Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb

Numerične metode, sistemi linearnih enačb

B. Jurčič Zlobec[1]

[1] Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Numerične metode FE, Ljubljana, Slovenija 2007

Vsebina

- Sistem linearnih enačb z n neznankami.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_{i,n} = b_i \quad i = 1, \ldots, n$$

- V matrični obliki zapišemo:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Matrika $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ je matrika sistema, (koeficieti pred nezanakami).
- Vektor $\mathbf{x} = (x_i)_n$ je vektor neznank in
- vector $\mathbf{b} = (b_i)_n$ je vektor svobodnih členov na desni strani.

Vsebina

Splošno

- Razcepimo matriko $\mathbf{A}$ na razliko matrik $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$.
- Razcep je smiselen, če lahko na preprost način izračunamo inverzno matrtiko $\mathbf{M}^{-1}$.
- Zapišemo sistem

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{M} - \mathbf{N})\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{M}\,\mathbf{x} &= \mathbf{N}\,\mathbf{x} + \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Splošno

- Razcepimo matriko $\mathbf{A}$ na razliko matrik $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$.
- Razcep je smiselen, če lahko na preprost način izračunamo inverzno matrtiko $\mathbf{M}^{-1}$.
- Zapišemo sistem

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{M} - \mathbf{N})\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{M}\mathbf{x} &= \mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Splošno

- Razcepimo matriko $\mathbf{A}$ na razliko matrik $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$.
- Razcep je smiselen, če lahko na preprost način izračunamo inverzno matrtiko $\mathbf{M}^{-1}$.
- Zapišemo sistem

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{M} - \mathbf{N})\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{M}\,\mathbf{x} &= \mathbf{N}\,\mathbf{x} + \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Iteracija

- Označimo matriko $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$,
  ki ji rečemo iteracijska matrika in vektor $\mathbf{c} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$
- Sistem zapišemo z novimi oznakami:

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\,\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

- Izberemo začetni približek $\mathbf{x}^{(0)}$ in sprožimo iteracijo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{S}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Iteracija

- Označimo matriko $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$,
  ki ji rečemo iteracijska matrika in vektor $\mathbf{c} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$
- Sistem zapišemo z novimi oznakami:

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\,\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

- Izberemo začetni približek $\mathbf{x}^{(0)}$ in sprožimo iteracijo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{S}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Iteracija

- Označimo matriko $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$,
  ki ji rečemo iteracijska matrika in vektor $\mathbf{c} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$
- Sistem zapišemo z novimi oznakami:

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\,\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

- Izberemo začetni približek $\mathbf{x}^{(0)}$ in sprožimo iteracijo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{S}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Vsebina

Spektralni radij

- *Spektralni radij matrike* je enak absolutno največji lastni vrednosti matrike.
- Spektralni radij matrike $\mathbf{S}$ označimo z $\rho(\mathbf{S})$
- Spektralni radij matrike je manjši ali enak normi matrike. $\rho(\mathbf{S}) \leq \|\mathbf{S}\|$
- Zaporedje $\mathbf{x}^{(k)}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je $\rho(\mathbf{S}) < 1$.

Spektralni radij

- *Spektralni radij matrike* je enak absolutno največji lastni vrednosti matrike.
- Spektralni radij matrike **S** označimo z $\rho(\mathbf{S})$
- Spektralni radij matrike je manjši ali enak normi matrike. $\rho(\mathbf{S}) \leq \|\mathbf{S}\|$
- Zaporedje $\mathbf{x}^{(k)}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je $\rho(\mathbf{S}) < 1$.

Spektralni radij

- *Spektralni radij matrike* je enak absolutno največji lastni vrednosti matrike.
- Spektralni radij matrike $\mathbf{S}$ označimo z $\rho(\mathbf{S})$
- Spektralni radij matrike je manjši ali enak normi matrike. $\rho(\mathbf{S}) \leq \|\mathbf{S}\|$
- Zaporedje $\mathbf{x}^{(k)}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je $\rho(\mathbf{S}) < 1$.

Spektralni radij

- *Spektralni radij matrike* je enak absolutno največji lastni vrednosti matrike.
- Spektralni radij matrike **S** označimo z $\rho(\mathbf{S})$
- Spektralni radij matrike je manjši ali enak normi matrike. $\rho(\mathbf{S}) \leq \|\mathbf{S}\|$
- Zaporedje $\mathbf{x}^{(k)}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je $\rho(\mathbf{S}) < 1$.

Vsebina

Razcepimo matriko $\mathbf{A}$ na vsoto $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$.
Sumandi so spodnjetrikotna, diagonalna in zgornjetrikotna matrika matrike $\mathbf{A}$.

Jacobijeva iteracija

$\mathbf{M} = \mathbf{D}$ in $\mathbf{N} = -\mathbf{L} - \mathbf{U}$

Gauss-Seidlova iteracija

$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}$ in $\mathbf{N} = -\mathbf{U}$

Diagonalno dominantne matrike

Matrika je diagonalno dominantna, še je absolutna vsota izvediagonalnih členov matrike majša od absolutne vrednosti diagonalnega člena.

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

Neskončna norma

$$\|\mathbf{S}\|_\infty = \sup \frac{\|\mathbf{Sx}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

Neskončna norma matrike je maksimalna absolutna vrstična vsota.

$$\|\mathbf{S}\|_\infty = \max_i \left(\sum_j |s_{ij}| \right)$$

Konvergentnost Jacobijeve iteracije

Če je matrika **A** diagonalno dominantna, potem je iteracijska matrika **S** Jacobijeve iteracije konvergentna. Njena neskončna norma je pod 1, $\|\mathbf{S}\|_\infty < 1$.

Elementi iteracijske matrike so

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j \end{cases} \quad , \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Velja, *(zaradi diagonalne dominantnosti matrike* **A**):

$$\sum_j |s_{ij}| < 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

Vsebina

Jacobijeva iteracija

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j\neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j} s_{ij}x_j^{(k)} + c_i$$

Gauss-Seidlova iteracija

$$a_{ii}x_i + \sum_{j<i} a_{ij}x_j = -\sum_{j>i} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j<i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Vsebina

Razcep po Jacobiju

$$\begin{aligned} d_1 x_1 &= -u_1 x_2 + b_1 \\ d_i x_i &= -l_i x_{i-1} - u_i l_{i+1} + b_i \quad i = 2, \ldots n-1 \\ d_n x_n &= -l_n x_{n-1} + b_n \end{aligned}$$

Jacobijeva iteracija

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -u_1/d_1\, x_2^{(k)} + b_1 i/d_1 \\ x_i^{(k+1)} &= -l_i/d_i\, x_{i-1}^{(k)} - u_i/d_i\, x_{i+1}^{(k)} + b_i/d_i \quad i = 2, \ldots n-1 \\ x_n^{(k+1)} &= -l_n/d_n\, x_{n-1}^{(k)} + b_n/d_n \end{aligned}$$

Razcep po Gauss-Seidlu

$$
\begin{aligned}
d_1 x_1 &= -u_1 x_2 + b_1 \\
d_i x_i + l_i x_{i-1} &= -u_i x_{i+1} + b_i \quad i = 2, \ldots n-1 \\
d_n x_n + l_n x_{n-1} &= b_n
\end{aligned}
$$

Gaus-Seidlova iteracija

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -u_1/d_1\, x_2^{(k)} + b_1/d_1 \\
x_i^{(k+1)} &= -l_i/d_i\, x_{i-1}^{(k+1)} - u_i/d_i\, x_{i+1}^{(k)} + b_i/d_i \quad i = 2, \ldots n-1 \\
x_n^{(k+1)} &= -l_n/d_n\, x_{n-1}^{(k+1)} + b_n/d_n
\end{aligned}
$$