ ima enačba $f(x)=0$, kjer je

$$f(x)=\sqrt{x}e^{-x}-\frac{1}{3},$$

dve rešitvi. Katero od teh dveh rešitev je mogoče poiskati s pomočjo iteracije

$$x_{n+1} = f(x_n) + x_n, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n}e^{-x_n} - \frac{1}{3} + x_n \tag{3}$$

s primerno izbranim začetnim približkom x_0?

Rešitev: Najprej s pomočjo Newtonove iteracije poiščemo rešitvi enačbe $f(x) = 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

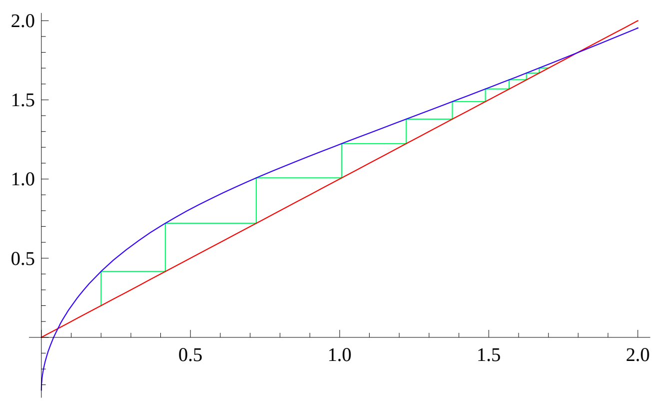
Izberimo začetna približka $x_0 = \{0.02, 1.0\}$:

$$\begin{pmatrix} 0.02 & 1. \\ 0.04513 & 1.7919 \\ 0.05449 & 1.7972 \\ 0.05514 & 1.7972 \end{pmatrix}$$

Poiščemo absolutno vrednost odvoda iteracijske funkcije (3):

$$f'(\{0.05514, 1.7972\}) = \{2.6893, -0.2406\}$$

Prva točka je odbojna, druga pa privlačna.



Slika 3: Prva točka je odbojna, druga pa privlačna.

4. S pomočjo Newtonove iteracije določi vrednost $\sqrt[3]{2}$ na tri decimalna mesta natančno.

   Rešitev: Rešimo enačbo $x^3 - 2 = 0$ s pomočjo Newtonove metode. Začetni približek bomo vzeli $x_0 = 1$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

$$\begin{pmatrix} x_n: & 1. & 1.333 & 1.264 & 1.260 \end{pmatrix}$$

5. Zapiši tri korake sekantne metode za reševanje enačbe $f(x) = 0$, kjer je

$$f(x) = x + (x^3 + 3)/2.$$

Izberi začetne vrednosti $x_0 = -3.0$ $x_1 = -2.0$.

Rešitev: Pri sekantni metodi je iteracija:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Po treh korakih metode je $x_4 = -0.888$.

6. Rešujemo enačbo $x = bx(1 - x)$ za različne vrednosti parametra b. V kakšnih mejah se mora gibati parameter b, da iteracija

$$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n) \tag{4}$$

s primerno izbiro začetnega približka, konvergira k pozitivni rešitvi enačbe.

Rešitev: Rešitev enačbe, ki je različna od nič, je $x = \frac{(b-1)}{b}$. Od tod sledi, da je $b > 1$, če je ta rešitev pozitivna. Točka je privlačna za iteracijo (4), če je odvod desne strani po absolutni vrednosti manj kot ena v tej točki.

$$b(1 - 2x) = 2 - b, \quad \text{za} \quad x = \frac{(b-1)}{b}$$

Od tod sledi, da mora biti $b \in (1, 3)$.

7. Pokažite, da leži na intervalu $I = [0.1, 1]$ natanko en koren enačbe

$$x + \log x = 0.$$

Poišči ta koren z Newtonovo metodo.
Naslednje tri funkcije

$$f(x) = -\log x, \quad f(x) = e^{-x}, \quad f(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$$

imajo natanko eno fiksno točko $x = f(x)$ na intervalu I, ki se ujema z rešitvijo zgornje enačbe. V katerih primerih je ta točka privlačna in v katerih odbojna. Z drugimi besedami, v katerih primerih lahko poiščemo začetni približek, različen od fiksne točke, tako da iteracija konvergira k fiksni točki in kdaj to ni mogoče?

$$x_{k+1} = -\log x_k, \quad x_{k+1} = e^{-x_k}, \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + e^{-x_k})$$

Rešitev: $x = 0.56714$,

$$f'(x) = -1/x, \quad -e^{-x}, \quad \text{in} \quad \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$$

Vrednosti odvodov funkcij $f(x)$ v negibni točki so

$$-1.76291, -0.567086, 0.216457$$

Prva je odbojna, ker je odvod po absolutni vrednosti večji od 1, drugi dve pa sta privlačni.

2 Sistemi linearnih enačb

2.1 Določeni sistemi

1. Položi parabolo skozi točke $T_1(1,1)$ $T_2(2,2)$ in $T_3(-2,1)$.

   Rešitev: Rešujemo sistem

   $$y_i = ax_i^2 + bx_i + c, \quad i = 1,2,3.$$

   Neznanke so a, b in c. Sistem zapišemo v matrični obliki takole:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Rešitev tega sistema je $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ in $c = \frac{1}{2}$.
   Parabola, ki poteka skozi te tri točke je podana z enačbo:

   $$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

2. Pokaži, da je matrika sistema $Ax = b$ pozitivno definitna in reši sistem s pomočjo razcepa Choleskega.

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Rešitev: Matrika A pozitivno definitna, če so vsi glavni minorji matrike pozitivni. Glavna minorja sta:

   $$2 \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4,$$

   ki sta oba pozitivna.
   Razcepimo matriko $A = R^T R$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

   $$\begin{bmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ r & R_*^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & r^T \\ 0 & R_* \end{bmatrix}$$

   Od tod sledi:

   $$\begin{aligned} \alpha = \rho^2 \quad &\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\alpha} \\ a^T = \rho r^T \quad &\Rightarrow \quad r^T = a^T/\rho \\ A_* = R_*^T R_* + rr^T \quad &\Rightarrow \quad R_*^T R_* = A_* - rr^T \end{aligned}$$

   V našem primeru je

   $$\begin{aligned} \alpha = 2 \quad &\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2} \\ a^T = 1 \quad &\Rightarrow \quad r^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ A_* = 3 \quad &\Rightarrow \quad R_*^T R_* = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad R_* = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix}$$

Rešimo sistem

$$R^T R x = b, \quad Rx = y, \quad R^T y = b$$

Oba sistema sta trikotna, zato jih rešimo z vstavljanjem.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix} x$$

Od tod sledi, da je

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

3. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracijske metode in zapiši tretjo iteracijo. Začetni približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Napravimo razcep matrike po Jacobiju:

$$A = D - N, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Iteracijska matrika S je enaka

$$S = D^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti iteracijske matrike so:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lastni vrednosti sta po absolutni vrednosti manj kot 1, zato je Jacobijeva iteracija konvergentna.

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x_n$$

Tretja iteracija, če izberemo začetni približek 0, in točna rešitev sta enaki

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Gauss-Seidlove iteracijske metode. Zapiši točno rešitev in tretjo iteracijo. Začetni približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Napravimo razcep matrike po Gauss-Seidlu:

$$A = M - N, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iteracijska matrika S je enaka

$$S = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti iteracijske matrike so:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \frac{1}{2}) = 0, \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{in} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Lastni vrednosti sta po absolutni vrednosti manj kot 1, zato je Gauss-Seidlova iteracija konvergentna.

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x_n$$

Tretja iteracija, če izberemo začetni približek 0, in točna rešitev sta enaki:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 7/8 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracijske metode. Zapiši točno rešitev in tretjo iteracijo. Začetni približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Matrika sistema je diagonalno dominantna, zato Jacobijeva iteracija konvergira. Zapišimo Jacobijevo iteracijo po komponentah:

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(1 - x_2^{(n)} - x_3^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= 1 - \frac{1}{3}(1 - x_1^{(n)} - x_3^{(n)}) \\ x_3^{(n+1)} &= 1 - \frac{1}{2}(1 - x_1^{(n)}) \end{aligned}$$

Tretja iteracija in točna rešitev sta enaki:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0.1354 \\ 0.1944 \\ 0.4792 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

6. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Gauss-Seidlove iteracijske metode. Zapiši točno rešitev in tretjo iteracijo. Začetno približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Matrika sistema je diagonalno dominantna, zato Gauss-Seidlova iteracija konvergira. Zapišimo Gauss-Seidlovo iteracijo po komponentah

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(1 - x_2^{(n)} - x_3^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{3}(1 - x_1^{(n+1)} + x_3^{(n)}) \\ x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{2}(1 - x_1^{(n+1)}) \end{aligned}$$

Tretja iteracija in točna rešitev sta enaki:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0.0924 \\ 0.1515 \\ 0.4538 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

7. Ali lahko rešimo sistem $Ax = b$ z Gauss-Seidlovo iteracijo?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Izračunaj prve tri korake iteracije. Začetni približek izberi $x_0 = [0, 0, 0]^T$. Kdaj bi se lahko zgodilo, da nas iteracijska metoda pripelje do rešitve v končno korakih?

Rešitev: Gauss-Seidlova iteracija je konvergentna, ker ima matrika

$$S = -M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

samo ničelne lastne vrednosti.

Ker je matrika S zgornjetrikotna z diagonalo enako nič, je njena tretja potenca identično enaka nič. Zato se tretja iteracija ujema s točno rešitvijo: $x_3 = [0, 1/2, 1]^T$ in $x_\infty = [0, 1/2, 1]^T$.

2.2 Predoločeni sistemi

1. Poišči vektor x, ki minimizira evklidsko normo $\|Ax - b\|_2$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Iskani vektor x je rešitev enačbe

$$A^T A x = A^T b, \quad x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Sistem ima enolično rešitev, če je matrika A polnega ranga. V tem primeru to pomeni, da so stolpci linearno neodvisni, torej mora biti rang enak 2. V našem primeru to velja.
Ker je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

je

$$x = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2. Aproksimiraj podatke P z linearno funkcijo $f(x) = a_1 x + a_2$.

$$P = \begin{bmatrix} x_n: & 1 & 2 & 3 \\ y_n: & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev, ki minimizira normo $\|Aa - b\|_2$, dobimo takole:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Linearna funkcija, ki aproksimira podatke P, je $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$.

3. Aproksimiraj tabelo podatkov P s funkcijo $f(x) = a_1 e^{a_2 x}$, tako da uvedeš nove spremenljivke, za katere postane problem linearen.

$$P = \begin{bmatrix} x_n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ y_n: & 1.14 & 0.89 & 0.71 & 0.67 & 0.64 & 0.48 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Uvedba novih spremenljivk:

$$y = a_1 e^{a_2 x}, \quad \log y = \log a_1 + a_2 x$$

Označimo

$$Y = \log y \quad \text{in} \quad X = x$$

in aproksimiramo tabelo

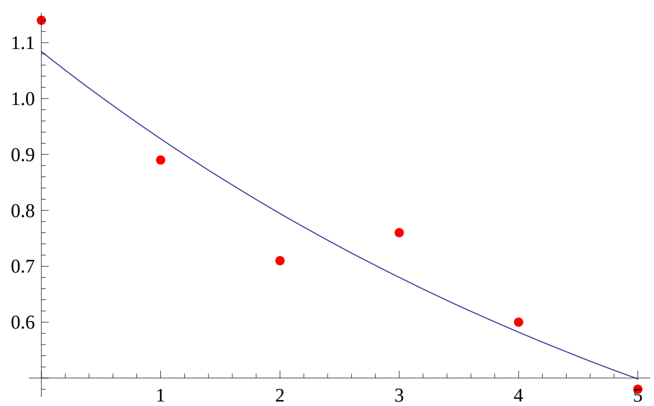
$$P' = \begin{bmatrix} X_n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ Y_n: & 1.13 & -0.12 & -0.34 & -0.4 & -0.44 & -0.73 \end{bmatrix}$$

z linearno funkcijo $Y = a_1' X + a_2'$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.13 \\ -0.12 \\ -0.34 \\ -0.4 \\ -0.44 \\ -0.73 \end{bmatrix}, \quad a' = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} -0.16 \\ 0.08 \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi:

$$a_1 = e^{a_2'} = 1.08 \quad \text{in} \quad a_2 = a_1' = -0.16.$$



Slika 4: Podatki in graf funkcije $f(x) = 1.08\, e^{-0.16}$

2.3 Nedoločeni sistemi

1. Poišči točko ravnine
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5,$$
ki je najbliže koordinatnemu izhodišču.

Rešitev: Rešujemo sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = 5 \quad \text{in} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T. \tag{5}$$

Sistem ima neskončno rešitev. Iščemo tisto, katere druga norma $\|x\|_2$ je najmanjša. Če je matrika A polnega ranga, kar v tem primeru pomeni, da so vrstice linearno neodvisne, potem obstaja enolična rešitev problema. Pišemo:

$$x = A^T y, \quad AA^T y = b, \quad y = (AA^T)^{-1} b, \quad x = A^T (AA^T)^{-1} b$$

Rešitev z minimalno normo x sistema (5) zapišemo takole:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right)^{-1} 5 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. Poišči rešitev sistema $Ax = b$ z najmanjšo evklidsko normo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Kot v prejšnji nalogi dobimo:

$$x = A^T(AA^T)^{-1}b$$

Ker je

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

je

$$(AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Rešitev x izrazimo

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

3 Numerično odvajanje in integriranje

3.1 Numerično odvajanje in interpolacija

1. Z uporabo deljenih razlik izračunajte $f(8.2)$, če je funkcija $f(x)$ podana tabelarično:

$$P = \begin{bmatrix} i: & 0 & 1 & 2 \\ x_i: & 8.0 & 8.1 & 8.3 \\ y_i: & 16.0 & 17.6 & 17.5 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Zapišemo tabelo deljenih razlik

$$D = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & & \\ x_1 & y_1 & y_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} & \\ x_2 & y_2 & y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & y_{0,1,2} = \frac{f_{1,2} - f_{0,1}}{x_2 - x_0} \end{bmatrix}$$

Vrednost v točki x izračunamo s pomočjo polinoma:

$$p(x) = y_0 + y_{0,1}(x - x_0) + y_{0,1,2}(x - x_0)(x - x_1)$$

V našem primeru je

$$D = \begin{bmatrix} 8.0 & 16.0 & & \\ 8.1 & 17.6 & 16.0 & \\ 8.3 & 17.5 & -0.5 & -55.0 \end{bmatrix}$$

$$p(8.2) = 16.0 + 16.0(8.2 - 8.0) - 55.0(8.2 - 8.0)(8.2 - 8.1) = 18.1$$

2. Določi uteži formule za numerično odvajanje, oblike:

$$f'(x) \approx w_1 f(x-h) + w_2 f(x) + w_3 f(x+h)$$

tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) = \{1,\ x,\ x^2\}$.

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= w_1(x-h) + w_2 x + w_3(x+h) \\ 2x &= w_1(x-h)^2 + w_2 x^2 + w_3(x+h)^2 \end{aligned}$$

Rešitev mora biti neodvisna od x, x se okrajša. Sistem, po krajšanju x:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= -w_1 h + w_3 h \\ 0 &= w_1 h^2 + w_3 h^2 \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $w_1 = -\frac{1}{2h}$, $w_2 = 0$ in $w_3 = \frac{1}{2h}$. Torej:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

3. Določi uteži formule za numerično odvajanje, oblike:

$$f'(x) = w_1 f(x-2h) + w_2 f(x-h) + w_3 f(x)$$

tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) = \{1,\ x,\ x^2\}$.

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= w_1(x-2h) + w_2(x-h) + w_3 x \\ 2x &= w_1(x-2h)^2 + w_2(x-h)^2 + w_3 x^2 \end{aligned}$$

Rešitev mora biti neodvisna od x, x se okrajša. Sistem, po krajšanju x:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= -2w_1 h - w_2 h \\ 0 &= w_1 4h^2 + w_2 h^2 \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $w_1 = \frac{1}{2h}$, $w_2 = -\frac{2}{h}$ in $w_3 = \frac{3}{2h}$. Torej:

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}$$

3.2 Numerično integriranje

1. Sestavi enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(\xi_1) + \frac{1}{2}f(\xi_2).$$

   Vozlišči ξ_1 in ξ_2 izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$, x in x^2. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx$$

   in jo primerjaj s točno rešitvijo.

   Rešitev: Za $f(x) = 1$ je pogoj na prazno izpolnjen. Zapišimo sistem za x in x^2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \\ \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} &= \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \end{aligned}$$

   Rešitev sistema je

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$$

   Od tod je:

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx \approx 0.616191$$

   Točna rešitev je $\frac{2}{\pi} \approx 0.63662$.

2. Sestavi enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx wf(\xi_1) + wf(\xi_2).$$

   Utež w in vozlišči ξ_1 in ξ_2 izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$, x, in x^2. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_{-1}^1 e^x\, dx$$

   in jo primerjaj s točno rešitvijo.

   Rešitev: Zapišimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx = 2 &= 2w \\ \int_{-1}^1 x\, dx = 0 &= w\xi_1 + w\xi_2 \\ \int_{-1}^1 x^2\, dx = \frac{2}{3} &= w\xi_1^2 + w\xi_2^2 \end{aligned}$$

Iz gornjega sledi, da je $w = 1$ in $\xi_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Od tod je:

$$\int_{-1}^{1} e^x\,dx \approx e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2.3427$$

Točna rešitev je $e - 1/e \approx 2.3504$.

3. Sestavi enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx wf(\xi)$$

Utež w in vozlišče ξ izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$ in x. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

in jo primerjaj z rešitvijo, natančno na štiri decimalna mesta, ki jo dobiš s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} dx = 2 &= w \\ \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 &= w\xi \end{aligned}$$

Iz gornjega sledi, da je $w = 2$ in $\xi = 0$. Od tod je:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2$$

Razvijemo funkcijo $\sin x$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0 in dobimo

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Integriramo po x v mejah od -1 do 1 in dobimo

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \dots = 2 - \frac{2}{3\cdot 3!} + \frac{2}{5\cdot 5!} - \dots$$

Če želimo, da se delna vsota n členov razlikuje od točne vrednosti za manj kot 10^{-4}, mora biti absolutna vrednost $(n+1)$-vega člena manj kot 10^{-4}. Takšno oceno napake lahko naredimo zato, ker je vrsta alternirajoča.
Iz $\frac{2}{(2n-1)(2n-1)!} < 10^{-4}$ sledi, da je $n > 4$ in

$$2 - \frac{2}{3\cdot 3!} + \frac{2}{5\cdot 5!} - \frac{2}{7\cdot 7!} = 1.89217$$

4. Sestavi enostavno kvadraturno formulo za singularne integrale oblike

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \approx w_0 f(0) + w_1 f(1/2) + w_2 f(1)$$

Uteži w_i izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$, x in x^2. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sqrt{x}}\, dx \tag{6}$$

in jo primerjaj z rešitvijo, natančno na štiri decimalna mesta. ki jo dobiš s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije $f(x)$ v okolici točke 0.

Rešitev: Rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 &= w_0 + w_1 + w_2 \\
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} w_1 + w_2 \\
\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5} &= \frac{1}{4} w_1 + w_2
\end{aligned}$$

in dobimo rešitev $w_0 = 4/5$, $w_1 = 16/15$ in $w_2 = 2/15$. Približna vrednost integrala (6) je

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sqrt{x}} dx \approx \frac{4}{5} \cos 0 + \frac{16}{15} \cos \frac{1}{4} + \frac{2}{15} \cos \frac{1}{2} = 1.95052$$

Razvijemo funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici $x = 0$.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384} - \dots$$

Izračunamo integral

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x^{3/2}}{8} + \frac{x^{7/2}}{384} \right) dx = 1.95058 \tag{7}$$

Rezultat se razlikuje od točne vrednosti za manj kot 1/46080, kolikor je maksimalna vrednost prvega izpuščenega člena v razvoju (7) (alternirajoča vrsta).

5. Reši integral s popravljeno Simpsonovo kvadraturno formulo za singularne integrale in primerjaj rezultat z rešitvijo, točno na tri decimalna mesta, ki jo dobiš s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto.

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Rešitev:

$$\int_{-1}^{1/2} f(x)/\sqrt{x}\,dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(1/4) + w_3 f(1/2)$$

Taylorjeva vrsta: $F(x) = 2\sqrt{x} - (2x^{5/2})/5 + x^{9/2}/9$, $I = F(1/2) - F(0) = 1.348$
Kvadraturna formula: $(3\sqrt{2})/5 f(0) + (7\sqrt{2})/15 f(1/4) - \sqrt{2}/15 f(1/2) = 1.328$

3.3 Diferencialne enačbe

1. Numerično reši diferencialno enačbo

$$y'(x) = -y, \quad y(0) = 1,$$

po navadni Eulerjevi metodi in po Heunovi metodi.

- Euler:
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\,h$$
- Heun:
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_k, y_{k+1}))$$

Vzemi, da je $h = \frac{1}{2}$ in izračunaj približno vrednost $y(1)$ po eni in drugi metodi.
Funkcija $y(x)$ je padajoča in v limiti, ko x narašča čez vse meje, gre proti nič. Največ kolikšen je lahko korak h po eni in po drugi metodi da rešitev še ohrani to lastnost.

Rešitev: Zapišimo formulo za izračun funkcijskih vrednosti y_k po eni in drugi metodi.

- Euler:
$$y_{k+1} = y_k - y_k\,h = y_k(1-h) = y_0(1-h)^{k+1}$$
Približna vrednost $y(1)$ je v tem primeru enaka $y_2 = 1(1-1/2)^2 = 0.25$.
- Heun:
$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}(-y_k - y_{k+1}) \\ y_{k+1}(1+\frac{h}{2}) &= y_k(1-\frac{h}{2}) \\ y_{k+1} &= y_k \frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}} = y_0 \left(\frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}}\right)^{k+1} \end{aligned}$$
Približna vrednost $y(1)$ je v tem primeru enaka $y_2 = 1(1-1/4)^2/(1+1/4)^2 = 0.36$.

Točna vrednost na 6 decimalnih mest pa je enaka 0.367879.

Vidimo, da mora biti v prvem primeru izpolnjeno $|1-h|<1$, to pomeni, da mora biti pozitiven $h<1$. V drugem primeru pa je za pozitivne h kvocient vedno manj kot 1.

$$\left|\frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}}\right| < 1, \quad h > 0$$

2. Numerično reši diferencialno enačbo

$$y'(x) = -y(x), \quad y(0) = y_0 = 1$$

Izberi korak $h = 0.1$ in določi $y(1)$, po metodi, ki jo izpeljemo iz razvoja v Taylorjevo vrsto do vključno kvadratnega člena. Primerjaj rešitev s točno rešitvijo in rešitvijo, ki jo dobimo s po običajni Eulerjevi metodi.

Rešitev diferencialne enačbe je:

(1) monotono padajoča funkcija, katere

(2) limita je enaka nič, ko x raste čez vse meje.

Primerjaj našo metodo z običajno Eulerjevo metodo in ugotovi pri obeh, za katere pozitivne vrednosti koraka h približna rešitev ohranja obe oziroma eno od lastnosti.

Rešitev: Razvoj v Taylorjevo vrsto do vključno kvadratnega člena je:

$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2}$$

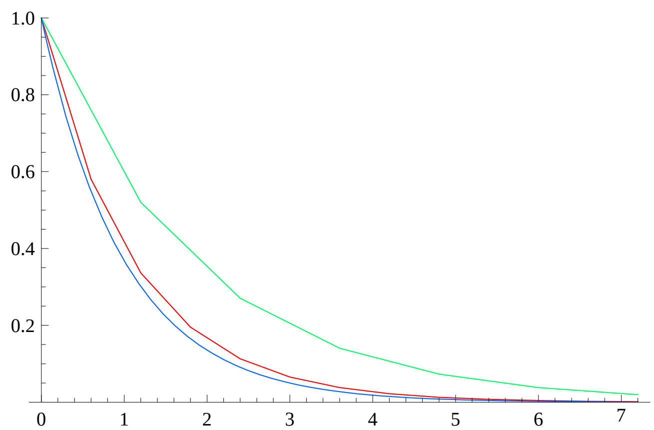
Od tod sledi formula

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k - y_k\,h + y_k\frac{h^2}{2} \\
y_{k+1} &= \frac{y_k}{2}(2 - 2h + h^2) \\
y_{k+1} &= \frac{y_k}{2}\left(1 + (1-h)^2\right) \\
y_{k+1} &= y_0\left(\frac{1}{2}\left(1 + (1-h)^2\right)\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

Približna vrednost $y(1)$ pri koraku $h = 0.1$ po tej metodi je 0.368541, medtem ko je točna rešitev enaka $1/e \approx 0.367879$.

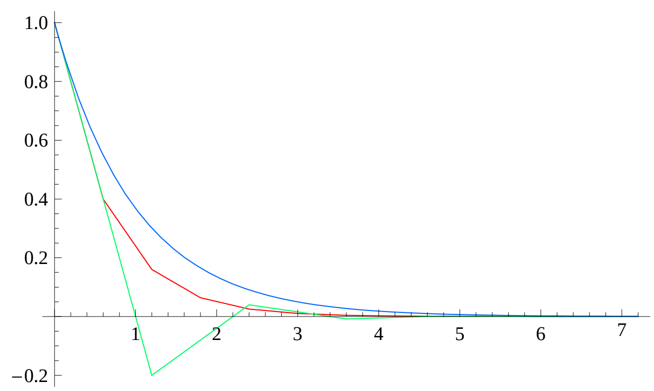
Izraz $\frac{1}{2}(1+(1-h)^2)$ je vedno pozitiven in je manjši od 1 za pozitivne h, ki so manj od 2. Od tod velja, da se za $0 < h < 2$ ohranita obe lastnosti (1) monotonost, ker je izraz pozitiven in (2) pada proti 0, ker je izraz absolutno manj kot 1. Za običajno Eulerjevo formulo velja

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k - y_k\,h \\
y_{k+1} &= y_0(1-h)^{k+1}
\end{aligned}$$



Slika 5: Rešitve za $h = 0.6$ in $h = 1.2$ po naši metodi in točna rešitev.

Približna vrednost $y(1)$ pri koraku $h = 0.1$ po Eulerjevi metodi je 0.348678. Za pozitivne h sta izpolnjeni obe lastnosti, če je $h < 1$. Če je $1 < h < 2$, lastnost monotonosti ni izpolnjena. Če je $h \geq 2$ ni izpolnjena nobena od lastnosti.



Slika 6: Rešitve za $h = 0.6$ in $h = 1.2$ po Eulerjevi metodi in točna rešitev.