Reševanje sistemov linearnih enačb, 1.del

Navedene strani so iz knjige *Octave z uvodom v numerične metode.*

Direktno reševanje: Gauss-Jordanova metoda

Gaussovo eliminacijo sestavljata prema eliminacija in vzvratno vstavljanje. Pri premi eliminaciji z elementarnimi transformacijami: menjava vrstnega reda enačb, množenje enačbe z neničelnim faktorjem in prištevanje večkratnikov enačb ene k drugi, dobimo zgornjetrikotni sistem, ki ga rešimo z vzvratnim vstavljanjem. Prema eliminacija se ustavi, ko je kakšen od diagonalnih elementov enak 0. V tem primeru bi vrstico zamenjali z vrstico z večjim indeksom, ki ima na tem mestu člen različen od nič. Izkaže se, da se vedno splača poiskati vrstico, ki ima po absolutni vrednosti največji člen, in to vrstico zamenjati s tekočo vrstico. Temu postopku rečemo *delno pivotiranje*, najdeni največji člen pa se imenuje *pivot*. Če je determinanta sistema različna od nič, potem vedno obstaja pivot različen od nič, kar pomeni, da se bo prema eliminacija z delnim pivotiranjem vedno zaključila. (str. 166-169)

Gauss-Jordanova metoda je podobna Gaussovi eliminaciji, le da tu namesto vzvratnega vstavljanja poleg preme eliminacije naredimo še obratno eliminacijo tako, da dobimo v matriki koeficientov ničle pod in nad glavno diagonalo, na glavni diagonali pa enke. Ko to dosežemo, je na mestu desnega stolpca stolpec rešitev.

Primer: Dan je sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sistem bomo po korakih rešili z Gauss-Jordanovo metodo. Takoj se lahko prepričamo, da je rešitev sistema vektor $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$. Pivotiranje v tem primeru ni potrebno.

```
>> A=[4 1 1; 1 3 -1; 1 0 2];
>> b=[1; 1; 1];
>> R=[A b] % razsirjena matrika koeficientov sistema
R =
   4   1   1   1
   1   3  -1   1
   1   0   2   1
>> R(1,:)=R(1,:)/R(1,1);
>> R(2,:)=R(2,:)-R(2,1)*R(1,:);
>> R(3,:)=R(3,:)-R(3,1)*R(1,:)
R =
   1.00000   0.25000   0.25000   0.25000
   0.00000   2.75000  -1.25000   0.75000
   0.00000  -0.25000   1.75000   0.75000
```

```
>> R(2,:)=R(2,:)/R(2,2);
>> R(1,:)=R(1,:)-R(1,2)*R(2,:);
>> R(3,:)=R(3,:)-R(3,2)*R(2,:)
R =
   1.00000   0.00000   0.36364   0.18182
   0.00000   1.00000  -0.45455   0.27273
   0.00000   0.00000   1.63636   0.81818
>> R(3,:)=R(3,:)/R(3,3);
>> R(1,:)=R(1,:)-R(1,3)*R(3,:);
>> R(2,:)=R(2,:)-R(2,3)*R(3,:)
R =
   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   1.00000   0.00000   0.50000
   0.00000   0.00000   1.00000   0.50000
>> x=R(:,4)
x =
  2.7756e-017
  5.0000e-001
  5.0000e-001
```

Iterativno reševanje: Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija

Osnovna ideja iterativnih metod je naslednja. Rešujemo sistem enačb $Ax = b$. Matriko koeficientov razbijemo na $A = D - L - U$, kjer D pomeni diagonalo matrike A, $-L$ spodnji trikotnik matrike A, $-U$ pa zgornji trikotnik matrike A. Iteracijo izvajamo po formuli

$$x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c,$$

kjer je R *iteracijska matrika*, c pa *iteracijski vektor* desnih strani. V primeru Jacobijeve iteracije je $R_j = D^{-1}(L+U)$ in $c_j = D^{-1}b$, v primeru Gauss-Seidlove iteracije pa je $R_{gs} = (D-L)^{-1}U$ in $c_{gs} = (D-L)^{-1}b$. Seveda moramo imeti v obeh primerih podan nek začetni približek $x^{(0)}$. Kdaj iteracija konvergira k točni rešitvi? (str. 171-176)

Izrek 1. *Če je norma iteracijske matrike $\|R\| < 1$, potem iteracija $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ konvergira k rešitvi enačbe $Ax = b$ pri poljubnem začetnem približku $x^{(0)}$.*

Izrek 2. *Iteracija $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ konvergira k rešitvi enačbe $Ax = b$ pri poljubnem začetnem približku $x^{(0)}$ in pri poljubnem stolpcu desnih strani b natanko tedaj, ko je po absolutni vrednosti največja lastna vrednost iteracijske matrike R strogo manjša od* $1 : \max_\lambda |\lambda| < 1$. *To med drugim pomeni, da morajo biti vse lastne vrednosti po absolutni vrednosti manjše od* 1.

Primer: Dan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sistem bomo rešili z Jacobijevo in Gauss-Seidlovo iterativno metodo z začetnim približkom $x_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Najprej bomo preverili, ali so lastne vrednosti obeh iteracijskih matrik absolutno manjše od 1, nato pa bomo izračunali 5 iteracij po obeh metodah in primerjali $\|Ax_5 - b\|_2$.

```
>> A=[2 1; 2 2]; b=[2; 2]; x0=[2/3; 1/3];
>> D=diag(diag(A)); L=-tril(A,-1); U=-triu(A,1);
>> RJ=inv(D)*(L+U), cJ=inv(D)*b % iteracijska matrika - Jacobi
RJ =
   0.00000  -0.50000
  -1.00000   0.00000
cJ =
   1
   1
>> max(abs(eig(RJ)))<1 % preverimo konvergencni pogoj
ans = 1
>> RGS=inv(D-L)*U, cGS=inv(D-L)*b % iteracijska matrika - Gauss-Seidel
RGS =
   0.00000  -0.50000
   0.00000   0.50000
cGS =
   1
   0
>> max(abs(eig(RGS)))<1 % preverimo konvergencni pogoj
ans = 1
>> x=x0; for i=1:5 x=RJ*x+cJ; end % Jacobijeva iteracija
>> norm(A*x-b)
ans = 0.083333
>> x=x0; for i=1:5 x=RGS*x+cGS; end % Gauss-Seidlova iteracija
>> norm(A*x-b)
ans = 0.010417
```