Numerično integriranje in Parcialne diferencialne enačbe

Navedene strani so iz knjige *Octave z uvodom v numerične metode.*

Gaussove kvadraturne formule, Singularni integrali

Integral oblike

$$\int_0^h \frac{f(x)}{x^r}\,dx, \quad 0 < r < 1, \quad h > 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$$

ima singularno vrednost (ni definiran) v $x = 0$, zato ga imenujemo *singularni integral.* Take integrale rešimo z Gaussovimi kvadraturnimi formulami, kjer koeficiente in uteži določimo tako, da bo formula točna za polinome nizkih stopenj ($f(x) \in \{1, x, x^2, \ldots\}$). Glej zbirko rešenih izpitnih nalog in knjigo na str. 210-211.

Robni problemi v dveh dimenzijah

Poissonova parcialna diferencialna enačba z *Dirichletovim robnim pogojem*

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}, \\ u(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\mathcal{D}. \end{aligned}$$

O *Laplaceovi* enačbi govorimo, ko je $f(x, y) = 0$. (str. 232-238)

Gornjo enačbo napišemo tako, da odvode na ekvidistantni mreži $\Delta x = \Delta y = h$ nadomestimo s končnimi razlikami

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) &\approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2}, \\ u_{yy}(x_i, y_j) &\approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h^2}, \end{aligned}$$

in dobimo sistem linearnih enačb

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \frac{1}{4}h^2 f_{i,j}.$$

Sistem rešimo z eno izmed iterativnih metod: Jacobijeva, Gauss-Seidlova, SOR.