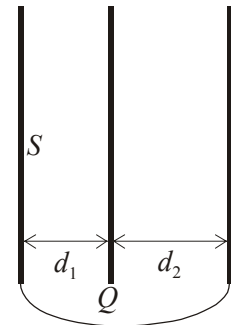
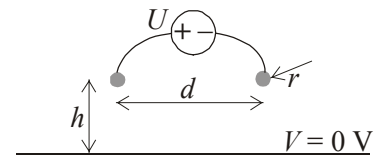


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)
izpit, 4. februar 2005

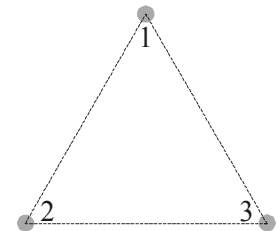
1. Dve enaki nenaektreni prevodni plošči s stransko površino S sta električno povezani z žico (razdalja med ploščama je veliko manjša od njunih stranic). Med njiju vstavimo tretjo, njima enako ploščo, ki pa je naektrena in ima naboj Q . Izrazite absolutno vrednost električne poljske jakosti v prostoru med srednjo in desno ploščo.



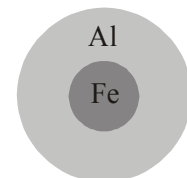
2. Vodnika simetričnega dvovoda dolžine 5 m ležita vzporedno nad ozemljeno prevodno ploščo. Med njiju je priključen vir napetosti $U = 400$ V. Izračunajte naboja na vodnikih. ($h = 3$ cm, $d = 6$ cm, $r = 2$ mm)



3. Trije enaki vzporedni vodniki polmera 1 cm in dolžine 50 km ležijo tako, da so njihove medosne razdalje enake 2 m. Gostote nabojev na vodnikih so: $q_1 = 10$ $\mu\text{C}/\text{m}$, $q_2 = q_3 = -5$ $\mu\text{C}/\text{m}$. Izračunajte električno energijo tega sistema.



4. Daljnovodna vrv Al/Fe je izvedena iz aluminija preseka 120 mm^2 in jeklenega stržena preseka 20 mm^2 , ki daje vrvi mehansko trdnost. Koliko MWh toplote se sprosti v vrvi na dolžini 30 km v enem dnevu, če je električni tok skozi njo 560 A? ($\gamma_{\text{Al}} = 36$ MS/m, $\gamma_{\text{Fe}} = 8$ MS/m)



5. Breme spremenljive upornosti je vključeno v enosmerno linearno vezje. Ko je upornost bremena $1,6$ $\text{k}\Omega$, je tok skozi njega 2 mA, ko je njegova upornost $3,6$ $\text{k}\Omega$, pa je tok skozi njega 1 mA. Pri kateri upornosti bremena bo moč na njemu maksimalna?

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)
izpit, 4. februar 2005, rešitve

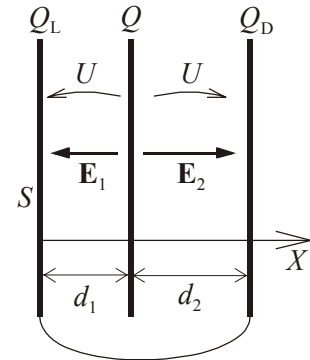
1. Električno povezani krajni plošči tvorita nevtralno telo: $Q_L + Q_D = 0$.

To se polarizira v polju elektrine Q . Ker sta potenciala stranskih plošč enaka, sta enaki tudi napetosti od srednje k stranskima ploščama:

$U = -E_{x1}d_1 = E_{x2}d_2$. Komponenti poljskih jakosti izrazimo z vsotama polj naelektrjenih plošč:

$$E_{x1} = -\frac{Q/S}{2\epsilon_0} - \frac{Q_D/S}{2\epsilon_0} + \frac{Q_L/S}{2\epsilon_0} = -\frac{Q+Q_D-Q_L}{2\epsilon_0 S} = -\frac{Q-2Q_L}{2\epsilon_0 S},$$

$$E_{x2} = \frac{Q/S}{2\epsilon_0} + \frac{Q_L/S}{2\epsilon_0} - \frac{Q_D/S}{2\epsilon_0} = \frac{Q+Q_L-Q_D}{2\epsilon_0 S} = \frac{Q+2Q_L}{2\epsilon_0 S}.$$



Ko ju vstavimo v prejšnjo enačbo, dobimo Q_L ,

$$\frac{Q-2Q_L}{2\epsilon_0 S} d_1 = \frac{Q+2Q_L}{2\epsilon_0 S} d_2 \Rightarrow (Q-2Q_L)d_1 = (Q+2Q_L)d_2 \Rightarrow Q_L = \frac{d_1-d_2}{d_1+d_2} \frac{Q}{2},$$

in tudi absolutno vrednost poljske jakosti med srednjo in desno ploščo:

$$|\mathbf{E}_2| = |E_{x2}| = \frac{|Q+2Q_L|}{2\epsilon_0 S} = \frac{1}{2\epsilon_0 S} \left| Q + Q \frac{d_1-d_2}{d_1+d_2} \right| = \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{d_1}{d_1+d_2} |Q|.$$

2. Glede na priključitev vira sta vzdolžni gostoti nabojev na vodnikih enakih absolutnih vrednosti, vendar nasprotnih predznakov, $\pm q$.

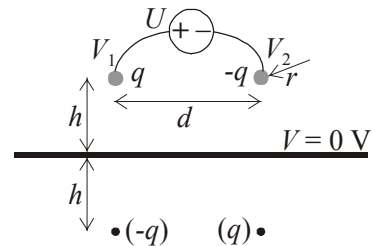
Polje naboja ozemljene prevodne plošče določata polji zrcalnih nabojev ($\pm q$). Naboja $Q_{1,2} = \pm ql$ vodnikov (dolžine $l = 5$ m) določa napetost vira, ki je enaka razliki potencialov vodnikov: $U = V_1 - V_2$.

Njiju zapišemo kot vsoto prispevkov dveh parov nabojev:

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{\sqrt{(2h)^2 + d^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}}$$

$$V_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{d} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + d^2}}{2h} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}}{2hd} = -V_1$$

$$U = V_1 - V_2 = 2V_1 = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2 + d^2}} \Rightarrow Q_{1,2} = \pm ql = \pm \frac{\pi\epsilon_0 l U}{\ln(2hd/r\sqrt{(2h)^2 + d^2})} \approx \underline{\underline{18,2 \text{ nC}}}.$$



3. Energija sistema je $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i l V_i$, kjer je $l = 50$ km

dolžina vodnikov, V_1, V_2 in V_3 pa so njihovi potenciali. Zaradi simetrije

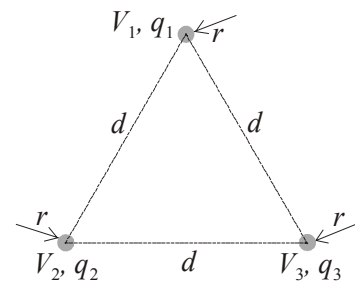
($q_1 = -2q_2 = -2q_3$) velja: $V_2 = V_3$ in $W_e = \frac{q_1 l}{2} (V_1 - V_2)$. Potenciala vodnikov sta:

$$V_1 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + 2 \frac{(-q_1/2)}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} + C = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r} + C$$

$$V_2 = V_3 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} + \frac{(-q_1/2)}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} + \frac{(-q_1/2)}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + C = \frac{q_1/2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{d} + C.$$

Električna energija sistema je:

$$W_e = \frac{q_1 l}{2} (V_1 - V_2) = \frac{q_1 l}{2} \left(\frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r} - \frac{q_1/2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{d} \right) = \frac{q_1 l}{2} \left(\frac{3q_1/2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r} \right) = \frac{3q_1^2 l}{8\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r} \approx \underline{\underline{358 \text{ kJ}}}.$$



4. Del toka I vrvi je vzdolž jekla, drug del pa vzdolž aluminija: $I = I_{\text{Fe}} + I_{\text{Al}} = 560 \text{ A}$. Vsakemu delu vrvi pripada svoja upornost; strženu upornost R_{Fe} , aluminiju pa upornost R_{Al} :

$$R_{\text{Fe}} = \frac{l}{\gamma_{\text{Fe}} S_{\text{Fe}}} = \frac{30 \cdot 10^3 \text{ m}}{(8 \cdot 10^6 \text{ S/m}) \cdot (20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)} = 187,5 \Omega,$$

$$R_{\text{Al}} = \frac{l}{\gamma_{\text{Al}} S_{\text{Al}}} = \frac{30 \cdot 10^3 \text{ m}}{(36 \cdot 10^6 \text{ S/m}) \cdot (120 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)} = \frac{R_{\text{Fe}}}{27} \approx 6,94 \Omega.$$

Zaradi vzporednosti obeh delov vrvi se tok med njiju razdeli v obratnem razmerju njunih upornosti:

$$I_{\text{Al}} / I_{\text{Fe}} = R_{\text{Fe}} / R_{\text{Al}} = 27 \Rightarrow I_{\text{Fe}} + 27I_{\text{Fe}} = 560 \text{ A} \Rightarrow I_{\text{Fe}} = 560 \text{ A} / 28 = 20 \text{ A} \quad \text{in} \quad I_{\text{Al}} = 540 \text{ A}.$$

Moči joulskih izgub v delih vrvi sta: $P_{\text{Fe}} = R_{\text{Fe}} I_{\text{Fe}}^2 = 75 \text{ kW}$ in $P_{\text{Al}} = R_{\text{Al}} I_{\text{Al}}^2 = 2025 \text{ kW}$, sproščena toplota v enem dnevu pa je $W = (P_{\text{Fe}} + P_{\text{Al}}) \Delta t \approx (0,075 \text{ MW} + 2,025 \text{ MW}) \cdot 24 \text{ h} \approx \underline{\underline{50,4 \text{ MWh}}}$.

5. Enosmerno linearno vezje modelirajmo z realnim napetostnim virom. Iz znančne enačbe sledi: $U_0 = (R_0 + R)I$. V njo vstavimo dani vrednosti upornosti bremena in toka: $U_0 = (R_0 + 1,6 \text{ k}\Omega) \cdot 2 \text{ mA} = (R_0 + 3,6 \text{ k}\Omega) \cdot 1 \text{ mA}$ in izračunamo notranjo upornost: $R_0 = 400 \Omega$. Moč na bremenu bo maksimalna, ko bo njegova upornost R enaka notranji upornosti vira, torej 400 Ω .

