Reševanje sistemov linearnih enačb, 2.del

Navedene strani so iz knjige *Octave z uvodom v numerične metode.*

Iterativno reševanje: tridiagonalni sistemi

Tridiagonalna matrika ima neničelne elemente samo na glavni diagonali ter na prvi poddiagonali in prvi naddiagonali. Matriko običajno podamo z vektorji diagonalnih elementov. Vektorji $\mathtt{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$, $\mathtt{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $\mathtt{l} = (l_2, l_3, \ldots, l_n)$ in $\mathtt{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ pomenijo po vrsti prvo naddiagonalo, glavno diagonalo, prvo poddiagonalo matrike ter stolpec desni strani v tridiagonalnem sistemu $Ax = b$. (str. 172, 177-181)

Pravimo, da je matrika A *strogo diagonalno dominantna* po vrsticah, če za vsako vrstico velja, da je absolutna vrednost diagonalnega elementa strogo večja od vsote absolutnih vrednosti izvendiagonalnih elementov: za vsak i je $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Izrek 1. *Če je matrika A strogo diagonalno dominantna po vrsticah, potem Jacobijeva in Gauss-Seidlova iterativna metoda konvergirata (pogoj je zadosten, ni pa potreben).*

Algoritem - tridiagonalna Jacobijeva iteracija:

- Izberemo začetni približek $x^{(0)}$, maksimalno število iteracij m in natančnost ε.
- Od k-tega do $(k+1)$-ega približka vodijo naslednje enačbe:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= b_1/d_1 - u_1/d_1\, x_2^{(k)} \\ x_i^{(k+1)} &= b_i/d_i - l_i/d_i\, x_{i-1}^{(k)} - u_i/d_i\, x_{i+1}^{(k)}, \quad i = 2 \ldots n-1 \\ x_n^{(k+1)} &= b_n/d_n - l_n/d_n\, x_{n-1}^{(k)} \end{aligned}$$

- Če je $k > m$ ali $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, izstopimo iz zanke in ponudimo rešitev $x^{(k+1)}$.

Algoritem - tridiagonalna Gauss-Seidlova iteracija:

- Izberemo začetni približek $x^{(0)}$, maksimalno število iteracij m in natančnost ε.
- Za razliko od Jacobijeve iteracije upoštevamo že popravljene vrednosti v tem koraku. Od k-tega do $(k+1)$-ega približka vodijo naslednje enačbe:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= b_1/d_1 - u_1/d_1\, x_2^{(k)} \\ x_i^{(k+1)} &= b_i/d_i - l_i/d_i\, x_{i-1}^{(k+1)} - u_i/d_i\, x_{i+1}^{(k)}, \quad i = 2 \ldots n-1 \\ x_n^{(k+1)} &= b_n/d_n - l_n/d_n\, x_{n-1}^{(k+1)} \end{aligned}$$

- Če je $k > m$ ali $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, izstopimo iz zanke in ponudimo rešitev $x^{(k+1)}$.

Algoritem - tridiagonalna SOR iteracija:

- Izberemo začetni približek $x^{(0)}$, maksimalno število iteracij m, natančnost ε in relaksacijski parameter ω.

- Iteracija SOR je izpeljanka Gauss-Seidlove iteracije s to razliko, da na vsakem koraku vektor neznank popravimo z relaksacijskim parametrom ω, katerega izbira je seveda bistvenega pomena za število iteracij. Od k-tega do $(k+1)$-ega približka vodijo naslednje enačbe:

$$
\begin{aligned}
x^* &= b_1/d_1 - u_1/d_1\, x_2^{(k)} \\
x_1^{(k+1)} &= \omega\, x^* + (1-\omega)\, x_1^{(k)} \\
x^* &= b_i/d_i - l_i/d_i\, x_{i-1}^{(k+1)} - u_i/d_i\, x_{i+1}^{(k)}, \quad i = 2 \ldots n-1 \\
x_i^{(k+1)} &= \omega\, x^* + (1-\omega)\, x_i^{(k)} \\
x^* &= b_n/d_n - l_n/d_n\, x_{n-1}^{(k+1)} \\
x_n^{(k+1)} &= \omega\, x^* + (1-\omega)\, x_n^{(k)}
\end{aligned}
$$

- Če je $k > m$ ali $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, izstopimo iz zanke in ponudimo rešitev $x^{(k+1)}$.