Robni problemi in interpolacija

Navedene strani so iz knjige *Octave z uvodom v numerične metode.*

Robni problemi v eni dimenziji

Linearni robni problem v eni dimenziji

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

numerično rešujemo tako, da na intervalu $[a, b]$ ekvidistantno izberemo vozlišča x_i: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$, in odvode nadomestimo s končnimi razlikami v teh vozliščih. Tako prevedemo robni problem na tridiagonalni sistem linearnih enačb za približne neznane vrednosti $y_i = y(x_i)$ funkcije $y(x)$ v vozliščih. Sistem rešimo z eno izmed metod za reševanje tridiagonalnih sistemov. Matrike so diagonalno dominantne. (str. 182-184)

Algoritem - prevedba 1D robnega problema v tridiagonalni sistem:

- Interval $[a, b]$ razdelimo na $n + 1$ enako dolgih podintervalov.
- Postavimo $h = \frac{b-a}{n+1}$ (dolžina podintervala), $y_0 = y_a$ in $y_{n+1} = y_b$.
- Neznane količine so y_i, $i = 1, \ldots, n$.
- Odvode nadomestimo s končnimi razlikami

  $$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

  in

  $$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

- Dobimo sistem enačb

  $$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = r_i.$$

  Na levem robu $(x = a)$ je enačba oblike

  $$\frac{y_2 - 2y_1}{h^2} + p_1 \frac{y_2}{2h} + q_1 y_1 = -\frac{y_0}{h^2} + p_1 \frac{y_0}{2h} + r_1,$$

  na desnem robu $(x = b)$ pa oblike

  $$\frac{-2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n \frac{-y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = -\frac{y_{n+1}}{h^2} - p_n \frac{y_{n+1}}{2h} + r_n.$$

- Sestavimo vektorje `u`, `d`, `l` in `b` ter rešimo tridiagonalni sistem.

POLINOMSKA INTERPOLACIJA

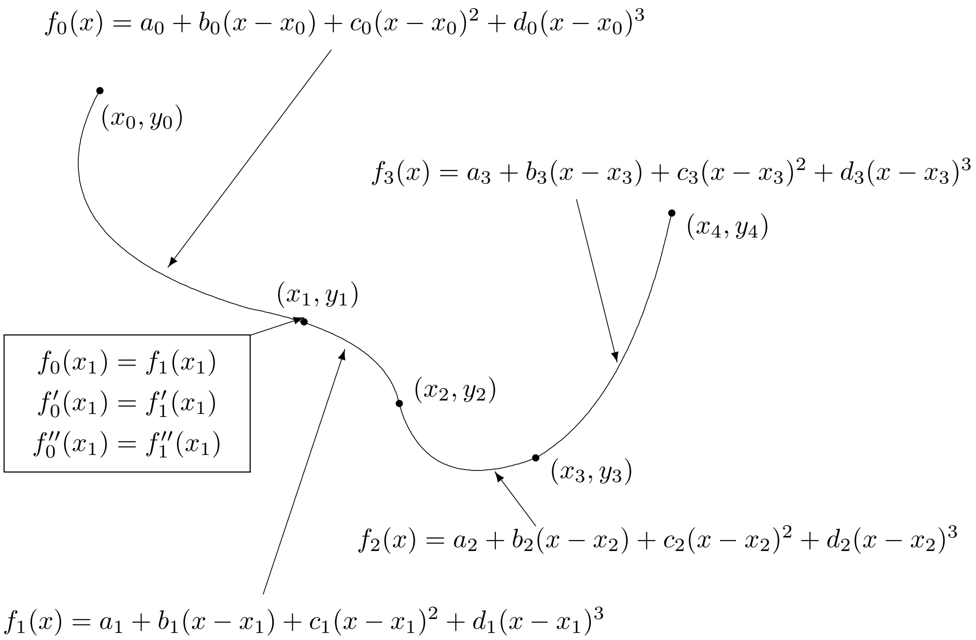
Dana je množica N točk (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$ in funkcija $f(x, a_1, \ldots, a_N)$. Iščemo N-terico parametrov a_j tako, da bo graf funkcije potekal skozi dano množico točk. Pri polinomski interpolaciji je funkcija polinom $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ stopnje n, število točk pa je enako številu koeficientov polinoma, to pomeni eno točko več, kot je stopnja polinoma: $N = n + 1$. Koeficienti polinoma ustrezajo sistemu linearnih enačb

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \ldots & x_N^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

O *kubični interpolaciji* govorimo v primeru, da točke interpoliramo s polinomom tretje stopnje. Za delo s polinomi na voljo vgrajene ukaze: `polyfit`, `polyval` in `roots`. (str. 191-193)

KUBIČNI ZLEPKI

Imamo $N+1$ interpolacijskih točk. Prva, z indeksom 0, in zadnja, z indeksom N, sta robni točki, preostale so notranje. Med pare sosednjih interpolacijskih točk lahko napnemo polinome tretje stopnje, če zahtevamo, da je zlepek teh polinomov v notranjih točkah zvezen in da ima zvezen prvi in drugi odvod. V obeh robnih točkah moramo predpisati še po en pogoj. *Naravni zlepek* dobimo, če zahtevamo, da je drugi odvod v robnih točkah enak nič. Rezultat interpolacije za $N+1$ interpolacijskih točk je skupina N četveric koeficientov (a_i, b_i, c_i, d_i), ki opisujejo polinome $f_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ med vsakim parom točk (x_i, y_i) in (x_{i+1}, y_{i+1}). (str. 193-196)



Slika 1: Kubični zlepki med petimi točkami. Pogoji o zveznosti in zveznosti prvih in drugih odvodov so podani za notranjo točko (x_1, y_1).

Algoritem - izračun koeficientov kubičnega zlepka:

- $\underline{a_i}$: $a_i = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$
- $\underline{c_i}$: zaradi naravnega pogoja je $c_0 = 0$, za ostale c_i, kjer $i = 1, \ldots, N-1$ in $c_N = 0$ velja

$$(x_{i+1} - x_i)c_{i+1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})c_i + (x_i - x_{i-1})c_{i-1} = 3\left(\frac{a_{i+1} - a_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{a_i - a_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)$$

  ali v matrični obliki

$$\begin{pmatrix} 2\Delta_{2,0} & \Delta_{2,1} & 0 & \ldots & 0 \\ \Delta_{2,1} & 2\Delta_{3,1} & \Delta_{3,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\left(\frac{a_2 - a_1}{\Delta_{2,1}} - \frac{a_1 - a_0}{\Delta_{1,0}}\right) \\ 3\left(\frac{a_3 - a_2}{\Delta_{32}} - \frac{a_2 - a_1}{\Delta_{21}}\right) \\ \vdots \\ \end{pmatrix},$$

  kjer smo označili $\Delta_{j,k} = x_j - x_k$. Matrika sistema je tridiagonalna.

- $\underline{d_i}$: izračunamo iz c_i za $i = 0, 1, \ldots, N-1$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3(x_{i+1} - x_i)},$$

  kjer je $c_N = 0$.

- $\underline{b_i}$: iz koeficientov a_i in c_i dobimo za $i = 1, \ldots, N-1$

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3}(x_{i+1} - x_i),$$

  kjer je $a_N = y_N$ in $c_N = 0$.